Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - études de cas

Ségolen Geffray
geffray@math.unistra.fr
Année 2014/2015

Sujet 8: variations autour de la méthode de Monte-Carlo

• **Méthode de mélange**:
Soit à simuler la densité f qui se met sous la forme

$$f(x) = \int h(x,y)dy$$

où h est une fonction mesurable positive. Remarquons que h est alors la densité de probabilité d'un couple (X,Y) puisque

$$1 = \int f(x)dx = \int\int h(x,y)dxdy$$

et que f est alors la loi marginale de X. Notons g_Y la loi marginale de Y et $f_{X|Y=y}$ la loi conditionnelle de X sachant $\{Y=y\}$. S'il est facile de simuler des variables de densité g_Y et $f_{X|Y=y}$, alors on obtient une méthode de simulation de f avec l'algorithme suivant:

- tirer une variable Y selon g_Y, noter y la réalisation obtenue,
- tirer une variable X selon $f_{X|Y=y}$,
- renvoyer X.

Exercice 1.
Simuler des variables selon la densité

$$f(x) = n\int y^{-n}e^{-xy}dy, \quad x \geq 0,$$

en utilisant la méthode du mélange (indication: vous pouvez utiliser une loi de Pareto et une loi exponentielle).

Exercice 2.
Estimer $p = \mathbb{P}(X > t)$ où $X \sim \mathcal{E}(1)$ en utilisant tour à tour

1. la méthode de Monte-Carlo usuelle (de base),
2. par méthode d'échantillonnage préférentiel en utilisant une loi exponentielle de paramètre astucieusement choisi.

Exercice 3.
Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer une approximation de

$$I = \mathbb{P}(X > 20)$$

1. par méthode de Monte-Carlo usuelle en simulant des gaussiennes centrées réduites,
2. en effectuant au préalable une transformation inverse dans l'intégrale à calculer et en simulant des variables uniformes sur $[0, 1/20]$,
3. en utilisant la loi exponentielle de paramètre 1 tronquée en dessous de 20 ie de densité $g : y \to \exp(-(y-20))I(y \geq 20)$.
   NB: si $Z \sim \mathcal{E}(1)$, alors $Y = 20 + Z \sim g$.

Exercice 4.
Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer une approximation de

$$I = \mathbb{P}(|X-5| < 1/2)$$

1. par méthode de Monte-Carlo usuelle en simulant des gaussiennes centrées réduites,
2. par échantillonnage préférentiel avec une loi normale de paramètres choisis de manière optimale.