Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - études de cas

Ségolen Geffray
geffray@math.unistra.fr
Année 2014/2015

Sujet 3: variations autour de la méthode de Monte-Carlo

• **Méthode de la fonction de répartition inverse**:
On définit la fonction pseudo-inverse de F sur $[0,1]$ par

$$F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq u\}$$

Proposition 1. *Si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

Preuve: Commençons par montrer que $F^{-1}(u) \leq t$ ssi $u \leq F(t)$.
Soient $u \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $u \leq F(t)$. Par définition de la fonction de répartition inverse, on a alors $F^{-1}(u) \leq t$. Réciproquement, si $F^{-1}(u) \leq t$, alors pour tout $y > t$, $F(y) \geq u$ car F est croissante. Et puisque F est continue à droite, $F(t) \geq u$.
En utilisant ce résultat, on en déduit que

$$P(F^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F(t)) = F(t). \qquad \square$$

Ainsi, dans le cas où F^{-1} est explicite, pour générer un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ suivant la fonction de répartition F, on génère un échantillon $(U_1, \ldots, U_n)$ de variables uniformément distribuées sur $[0,1]$ et on pose $X_i = F^{-1}(U_i)$.

• **Méthode de la réciprociation**:
Si $X \sim f_X$, alors $Z := \dfrac{1}{X} \sim f_Z$ avec $f_Z(z) = \dfrac{f_X(z^{-1})}{z^2}$ pour $z \in \mathbb{R}$.

• **Méthode de décomposition**:
On veut simuler des variables aléatoires de densité f par rapport à une mesure μ. On suppose que cette densité peut s'écrire sous la forme suivante (non unique):

$$f = \sum_{j \geq 0} p_j f_j$$

où $0 < p_j < 1$ pour tout $j \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{j \geq 0} p_j = 1$ et où f_j est elle-même une densité par rapport à la mesure μ. Soit W une variable aléatoire discrète de loi de probabilité $(p_j)_{j \geq 0}$. Soit $(Y_j)_{j \geq 0}$ une suite de variables indépendantes entre elles et indépendante de W, telle que $Y_j \sim f_j$ pour chaque $j \geq 0$. Alors $X := Y_W \sim f$.
En effet, d'après le théorème de Fubini, on a $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{P}(X_W \in B) = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(X_W \in B | W = j)\mathbb{P}(W = j) = \int_B \sum_{j \geq 0} p_j f_j(x) d\mu(x) = \int_B f(x) d\mu(x)$$

Exercice 1.

1. Soit $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$. Quelle est la densité de $1/Y^\lambda$ pour un $\lambda > 0$?
2. Simuler un échantillon selon la loi admettant la densité
$$f(x) \propto \frac{1}{x^3}, \quad x > 1\,.$$
en utilisant la méthode de la fonction de répartition inverse d'une part et d'autre part en utilisant une transformation de variable de loi $\mathcal{U}(0,1)$.
3. Simuler un échantillon selon la loi admettant la densité
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1, \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$
par la méthode de la fonction de répartition inverse d'une part et par la méthode de décomposition d'autre part.
4. Estimer $I = \int \exp(-3x)\, f(x) dx$ par méthode de Monte-Carlo. Quelle est la précision de l'approximation donnée?