
Contrôle continu

La durée de l'épreuve est 2h.

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Les notes de cours (comme tout autre document) et les calculatrices ne sont PAS autorisées.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

La qualité de la rédaction sera largement prise en compte.

Exercice 1.

Considérons le modèle $(\mathcal{P}(\lambda))_{\lambda>0}$.

1. Le modèle est-il identifiable ?
2. Le modèle est-il dominé ? Si oui, exhiber la dérivée de Radon-Nikodym correspondante.
3. Le modèle est-il complet ?
4. Le modèle est-il régulier ?
5. Qu'est ce qu'une statistique exhaustive ?
6. Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon i.d.d. issu d'une variable parente X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Exhiber une statistique exhaustive pour λ .
7. Considérons le cas où X_i représente le nombre d'évènements indésirables sévères (EIS) dus à l'absorption d'un médicament l'année i , pour $i = 1, \dots, n$. Déterminer un intervalle de confiance bilatéral asymptotique pour le nombre moyen d'EIS par an au niveau de confiance $(1 - \alpha)$.

Exercice 2.

On considère la famille de densités à deux paramètres inconnus $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) I(x \geq \alpha).$$

1. La densité $f_{\alpha,\beta}$ appartient-elle à la famille exponentielle ?
2. Soit X de densité $f_{\alpha,\beta}$. Déterminer les moments d'ordre k de X pour $k = 1, 2, 3, 4$ et calculer $\text{Var}(X)$.
Indication : si Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre égal à 1, alors $\mathbb{E}[Y^3] = 6$ et $\mathbb{E}[Y^4] = 24$.
3. Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon i.i.d. de densité $f_{\alpha,\beta}$. Déterminer l'estimateur de la méthode des moments $(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$ de (α, β) .
4. Etablir la consistance et le comportement asymptotique de $(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$.
5. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ de (α, β) .
6. Etablir la consistance et le comportement asymptotique de $\hat{\alpha}_n$.
7. Etablir la consistance et le comportement asymptotique de $\hat{\beta}_n$.
8. Le modèle est-il régulier ?