

RÉGULARITÉ DES CONVEXES DIVISIBLES

RÉSUMÉ. Nous démontrons l'égalité, pour les convexes divisibles, entre la régularité du bord du convexe et la régularité du bord du convexe dual.

INTRODUCTION

Soit M une $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ -variété compacte, avec $n \geq 2$, autrement dit, M est une (G, X) -variété avec $G = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (une définition précise des (G, X) -variétés se trouve dans [6]).

La variété M est supposée de plus convexe, c'est-à-dire dans toute classe d'homotopie libre, il y a une géodésique¹. Dans ce cas, le revêtement universel de M s'identifie² à un ouvert convexe Ω de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, le groupe fondamental $\pi_1(M)$ à un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ laissant stable l'ouvert Ω et M est isomorphe au quotient $\Gamma \backslash \Omega$.

Ici, nous nous intéresserons seulement au cas où l'ouvert Ω est *saillant*, ce qui signifie qu'il existe un hyperplan H de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tel que $H \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ et où de plus l'ouvert Ω est *strictement convexe*. C'est par exemple toujours le cas quand M est une surface compacte de genre g plus grand que deux (voir le théorème 3 dans [8]). Un tel ouvert Ω sera appelé *ouvert strictement convexe divisible*. Pour une introduction et un exposé plus complet des propriétés des convexes divisibles se reporter aux articles d'Y. Benoist [4] et [5].

Une autre série d'exemples est donnée par les variétés compactes à courbure constante égale à -1 , dans ce cas l'ouvert Ω de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un ellipsoïde c'est-à-dire le cône du futur pour une forme quadratique \mathbf{q} de signature $(1, n)$ et la variété M est le quotient de Ω par un sous-groupe Γ discret cocompact de $\mathrm{SO}(\mathbf{q})$. Les déformations de la structure projective de ces variétés fournissent des exemples non triviaux d'ouverts strictement convexes et divisibles, voir par exemple le corollaire 2.10 de [5] et la remarque 1.3 de [3].

En général, le bord $\partial\Omega$ n'a pas la régularité des ellipsoïdes, il est de classe \mathcal{C}^1 . En outre, il est α -Hölder pour un réel $1 < \alpha \leq 2$ avec $\alpha = 2$ uniquement si l'ouvert Ω est un ellipsoïde.

Le but de ce texte est de montrer que pour un ouvert Ω strictement convexe divisible, les régularités de Ω et de son convexe dual Ω^* coïncident (théorème 2), ce qui répond à une question posée dans [5].

¹une géodésique pour la connexion sur M donnée par la structure projective.

²Voir, par exemple, N.H. Kuiper [8] pour le cas des surfaces.

1. CONVEXES DIVISIBLES

Cette partie redonne la définition des convexes divisibles, tout comme quelques unes de leurs propriétés qui nous seront utiles par la suite et énonce le théorème principal.

V est un espace vectoriel réel de dimension $n + 1$.

Définition 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{P}(V)$.

L'ouvert Ω sera appelé convexe divisible s'il vérifie les propriétés suivantes :

- (1) l'ouvert Ω est convexe³ saillant.
- (2) Il existe Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}(V)$ laissant stable Ω et le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est compact.

Remarques :

- Dans tout ce texte, nous nous intéresserons uniquement aux ouverts convexes divisibles qui sont de plus strictement convexes.

- Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, le groupe Γ sera supposé sans torsion⁴, et donc le quotient $M := \Gamma \backslash \Omega$ est une variété compacte.

1.1. Convexe dual.

Définition 2. le dual Ω^* de Ω est :

$$\Omega^* := \{ [f] \in \mathbb{P}(V^*) / f(x) \neq 0 \text{ pour tout } [x] \text{ dans } \Omega \}.$$

Si l'ouvert Ω est saillant, alors son dual Ω^* est un ouvert convexe non vide.

Proposition 1. Il y a équivalence entre :

- (1) Ω est un ouvert strictement convexe divisible.
- (2) Ω^* est un ouvert strictement convexe divisible.

Démonstration : Par définition, l'ouvert Ω est saillant et donc le dual Ω^* est non vide et ouvert. De plus il est clair que si un groupe Γ laisse stable Ω , alors le groupe⁵ ${}^t\Gamma$ laisse stable Ω^* .

L'équivalence entre la compacité de $\Gamma \backslash \Omega$ et celle de ${}^t\Gamma \backslash \Omega^*$ est démontrée dans le lemme 2.8 de [5] (et aussi dans le lemme 10.5 de [2]). En effet, suivant ce lemme, la compacité du quotient $\Gamma \backslash \Omega$ implique que la dimension cohomologique du groupe Γ est n , ce qui implique ensuite que le quotient ${}^t\Gamma \backslash \Omega^*$ est compact. Donc Ω est divisible si, et seulement si, Ω^* est divisible.

Par ailleurs, un convexe divisible Ω est strictement convexe si, et seulement si, le groupe Γ est un groupe hyperbolique⁶ (proposition 2.5 et fait 2.4 de [5]). Ceci montre l'équivalence entre la stricte convexité de l'ouvert convexe divisible Ω et celle de son dual. \square

De plus, on sait que si l'ouvert Ω^* est strictement convexe, le bord $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^1 .

³c'est-à-dire que l'intersection de Ω avec toute droite projective est connexe.

⁴Il est classique que le groupe Γ est de type fini car il est discret et agit de manière cocompact sur Ω . Ceci permet d'appliquer le lemme de Selberg pour trouver un groupe d'indice fini sans torsion [9].

⁵ ${}^t\Gamma$ est utilisé pour signifier « le groupe Γ agissant par la représentation duale ».

⁶voir [7] pour un exposé sur les groupes hyperboliques.

Un ouvert strictement convexe et divisible a ainsi une régularité maximale α_Ω , dont nous donnerons une définition précise dans la partie 3. Le théorème principal que nous voulons démontrer est le suivant :

Théorème 2. *Soit Ω un ouvert strictement convexe et divisible de $\mathbb{P}(V)$, le dual Ω^* est aussi strictement convexe et divisible par la proposition 1.*

Les régularités de Ω et Ω^ sont égales :*

$$\alpha_\Omega = \alpha_{\Omega^*}.$$

2. DISTANCE DE HILBERT

Sur un ouvert convexe Ω , en s'inspirant d'une définition de la distance sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , une distance est définie de la façon suivante :

$$\text{pour } x \text{ et } y \text{ dans } \Omega, \begin{cases} d_\Omega(x, y) = 0 & \text{si } x = y. \\ d_\Omega(x, y) = |\log(a, b; x, y)| & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

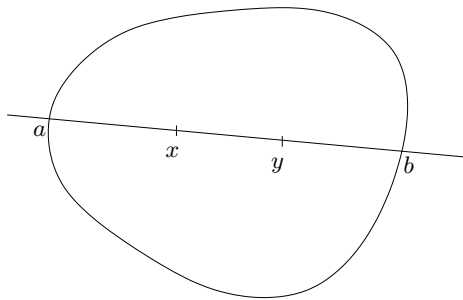


FIG. 1. La distance de Hilbert

où a et b sont les deux points d'intersection de la droite projective (x, y) avec le bord $\partial\Omega$ (figure 1), et où $(a, b; x, y)$ désigne le birapport des quatre points a, b, x, y :

$$(a, b; x, y) = \frac{x - a}{x - b} \frac{y - b}{y - a}.$$

La fonction d_Ω ainsi obtenue vérifie bien les axiomes d'une distance.

Cette distance est une métrique finslérienne, elle est définie par une métrique sur le fibré tangent, c'est-à-dire une norme $\|\cdot\|_x$ sur l'espace tangent $T_x\Omega$, pour $x \in \Omega$, qui varie continûment. A cette distance, est associé le flot géodésique qui se trouve être ici un flot d'Anosov (voir le théorème 1.1 de [5]) et la régularité du flot géodésique et celle du bord $\partial\Omega$ sont liés (les (in)égalités précises sont données dans la troisième partie de [5]).

Le groupe Γ agit par isométrie sur (Ω, d_Ω) . En effet, les éléments de Γ laissent stable l'ouvert Ω et son bord $\partial\Omega$ et les transformations projectives conservent le birapport.

3. RÉGULARITÉ α -HÖLDER ET β -CONVEXITÉ

Cette section introduit les notions de régularité α -Hölder et de β -convexité, et donne une caractérisation de la β -convexité pour les fonctions. Les résultats de régularité du bord d'un ouvert strictement convexe divisible sont aussi rappelés.

3.1. Régularité α -Hölder.

Définition 3. Soit M une hypersurface de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n , M est dite α -Hölder ou de classe \mathcal{C} , pour un réel α , $1 < \alpha \leq 2$, si pour tout compact K de M , il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$d(x, T_y M) \leq C_K d(x, y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } K.$$

Remarques :

- Les distances considérées ici sont déduites d'une norme sur \mathbb{R}^n et l'espace tangent $T_y M$ a été implicitement considéré comme un sous espace affine de \mathbb{R}^n .

- Dans le cas où la variété M est le graphe d'une fonction f de classe \mathcal{C}^1 , cette définition équivaut à la régularité $(\alpha - 1)$ -Hölder de la différentielle de f . La fonction f est dite aussi α -Hölder.

Ici, le bord $\partial\Omega$ est aussi naturellement une hypersurface d'un espace vectoriel, car l'adhérence de Ω est incluse dans un ouvert affine de $\mathbb{P}(V)$, on parlera de régularité \mathcal{C} pour $\partial\Omega$ et la définition ne dépend pas de l'ouvert affine considéré⁷.

On sait que le bord des ouverts strictement convexes divisibles est α -Hölder :

Proposition 3. (proposition 4.6 de [5]) Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible de $\mathbb{P}(V)$. Il existe un réel α , $1 < \alpha \leq 2$ pour lequel le bord $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C} .

On posera

$$\alpha_\Omega = \sup \{ \alpha \leq 2 / \partial\Omega \text{ est de classe } \mathcal{C} \}.$$

Par la proposition, α_Ω est strictement supérieur à un. Une des conséquences de ce que nous montrerons est que le bord de Ω est α_Ω -Hölder, c'est-à-dire que la valeur limite est atteinte.

3.2. β -convexité.

Définition 4. Soit M une hypersurface de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n , M est dite β -convexe pour un réel β plus grand ou égal à deux si, pour tout compact K inclus dans M , il existe une constante C_K strictement positive telle que

$$d(x, T_y M) \geq C_K d(x, y)^\beta \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } K.$$

Remarques :

- Là encore, cette définition s'applique au bord $\partial\Omega$.
- Lorsque M est le graphe d'une fonction f convexe et de classe \mathcal{C}^1 , la β -convexité de M est équivalent à la β -convexité de f (voir la définition 5).

Commençons par faire le lien avec la régularité Hölder.

Lemme 4. Soient Ω un ouvert strictement convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$, Ω^* son dual dans $\mathbb{P}(V^*)$ et α, β des réels, $1 < \alpha \leq 2 \leq \beta < \infty$, vérifiant l'égalité

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Les deux énoncés suivants sont alors équivalents :

⁷La régularité Hölder est en fait une propriété locale.

- (1) $\partial\Omega$ est β -convexe.
- (2) $\partial\Omega^*$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration : Elle utilise les deux points suivants :

- Si $\Omega \subset \Omega'$, alors $\Omega'^* \subset \Omega^*$.
- Le dual de $y > x^r$ est $y^* > x^*$ (dans des coordonnées adaptées). \square

Ce lemme, combiné à la proposition 3, a pour conséquence la proposition suivante :

Proposition 5. *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, alors il existe un réel β , $\beta \geq 2$, pour lequel le bord $\partial\Omega$ est β -convexe.*

Si nous posons

$$\beta_\Omega = \inf \{ \beta \geq 2 / \partial\Omega \text{ est } \beta\text{-convexe} \},$$

nous avons alors, par le lemme 4, la relation

$$\frac{1}{\alpha_{\Omega^*}} + \frac{1}{\beta_\Omega} = 1.$$

Dans toute la suite du texte, la β -convexité sera privilégiée pour des raisons de commodité. Cependant, c'est en terme de régularité α -Hölder qu'il faut en penser les conséquences (cf le lien avec la régularité du flot géodésique, dans le lemme 3.6 de [5]). Nous monterons donc l'égalité suivante, équivalente au théorème 2

$$\beta_\Omega = \beta_{\Omega^*},$$

si Ω est un ouvert strictement convexe divisible et Ω^* son dual.

3.3. Fonctions β -convexes. Ce paragraphe donne une caractérisation (et une définition) des fonctions β -convexes, qui sera utile dans la partie 4.

Définition 5. *Soient U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe \mathcal{C}^1 , β un réel plus grand ou égal à deux. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Il existe une constante C_1 strictement positive telle que, pour tous x et y appartenant à U ,*

$$|f(y) - f(x) - df_x(y - x)| \geq C_1 \|y - x\|^\beta.$$

- (2) *Il existe une constante C_2 strictement positive telle que, pour tous x et y appartenant à U ,*

$$|f(y) + f(x) - 2f\left(\frac{x + y}{2}\right)| \geq C_2 \|y - x\|^\beta.$$

La fonction f sera alors dite β -convexe, si elle vérifie une de ces deux conditions.

Démonstration :

L'implication directe (1) \Rightarrow (2) est facile.

Pour l'implication réciproque nous pouvons supposer $x = 0$ et $df_0 = 0$. Comme la fonction f est convexe, pour tout y appartenant à U , nous avons :

$$f(0) + f(y) - 2f\left(\frac{y}{2}\right) = \left|f(0) + f(y) - 2f\left(\frac{y}{2}\right)\right| \geq C_2 \|y\|^{r'},$$

$$f(y) - f(0) \geq C_2 \|y\|^{r'} + 2\left(f\left(\frac{y}{2}\right) - f(0)\right)$$

Par récurrence, pour tout n dans \mathbb{N}^*

$$f(y) - f(0) \geq C_2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-r')} \|y\|^{r'} + 2^n \left(f\left(\frac{y}{2^n}\right) - f(0)\right)$$

mais le terme de droite admet une limite quand n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(f\left(\frac{y}{2^n}\right) - f(0)\right) = df_0(y) = 0,$$

donc

$$|f(y) - f(0) - df_0(y)| = f(y) - f(0) \geq \frac{C_2}{1 - 2^{1-r'}} \|y\|^{r'}.$$

La constante $C_1 = \frac{C_2}{1 - 2^{1-r'}} > 0$ convient alors. \square

4. β -CONVEXITÉ ET DISTANCE DE HILBERT

Cette partie fait le lien entre la β -convexité de $\partial\Omega$ et la « forme \blacktriangleright des boules de l'ouvert Ω pour la distance de Hilbert. La distance de Hilbert étant définie grâce aux points de $\partial\Omega$, il est naturel de rapprocher les propriétés de $\partial\Omega$ et celles de la distance d_Ω .

Dans ce paragraphe, Ω désigne un ouvert strictement convexe et saillant de $\mathbb{P}(V)$ (ici Ω n'est pas nécessairement supposé divisible).

4.1. Formes des boules. Pour toute la suite nous fixons un réel r_0 strictement positif. Nous nous intéressons à la forme des boules pour la distance de Hilbert, si x_0 appartient à Ω

$$B_\Omega(x_0, r_0) := \{x \in \Omega / d_\Omega(x_0, x) \leq r_0\}.$$

Pour quantifier cette idée, soit δ une distance sur le fermé $\bar{\Omega}$ et posons, pour β plus grand ou égal à deux,

$$\begin{aligned} \phi_{r'} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_0 &\longmapsto \phi_{r'}(x_0) = \inf \left\{ \frac{\delta(x_0, y)}{\delta(x_0, x)^{r'}} / d_\Omega(x_0, y) = d_\Omega(x_0, x) = r_0 \right\} \\ &= \frac{\inf \{ \delta(x_0, x) / d_\Omega(x, x_0) = r_0 \}}{\sup \{ \delta(x_0, y)^{r'} / d_\Omega(x_0, y) = r_0 \}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi &: [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto \psi(\beta) := \inf \left\{ \phi_{r'}(x_0) / x_0 \in \Omega \right\}. \end{aligned}$$

Intuitivement, on compare comment le rapport du « petit axe \blacktriangleright , $a = \inf_{y \in B_\Omega(y_0, r_0)} \delta(y_0, y)$, et du « grand axe \blacktriangleright , $b = \sup_{x \in B_\Omega(y_0, r_0)} \delta(y_0, x)$, de ces boules évolue quand le point x_0 se rapproche du bord $\partial\Omega$ et, plus précisément, si le ratio $a/b^{r'}$ reste minoré.

Ces fonctions dépendent de la distance choisie de la manière suivante :

Lemme 6. Soient δ et δ' deux distances sur $\overline{\Omega}$, alors quelque soit x_0 appartenant à Ω ,

$$\frac{1}{C^{1+\nu}}\phi_{\nu}(x_0) \leq \phi'_{\nu}(x_0) \leq C^{1+\nu}\phi_{\nu}(x_0).$$

La constante C est la constante d'équivalence des distances :

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } \overline{\Omega}, \quad \frac{1}{C}\delta(x, y) \leq \delta'(x, y) \leq C\delta(x, y).$$

La démonstration est directe. Ce lemme permettra dans la suite d'adapter les distances sur $\overline{\Omega}$ pour en choisir de plus commode à chaque étape, il montre aussi que l'énoncé « $\psi(\beta)$ est strictement positif » ne dépend pas de la distance δ .

4.2. β -convexité et formes de boules. La proposition suivante prouve le lien annoncée avec la β -convexité.

Proposition 7. Soit un réel β plus grand ou égal à deux. S'il existe une distance δ telle que $\psi(\beta)$ est strictement positif, alors le bord $\partial\Omega$ est β -convexe.

Démonstration : Lorsque la boule se rapproche du bord (figure 2), le « petit diamètre » a devient équivalent à Ky , où K est une constante et le « grand diamètre » b devient équivalent à $K'x$. Mais, par hypothèse, il existe C tel que $a \geq Cb^\nu$. Ceci implique l'existence d'un réel C' tel que $y \geq C'x^\nu$. C'est cette idée que nous essayons de rendre rigoureuse dans le reste de la démonstration.

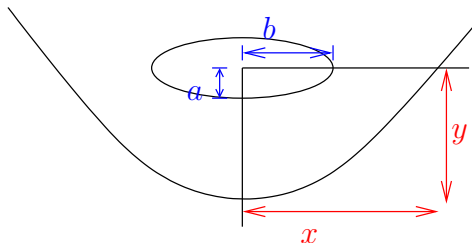


FIG. 2. Idée de la démonstration.

Nous chercherons à appliquer le point (2) de la définition des fonctions β -convexes (définition 5).

Plaçons nous d'abord dans un ouvert affine. Soit H un hyperplan de V tel que $\mathbb{P}(H) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, alors l'ouvert Ω s'identifie naturellement à un ouvert convexe relativement compact de H . Soit aussi $\|\cdot\|_H$ une norme euclidienne sur H , elle induit, par restriction, une distance sur $\overline{\Omega}$, qui sera notée δ' . D'après le lemme, $\psi'(\beta)$ est encore strictement positif.

Soit p_0 un point de $\partial\Omega$, il suffit de prouver la β -convexité dans un voisinage de p_0 (la propriété est locale). Il existe un voisinage U de p_0 dans l'espace tangent⁸ $T_{p_0}\partial\Omega$, un voisinage U' de p_0 dans l'orthogonal $T_{p_0}\partial\Omega^\perp \simeq \mathbb{R}$ et une fonction $f : U \rightarrow U'$ vérifiant

⁸A nouveau, l'espace tangent et son orthogonal sont considérés comme des sous-espaces affines de H .

- $U \times U'$ est un voisinage de p_0 dans H .
- $\partial\Omega \cap (U \times U') = \{ (x, f(x)) / x \in U \}$.

La fonction f est convexe car l'ouvert Ω est convexe. Elle est de classe \mathcal{C}^1 car le bord $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^1 .

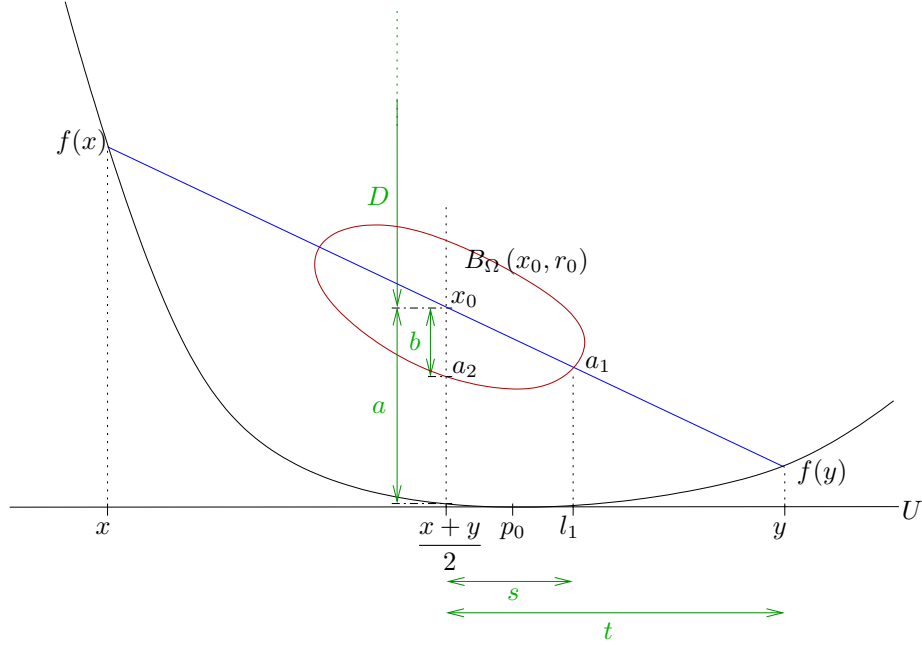


FIG. 3. β -convexité du bord

Soient x et y appartenant à U .

Notons x_0 le milieu de $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, a_1 un des points d'intersection du bord $\partial B_\Omega(x_0, r_0)$ (r_0 a été fixé précédemment) et de la droite passant par les deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, prenons, par exemple, pour a_1 le point le plus proche de y et notons a_2 le point du bord $\partial B_\Omega(x_0, r_0)$ d'abscisse $\frac{x+y}{2}$ et d'ordonnée minimale.

a, b, s, t et D sont des distances, indiquées sur la figure 3, D est la distance de x_0 au second point d'intersection de la verticale passant par x_0 avec le bord $\partial\Omega$.

Calculons $d_\Omega(x_0, a_1)$:

$$\begin{aligned} d_\Omega(x_0, a_1) &= \left| \log \left((x, f(x)), (y, f(y)); x_0, a_1 \right) \right| \\ &= \left| \log \left(x, y; \frac{x+y}{2}, l_1 \right) \right| \\ &= \left| \log \frac{t-s}{t} \frac{t}{t+s} \right| \\ r_0 &= -\log \frac{t-s}{t+s} \end{aligned}$$

La deuxième égalité vaut par l'invariance du birapport par projection. Ceci donne

$$t = s \frac{1 + e^{-r_0}}{1 - e^{-r_0}},$$

par ailleurs,

$$t = \frac{\|x - y\|_H}{2}.$$

Il existe donc une constante C_1 , indépendante de x et y , telle que

$$\|x - y\|_H^r = C_1 s^r$$

mais s est plus petit que $\|x_0 - a_1\|_H = \delta'(x_0, a_1)$. Nous obtenons

$$(I) \quad \|x - y\|_H^r \leq C_1 \delta'(x_0, a_1)^r.$$

Calculons également $d_\Omega(x_0, a_2)$:

$$d_\Omega(x_0, a_2) = \left| \log \frac{b + D}{D} \frac{a}{a - b} \right|$$

avec $a = \left| \frac{f(x) + f(y)}{2} - f\left(\frac{x + y}{2}\right) \right|.$

Après calcul, il vient :

$$a = b \frac{e^{r_0}}{e^{r_0} - 1 - \frac{b}{D}}.$$

Il est aussi facile de voir que la distance D , qui est une fonction continue du couple (x, y) appartenant à $U \times U$, est minorée uniformément sur $U \times U$. De même, nous pouvons supposer, quitte à restreindre U , que la distance b est majorée par une constante aussi petite que l'on veut. Il existe donc une constante C_2 strictement positive, indépendante de x et y , et telle que

$$\frac{e^{r_0}}{e^{r_0} - 1 - \frac{b}{D}} \geq C_2,$$

comme b est égal à $\delta'(x_0, a_2)$, ceci montre

$$(II) \quad \frac{f(x) + f(y)}{2} - f\left(\frac{x + y}{2}\right) \geq C_2 \delta'(x_0, a_2).$$

Des inégalités (I) et (II) se déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x - y\|_H^r} \left| \left(f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x + y}{2}\right) \right) \right| &\geq 2 \frac{C_2}{C_1} \frac{\delta'(x_0, a_2)}{\delta'(x_0, a_1)^r} \\ &\geq 2 \frac{C_2}{C_1} \phi'_r(x_0) \\ &\geq 2 \frac{C_2}{C_1} \psi'(\beta) = C \end{aligned}$$

et C est un réel strictement positif. Au final, pour tous x et y dans U , nous avons a

$$\left| f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x + y}{2}\right) \right| \geq C \|x - y\|^r$$

c'est-à-dire, la fonction f est β -convexe. \square

Remarques : On a aussi la proposition réciproque, *i.e.* la β -convexité implique que $\psi(\beta)$ est strictement positif, mais ce ne sera pas utile dans la suite.

5. ÉLÉMENTS (r, ε) -LOXODROMIQUES ET DISTANCE DE HILBERT

Le but de cette partie est de donner quelques propriétés des éléments loxodromiques. Ces propriétés nous serviront pour la démonstration du théorème 11. Nous commençons par rappeler les définitions d'éléments proximal et loxodromique.

5.1. Proximalité. Fixons sur V une structure euclidienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ est muni d'une distance δ_0 , associée à la norme $\|\cdot\|$ sur V ,

si x et y sont dans $\mathbb{P}(V)$,

$$\delta_0(x, y) := \inf \{ \|u - v\| / u \in x, v \in y \text{ et } \|u\| = \|v\| = 1 \}.$$

Soit g un élément de $\text{PGL}(V)$, g est dit proximal si g a une unique valeur propre de plus grand module. Cette valeur propre

La structure euclidienne sur V induit une structure euclidienne sur chaque V

où $T(w_1, \dots, w_{n+1})$ est la matrice issue du procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Cette application T est continue, donc l'image de F_r est un compact K_r .

Si g est un élément (r, ε) -loxodromique, alors, avec (v_i) ses vecteurs propres comme ci-dessus, le $(n+1)$ -uplets (v_1, \dots, v_{n+1}) appartient à F_r . Par conséquent la matrice $T(g)$ associée à g appartient à ce compact K_r . \square

De cette proposition, nous déduisons le corollaire :

Corollaire 9. *Soit $r > 0$. Il existe une constante $C_r > 0$ strictement positive et telle que, pour g appartenant à $\text{PGL}(V)$, si g est (r, ε) -loxodromique, alors*

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } \mathbb{P}(V), \quad \frac{1}{C_r} \delta_g(x, y) \leq \delta_0(x, y) \leq C_r \delta_g(x, y).$$

δ_g est la distance, associée à $\|\cdot\|_g$, introduite plus haut.

6. EGALITÉ DES RÉGULARITÉS HÖLDER

Nous démontrons maintenant le théorème annoncé dans la première partie (théorème 2). Il sera en fait corollaire du théorème 11 de cette partie.

Dans le reste de cette partie Ω désigne un ouvert strictement convexe divisible, et Γ le sous-groupe discret de $\text{PGL}(V)$ correspondant.

6.1. notations. Introduisons quelques notations relatives au groupe Γ .

Soit g appartenant à $\text{PGL}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ les valeurs propres de g classées par modules décroissants, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n+1}|$. Les logarithmes des modules de ces valeurs propres sont notés $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n+1}$.

– Si g est proximal, alors $l_1 > l_2$, et on pose

$$\beta_g := \frac{l_1 - l_{n+1}}{l_1 - l_2}.$$

– Si g^{-1} est proximal, *i.e.* quand $l_{n-1} > l_{n+1}$, on pose

$$\alpha_g := \frac{l_1 - l_{n+1}}{l_n - l_{n+1}}.$$

De plus, définissons

$$\beta_\Gamma := \sup_{g \in \Gamma, g \text{ proximal}} \beta_g \text{ et } \alpha_\Gamma := \inf_{g \in \Gamma, g^{-1} \text{ proximal}} \alpha_g.$$

Lorsque g appartient à $\Gamma - \{\text{id}\}$, on sait que g est proximal (proposition 5.1 de [5]), et de même g^{-1} , alors

$$\frac{1}{\alpha_{g^{-1}}} + \frac{1}{\beta_g} = 1.$$

Nous avons donc

$$(III) \quad \frac{1}{\alpha_\Gamma} + \frac{1}{\beta_\Gamma} = 1.$$

De même, nous avons $\alpha_{t_g} = \alpha_g$ et $\beta_{t_g} = \beta_g$, et donc

$$(IV) \quad \alpha_\Gamma = \alpha_{t_\Gamma} \text{ et } \beta_\Gamma = \beta_{t_\Gamma}.$$

6.2. Proximalité et régularité. Ces réels α_Γ et β_Γ sont liés avec la régularité du bord par les inégalités suivantes :

Proposition 10. (corollaire 5.3 de [5]) Avec les notations ci-dessus, nous avons les inégalités

$$1 < \alpha_\Omega \leq \alpha_\Gamma \leq 2 \leq \beta_\Gamma \leq \beta_\Omega < \infty.$$

Démonstration : Il faudrait faire le calcul. \square

Il reste démontrer que les inégalités dans cette proposition sont en fait des égalités (théorème 11), ce qui impliquera facilement le résultat voulu (corollaire 12) par les équations (IV).

Théorème 11. Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, divisé par le groupe Γ , alors

- (1) $\alpha_\Omega = \alpha_\Gamma$.
- (2) $\beta_\Omega = \beta_\Gamma$.

Et donc :

Corollaire 12. Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, alors on a les égalités suivantes :

$$\alpha_\Omega = \alpha_{\Omega^*}, \beta_\Omega = \beta_{\Omega^*} \text{ et } \frac{1}{\alpha_\Omega} + \frac{1}{\beta_\Omega} = 1.$$

Nous nous réduisons, en fait, à démontrer la proposition suivante.

Proposition 13. Soit β un réel supérieur ou égal à β_Γ , alors le bord $\partial\Omega$ est β -convexe.

Commençons par expliquer comment cette proposition implique le théorème et son corollaire. Le point (2) de ce théorème 11 est immédiat. Mais aussi, le bord $\partial\Omega$ est β_Ω -convexe, autrement dit la valeur limite est atteinte :

$$\beta_\Omega = \min \{ \beta \geq 2 / \partial\Omega \text{ est } \beta\text{-convexe} \}.$$

De plus, comme le groupe ${}^t\Gamma$ divise Ω^* (cf proposition 1), la proposition implique aussi $\beta_{\Omega^*} = \beta_{\iota\Gamma}$, mais on connaît l'égalité $\beta_{\iota\Gamma} = \beta_\Gamma$. Combiné avec l'égalité (III) et la relation $\frac{1}{\alpha_\Omega} + \frac{1}{\beta_{\Omega^*}} = 1$, nous en déduisons $\alpha_\Omega = \alpha_\Gamma$, c'est-à-dire l'égalité (1) du théorème 11, et aussi que le bord $\partial\Omega$ est α_Ω -Hölder. Les égalités du corollaire 12 suivent aussi facilement.

Démonstration de la proposition : On suppose que l'ouvert Ω n'est pas un ellipsoïde. Nous disposons du fait suivant :

- il existe $r \geq \varepsilon > 0$ et un compact K de Ω , pour lesquels :
- pour tout x dans Ω , il existe y dans K et g dans Γ , tels que
- g est (r, ε) -loxodromique et $x = g \cdot y$.

dont la démonstration est reportée (proposition 16).

Soit β plus grand que β_Γ , d'après la proposition 7, il suffit de démontrer que $\psi^0(\beta)$ est strictement positif, c'est-à-dire que la fonction ϕ_{β}^0 est minorée sur l'ouvert Ω .

Cette fonction est continue et donc minorée sur le compact K par un réel strictement positif c . Soit C_r la constante d'équivalence des distances, donnée

par le corollaire 9, et posons $D = C_r^{1+\alpha}$, alors, d'après le lemme 6, pour tous g (r, ε)-loxodromique et x_0 dans Ω

$$\frac{1}{D} \phi_{\cdot, \alpha}^g(x_0) \leq \phi_{\cdot, \alpha}^0(x_0) \leq D \phi_{\cdot, \alpha}^g(x_0),$$

et donc la fonction $\phi_{\cdot, \alpha}^g$ est minorée sur K par $\frac{c}{D}$ (δ_g est la distance, associée à g , introduite dans la partie 5).

Soit g (r, ε)-loxodromique, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ ses valeurs propres, v_1, \dots, v_{n+1} des vecteurs propres associés¹⁰, et l_1, \dots, l_{n+1} les logarithmes des modules des valeurs propres.

D'après la proposition 5.1 de [5], on sait que $x_g^+ = \mathbb{R}v_1$, l'élément attracteur de g dans $\mathbb{P}(V)$, appartient à $\partial\Omega$, de même $x_g^- = \mathbb{R}v_{n+1}$ est dans $\partial\Omega$ et l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en x_g^- est $\mathbb{P}(V_g)$ avec $V_g = \langle v_2, \dots, v_{n+1} \rangle$. Le bassin d'attraction de g est l'ouvert $B_g^+ = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(V_g)$ qui est naturellement muni d'une carte affine :

$$\begin{aligned} \varphi_g : V_g &\longrightarrow B_g^+ \\ v &\longmapsto [v_1 + v] \end{aligned}$$

L'action de g se lit facilement dans cette carte :

$$g_* v_i := \varphi_g^{-1} \circ g \circ \varphi_g(v_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i \text{ pour tout } i > 1.$$

L'espace vectoriel V est muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|'_g$ pour laquelle $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$ est une base orthonormée. De la formule ci-dessus, il vient immédiatement

$$\begin{aligned} \text{pour tout } v \text{ dans } V_g, \quad & \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} \right| \|v\|'_g \leq \|g_* v\|'_g \leq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| \|v\|'_g \\ \text{(V)} \quad & e^{l_{n+1}-l_1} \leq \frac{\|g_* v\|'_g}{\|v\|'_g} \leq e^{l_2-l_1} \end{aligned}$$

Cette norme induit une distance sur l'ouvert affine B_g^+ , que nous notons δ'_g . Elle n'induit pas une distance sur $\bar{\Omega}$, car l'intersection $\mathbb{P}(V_g) \cap \bar{\Omega} = \{x_g^-\}$ n'est pas vide, mais elle induit tout de même une distance sur Ω . On peut donc calculer $\phi_{\cdot, \alpha}^g$ mais le lemme 6 ne s'applique plus.

Avec cette distance δ'_g , les calculs se simplifient, pour y_0 dans Ω

$$\begin{aligned} \phi_{\cdot, \alpha}^g(g \cdot y_0) &= \inf \left\{ \frac{\delta'_g(g \cdot y_0, y)}{\delta'_g(g \cdot y_0, x)^{\alpha}} / x, y \in \partial B_{\Omega}(g \cdot y_0, r_0) \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\delta'_g(g \cdot y_0, g \cdot y)}{\delta'_g(g \cdot y_0, g \cdot x)^{\alpha}} / x, y \in \partial B_{\Omega}(y_0, r_0) \right\} \\ &= \inf \left\{ \|g_* (\psi \psi T f \psi \psi r \psi T d \psi T d \psi \psi T f \psi \psi T d g T d \text{ sur } T T f \psi \psi T d T \psi \psi \psi \psi \partial f \psi \psi) \| \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq e^{l_{n+1}-l_1} \left(e^{l_2-l_1} \right)^{-\beta} \inf \left\{ \frac{\|\varphi_g^{-1}(y_0) - \varphi_g^{-1}(y)\|'_g}{\|\varphi_g^{-1}(y_0) - \varphi_g^{-1}(x)\|'_g} / x, y \in \partial B_\Omega(y_0, r_0) \right\} \\
&\geq e^{(l_{n+1}-l_1)-\beta(l_2-l_1)} \phi'_{\beta, \beta} (y_0) \\
&\geq e^{(\beta-\beta_g)(l_1-l_2)} \phi'_{\beta, \beta} (y_0)
\end{aligned}$$

Donc comme $\beta \geq \beta_g$ alors $(\beta - \beta_g)(l_1 - l_2) \geq 0$, et nous obtenons l'inégalité suivante

$$(VI) \quad \phi'_{\beta, \beta} (g \cdot y_0) \geq \phi'_{\beta, \beta} (y_0)$$

Si y_0 appartient à K , il nous reste à comparer $\phi'_{\beta, \beta}(y_0)$ et $\phi^g(y_0)$ et de même avec $\phi'_{\beta, \beta}(g \cdot y_0)$ et $\phi^g(g \cdot y_0)$, lorsque l'élément g est (r, ε) -loxodromique. C'est ce que fait le lemme suivant :



fait

Lemme 15. Soit $\eta > 0$. Soit g un élément (r, ε) -loxodromique, on pose

$$B_g^{\eta} = \{x \in \mathbb{P}(V) / \delta_g(x, \mathbb{P}(V_g)) \geq \eta\}.$$

Il existe une constante $F > 0$ ne dépendant pas de g , pour laquelle les distances δ_g et δ'_g sont équivalents sur l'ensemble B_g^{η} :

$$\text{pour tous } x, y \in B_g^{\eta} \quad \frac{1}{F} \delta_g(x, y) \leq \delta'_g(x, y) \leq F \delta_g(x, y)$$

Démonstration de ce lemme : C'est complètement formel car les seules choses qui dépendent encore de g sont les notations ! \square

Le réel η est dorénavant fixé à e/C_r , alors pour tout y_0 dans K et tout g (r, ε) -loxodromique, la boule $B_\Omega(y_0, r_0)$ est incluse dans B_g^{η} .

La boule B_g^{η} est l'image par φ_g de la boule de $(V_g, \|\cdot\|'_g)$ centré en 0 et de rayon

$$R = \frac{2 - \eta^2}{\sqrt{4\eta^2 - \eta^4}}$$

(par un calcul). Comme l'action de g sur V_g est contractante, l'image par g de la boule $B_\Omega(y_0, r_0)$ est encore incluse dans l'ensemble B_g^{η} .

Donc sur les boules $B_\Omega(y_0, r_0)$ et $B_\Omega(g \cdot y_0, r_0)$ les distances δ_g et δ'_g sont équivalentes avec la constante F du lemme précédent, ce qui implique, avec $E = F^{1+\nu}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \phi'_{\nu'}(y_0) &\leq \phi''_{\nu'}(y_0) \leq E \phi'_{\nu'}(y_0) \quad \text{et} \\ \frac{1}{E} \phi'_{\nu'}(g \cdot y_0) &\leq \phi''_{\nu'}(g \cdot y_0) \leq E \phi'_{\nu'}(g \cdot y_0) \end{aligned}$$

Ce qui conclut pour le lemme. \square

Nous pouvons maintenant conclure : pour tout x_0 dans Ω , il existe y_0 dans K et g dans Γ (r, ε) -loxodromique tels que $x_0 = g \cdot y_0$, alors d'après les équations (VI) et (VII)

$$\begin{aligned} \phi''_{\nu'}(x_0) &\geq \frac{1}{D} \phi''_{\nu'}(x_0) \geq \frac{1}{DE} \phi'_{\nu'}(x_0) \\ &\geq \frac{1}{DE} \phi'_{\nu'}(y_0) \geq \frac{1}{(DE)^2} \phi''_{\nu'}(y_0) \\ &\geq \frac{c}{(DE)^2} \end{aligned}$$

donc $\psi''(\beta)$ est strictement positif et le bord $\partial\Omega$ est β -convexe, ce qui termine la démonstration de la proposition 13. \square

Pour être complet, il faut encore démontrer ce dernier fait laissé en suspend :

Proposition 16. Si l'ouvert Ω n'est pas un ellipsoïde, alors il existe des réels $r \geq \varepsilon > 0$ et un compact K de Ω tels que :

pour tout x_0 dans Ω , il existe y_0 dans K et g dans Γ , avec g (r, ε) -loxodromique et $x_0 = g \cdot y_0$.

Démonstration : D'après le théorème 3.6 de [3], le groupe Γ est Zariski-dense et contient donc un élément loxodromique. C'est alors une conséquence directe du théorème d'Abels-Margulis-Soifer [1] qu'il existe une partie finie F de Γ et $r \geq \varepsilon > 0$ pour lesquels on a la propriété :

pour tout g dans Γ , il existe h dans F tel que
 gh^{-1} est (r, ε) -loxodromique.

De plus, par hypothèse, il existe un compact K_0 de Ω tel que $\Omega = \Gamma \cdot K_0$. Le compact $K = F \cdot K_0$ vérifie les conclusions de la proposition. \square

RÉFÉRENCES

- [1] H. Abels, G. A. Margulis, and G. A. Soifer. Semigroups containing proximal linear maps. *Israel J. Math.*, 91 :1–30, 1995.
- [2] Yves Benoist. Sous-groupes discrets des groupes de lie. Cours photocopié, 1997.
- [3] Yves Benoist. Automorphismes des cônes convexes. *Invent. Math.*, 141 :149–193, 2000.
- [4] Yves Benoist. Convexes divisibles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332 :387–390, 2001.
- [5] Yves Benoist. Convexes divisibles I. pre-print, 2001.
- [6] R. D. Canary, D. B. A. Epstein, and P. Green. Notes on notes of Thurston. In *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)*, pages 3–92. Cambridge Univ. Press, 1987.
- [7] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [8] N. H. Kuiper. On convex locally-projective spaces. In *Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Italia, 195*, pages 200–213. Edizioni Cremonese, Roma, 1954.
- [9] Atle Selberg. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. In *Contributions to function theory (internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, pages 147–164. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.