
Sujet 4: Etude du comportement de l'estimateur des coefficients de régression en fonction du respect ou non de l'hypothèse d'homoscédasticité

• **Quelques rappels sur la régression linéaire:**

De manière générale, le but de tout modèle de régression est de spécifier une relation (de nature stochastique) entre une variable Y appelée variable à expliquer et un certain nombre de variables explicatives $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$. Dans toute la suite, on supposera que les variables explicatives sont de loi continue.

Notons $(Y_i, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)})$ pour $i = 1, \dots, n$ les observations correspondant à n individus que l'on suppose distribuées comme $(Y, X^{(1)}, \dots, X^{(p)})$. Le modèle de régression linéaire gaussien standard à n observations indépendantes s'écrit sous la forme générique suivante:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k X_i^{(k)} + \varepsilon_i, \quad \text{où } \varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (1)$$

Le modèle de régression linéaire standard repose ainsi sur les hypothèses suivantes:

(H₁) linéarité: l'espérance conditionnelle de la variable réponse vaut

$$\mathbb{E}[Y_i | X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}] = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k X_i^{(k)}.$$

Attention, bien que l'espérance conditionnelle de la variable réponse soit une combinaison affine des covariables, la linéarité s'apprécie relativement à la linéarité de $\mathbb{E}[Y_i | X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}]$ en les paramètres.

On supposera toujours que le modèle est identifiable, à savoir

$$\beta := (\beta_0, \dots, \beta_p)^t = (\beta'_0, \dots, \beta'_p)^t := \beta' \implies \mathbb{E}_\beta[Y_i | X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}] = \mathbb{E}_{\beta'}[Y_i | X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}].$$

(H₂) centrage des erreurs: $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

(H₃) exogénéité = non-endogénéité: $(X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)})$ et ε_i sont indépendants pour $i = 1, \dots, n$.

(H₄) non-colinéarité des covariables: les covariables sont non-corrélées entre elles, ce qui se traduit en pratique par le fait que les vecteurs $(X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$ sont non-colinéaires pour $k = 1, \dots, p$. On écartera également le cas trivial où l'un de ces vecteurs serait colinéaire au vecteur de longueur n dont toutes les composantes sont égales à 1.

(H₅) non-corrélation: les vecteurs $(Y_i, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)})$ sont non-corrélés pour $i = 1, \dots, n$.

(H₆) homoscédasticité: les lois conditionnelles de Y_i sachant $X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}$ ont même variance donc on a $\sigma_i^2 = \sigma^2$ pour $i = 1, \dots, n$.

Le modèle de **régression linéaire standard à n observations indépendantes** est gaussien lorsqu'on effectue l'hypothèse suivante:

(H₇) normalité: conditionnellement à $X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)}$, la variable de réponse Y_i suit la loi normale.

Notons I_n =matrice identité de taille $n \times n$ et avec

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1^{(1)} & \dots & X_1^{(p)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_n^{(1)} & \dots & X_n^{(p)} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Le modèle de régression linéaire homoscédastique se réécrit matriciellement sous la forme:

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cdot \beta + \varepsilon, \quad \text{où } \varepsilon \sim (0_n, \sigma^2 I_n) \text{ et } \varepsilon \perp \mathbb{X}.$$

Le modèle de régression linéaire gaussien homoscédastique s'obtient sous forme matricielle lorsque l'on ajoute l'hypothèse $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0_n, \sigma^2 I_n)$.

On dit que le modèle est bien spécifié lorsqu'il correspond effectivement au mécanisme ayant servi à généré les données. Dans le cas contraire, on dit qu'il est mal spécifié.

• **Estimation de l'effet des variables explicatives:**

Dans le cadre du modèle linéaire gaussien standard présenté ci-dessus, on se demande si les variables explicatives introduites dans le modèle ont un effet ou non sur la variable à expliquer. Cet effet est quantifié par le coefficient de régression correspondant.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires de β est $\hat{\beta} = (\mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X})^{-1} \cdot \mathbb{X}^t \cdot \mathbb{Y}$. Sous les hypothèses $(H_1) - (H_4)$, cet estimateur est sans biais

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} | \mathbb{X}] = \beta.$$

Sous les hypothèses $(H_1) - (H_6)$, la variance de $\hat{\beta}$ est

$$\text{Var}(\hat{\beta} | \mathbb{X}) = \sigma^2 (\mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X})^{-1}.$$

Notons $\hat{\sigma}^2$ l'estimateur de la variance de σ^2 défini par:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - (p + 1)} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^t \cdot \hat{\varepsilon}}{n - (p + 1)}$$

en notant

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \mathbb{X}_i \cdot \hat{\beta}$$

et

$$\hat{\varepsilon} = \mathbb{Y} - \mathbb{X} \cdot \hat{\beta}.$$

Sous les hypothèses $(H_1)-(H_6)$, l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est sans biais pour σ^2 .

• **Comportement asymptotique:**

Soit l'hypothèse:

(H₈): $\frac{\mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} Q$ lorsque $n \rightarrow \infty$ où Q est une matrice symétrique définie positive.

Sous les hypothèses (H₁)-(H₆) et (H₈), la convergence $\widehat{\beta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \beta$ a lieu lorsque $n \rightarrow \infty$.

Soit l'hypothèse:

(H₉): les erreurs ε_i sont mutuellement indépendantes pour $i = 1, \dots, n$, ou de manière équivalente, les vecteurs $(Y_i, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)})$ sont mutuellement indépendants pour $i = 1, \dots, n$.

Sous les hypothèses (H₁)-(H₆), (H₈) et (H₉), la convergence $\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$ a lieu lorsque $n \rightarrow \infty$.

Introduisons les conditions de Grenander pour des données à bon comportement:

(G₁): pour chaque colonne $\mathbf{X}^{(k)}$ de \mathbb{X} , $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}^{(k)t} \cdot \mathbf{X}^{(k)} = +\infty$.

(G₂): $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(X_i^{(k)})^2}{\mathbf{X}^{(k)t} \cdot \mathbf{X}^{(k)}} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

(G₃): $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} R_n = C$ où C est une matrice définie positive et où R_n est la matrice de corrélation empirique des colonnes de \mathbb{X} à l'exception de la colonne de 1 correspondant à l'inclusion du terme constant.

Les conditions de Grenander sont des conditions assez faibles, invérifiables en pratique, mais susceptibles d'être satisfaites par de nombreuses données.

Sous les hypothèses (G₁)-(G₃), (H₁)-(H₆), (H₈) et (H₉), lorsque $n \rightarrow \infty$

$$(\sigma^2(\mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X})^{-1})^{-1/2} (\widehat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{p+1}(0_{p+1}, I_{p+1}).$$

$$(\widehat{\sigma}^2(\mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X})^{-1})^{-1/2} (\widehat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{p+1}(0_{p+1}, I_{p+1}).$$

• **Comportement à distance finie dans le cas gaussien:**

Sous les hypothèses (H₁) – (H₇),

$$\widehat{\beta} \sim \mathcal{N}_{p+1}(\beta, \sigma^2(\mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X})^{-1})$$

et, pour $j = 0, 1, \dots, p$,

$$(\widehat{\sigma}^2(\mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X})^{-1})^{-1/2} (\widehat{\beta}^{(j)} - \beta^{(j)}) \sim T(n - (p + 1)).$$

• **Implémentation au moyen du logiciel R:**

Le logiciel R permet d'ajuster simplement un modèle de régression à des données. Pour ajuster un modèle linéaire sur un échantillon $(Y_i, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(p)})_{i=1, \dots, n}$, on stockera les n valeurs des Y_i dans un vecteur `y`, puis, pour $k = 1, \dots, p$ on stockera les n valeurs des $X_i^{(k)}$ dans un vecteur `xk`. Le modèle linéaire est alors ajusté au moyen de l'instruction suivante (où $p = 3$)

```
mylm<- lm(y~x1+x2+x3)
```

et le résultat est stocké dans l'objet `mylm`. L'instruction suivante permet d'accéder à l'ensemble des quantités calculées:

```
summary(mylm)
```

Sont notamment calculées, les estimations des β_j pour $j = 0, \dots, p$ et les estimations de leurs écarts-types. L'objet `summary(my1m)` est une liste dont on peut récupérer chacune des composantes qui nous intéresse. Pour cela, l'instruction `str(summary(my1m))` permet de voir le nom et la structure des différentes composantes de cette liste.

Exercice 1.

Etudier de manière empirique à partir de données simulées le comportement de l'estimateur des coefficients de régression, en termes de biais, variance, écart quadratique, consistance et distribution, ceci en fonction de

- la taille de l'échantillon n simulé,
- du respect ou du non-respect de l'hypothèse d'homoscédasticité.

NB: un cas intéressant d'hétéroscédasticité en pratique est celui où la variance dépend d'un (ou plusieurs) prédicteur(s).