

UNE DUALITÉ POUR LES COURBES HYPERCONVEXES

OLIVIER GUICHARD

RÉSUMÉ. Une courbe hyperconvexe est une courbe ξ_1 de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que n points distincts de la courbe sont en position générale. Sous l'hypothèse supplémentaire qu'il existe une courbe continue $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ de drapeaux osculateurs à la courbe ξ_1 , nous prouvons que la courbe duale ξ_{n-1} vérifie les mêmes propriétés, c'est-à-dire ξ_{n-1} est aussi hyperconvexe et admet une courbe de drapeaux osculateurs.

ABSTRACT. An hyperconvex curve is a curve ξ_1 in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ such that any n distinct points of the curve are in direct sum. We give here a property of duality of those curves when they admit furthermore an osculating flag. Namely if $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ is a continuous curve of osculating flags of an hyperconvex curve ξ_1 , we prove that the curve ξ_{n-1} is hyperconvex too and admit a curve of osculating flags.

Table des matières

1. Introduction	1
2. Motivations	3
3. Orientations	4
3.1. Orientation des sommes	4
3.2. Orientation des intersections	4
3.3. Grassmanniennes	5
3.4. Variété drapeau	5
4. Courbe Frenet	6
5. Orientation des courbes Frenet	7
5.1. Relèvement des courbes Frenet	7
5.2. Courbes Frenet orientées	8
5.3. Récurrence	10
5.4. Limites	12
6. Généralisations	15
7. Drapeaux orientés	16
7.1. Un lemme matriciel	16
7.2. Le lemme sur les drapeaux	19
Références	20

1. Introduction

Rappelons d'abord les définitions de l'article de F. Labourie [2], V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Définition 1. Une application ξ_1 d'un ensemble X dans $\mathbb{P}(V)$ est dite hyperconvexe si pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) de points de X deux à deux distincts, les droites $(\xi_1(x_i))_{i=1, \dots, n}$ sont en somme directe.

On dira *courbe* hyperconvexe lorsque l'ensemble de définition X est un intervalle ou le cercle S^1 .

Une première remarque est qu'en dimension 3, une courbe hyperconvexe et continue est automatiquement strictement convexe. Réciproquement une courbe strictement convexe en dimension 3 est hyperconvexe. Cette notion de courbe hyperconvexe apparaît ainsi comme une généralisation de la notion de convexité.

On considèrera aussi des courbes à valeurs dans la variété drapeau $\mathbb{P}(V)$:

Définition 2. Une application $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ d'un espace topologique X dans la variété des drapeaux complets de V est dite Frenet si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Les sommes sont en position générale :
pour tout k -uplet d'entiers (m_1, \dots, m_k) tel que $n = m_1 + \dots + m_k$ et pour tout k -uplet (x_1, \dots, x_k) de points de X deux à deux distincts, la somme suivante est directe :

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \xi_{m_i}(x_i).$$

- Compatibilité avec les limites :
pour tout k -uplet d'entiers (m_1, \dots, m_k) tel que $m = m_1 + \dots + m_k \leq n$ et pour tout x dans X , on a la limite :

$$\lim_{(x_1, \dots, x_k) \rightarrow x} \bigoplus_{i=1}^k \xi_{m_i}(x_i) = \xi_m(x).$$

la limite étant prise sur les k -uplets d'éléments deux à deux distincts.

De même on dira *courbe* Frenet si l'espace X est un intervalle de \mathbb{R} ou le cercle S^1 . Par convention, si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ est une application dans $\text{Drap}(V)$, on posera $\xi_0 = \{0\}$ et $\xi_n = V$.

Exemples :

- Si Ω est un ouvert du plan projectif, strictement convexe, saillant, et dont le bord $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^1 , alors dans ce cas le bord $\partial\Omega$ est une courbe hyperconvexe \mathcal{C}^1 qui provient naturellement de la courbe Frenet qui a un point x du bord associe $(x, T_x\partial\Omega)$.
- Plongement de Veronese. L'espace des polynômes homogènes de degré k en deux variables est noté $\mathbb{R}_k[X, Y]$, alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{R}_1[X, Y]) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_n[X, Y]) \\ [\lambda X + \mu Y] &\rightarrow [(\lambda X + \mu Y)^n] \end{aligned}$$

est une courbe hyperconvexe et provient aussi d'une courbe Frenet qui est définie avec les dérivées de cette application.

On remarque aussi immédiatement que si ξ est une courbe Frenet alors la courbe ξ_1 est de classe \mathcal{C}^1 . La courbe ξ_1 n'a en général aucune raison d'être \mathcal{C}^2 (voir par exemple les résultats de rigidité sur le bord des ouverts convexes [1]). La courbe ξ_1 est aussi hyperconvexe et l'application ξ est le drapeau

osculateur de ξ_1 , aussi la courbe Frenet ξ est entièrement déterminée par la donnée de ξ_1 . La proposition suivante donne une caractérisation un peu plus précise :

Proposition 1. *Soit I un intervalle, si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ est une courbe continue de I dans $\text{Drap}(V)$ telle que ξ_1 est hyperconvexe et telle que pour tout k et pour tout x :*

$$\lim_{(x_1, \dots, x_k) \rightarrow x} \bigoplus_{i=1}^k \xi_1(x_i) = \xi_k(x)$$

la limite étant prise sur les k -uplets d'éléments deux à deux distincts, alors la courbe ξ est Frenet.

Cette caractérisation n'est pas tout à fait immédiate, elle peut s'obtenir en utilisant le lemme 5.1 de [2], nous expliquerons aussi plus tard comment la montrer.

Définition 3. *L'espace vectoriel dual de V est noté V^* , si E est un sous-espace vectoriel de V , on note par E^\perp son orthogonal dans V^* :*

$$E^\perp := \{f \in V^* / f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Le but de ce texte est de montrer que la courbe duale d'une courbe Frenet est aussi Frenet :

Théorème 2. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} ou le cercle S^1 et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ une courbe Frenet de I dans $\text{Drap}(V)$. La courbe duale $\xi^\perp := (\xi_{n-1}^\perp, \dots, \xi_1^\perp)$ de I dans $\text{Drap}(V^*)$ est alors une courbe Frenet.*

Exemples :

- Si ξ est la courbe Frenet définie par le bord d'un ouvert Ω du plan projectif, alors la courbe ξ^\perp est la courbe définie par le bord de l'ouvert dual Ω^* , et l'on sait que ξ^\perp est Frenet.
- La courbe duale du plongement de Veronese est aussi un plongement de Veronese et est donc Frenet.

La démonstration du théorème 2 consiste à démontrer un théorème analogue pour les courbes Frenet orientées et de montrer que toute courbe Frenet se relève en une telle courbe orientée.

2. Motivations

Les courbes hyperconvexes apparaissent comme ensembles limites dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ de groupes de surfaces plongés dans le groupe $\text{PSL}(\mathbb{R}^n)$.

Soit Γ un groupe de surface, c'est-à-dire le groupe fondamental d'une surface compacte de genre supérieur à deux. Le bord de Γ est homéomorphe au cercle S^1 . On peut aussi fixer une uniformisation de la surface, ce qui correspond à fixer une injection ι de Γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Soit ρ_0 la composée de cette injection avec le morphisme de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans $\text{PSL}_n(\mathbb{R})$ provenant de la représentation irréductible de degré n . Dans [2], F. Labourie prouve le résultat suivant :

Théorème 3. *Si ρ une représentation du groupe Γ dans $\text{PSL}_n(\mathbb{R})$, qui peut se déformer continûment en la représentation ρ_0 , alors il existe une unique application ξ_1 de $\partial\Gamma$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ qui est ρ -équivariante et ξ_1 est une courbe hyperconvexe.*

La courbe hyperconvexe associée à la représentation ρ_0 est le plongement de Veronese.

Si ξ_1 est une courbe limite de $\partial\Gamma$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, comme dans le théorème précédent, alors c'est aussi un résultat de [2] que ξ_1 provient d'une courbe Frenet.

Le théorème de dualité est bien évidemment vrai pour les courbes Frenet qui sont des courbes limites de groupes de surfaces. Cependant je ne connais pas de démonstration directe dans ce cas particulier.

Dans la suite de ce texte, on étudiera les courbes hyperconvexes et Frenet indépendamment de toutes représentations.

3. Orientations

On précise dans cette partie les conventions sur les orientations d'espaces vectoriels qui seront utilisées dans la suite.

Si E est un espace vectoriel (de dimension finie), une orientation sur E est le choix d'une classe d'équivalence de bases de E , où deux bases sont équivalentes si la matrice de passage est de déterminant positif. Une base de la classe d'équivalence définissant l'orientation est appelée *directe*. Une base de l'autre classe d'équivalence est dite *indirecte*.

Un espace vectoriel E orienté pourra être noté E^+ ou E^{+1} . Le même espace vectoriel muni de l'orientation opposée, c'est-à-dire définie par l'autre classe d'équivalence de bases de E , est noté E^{-1} .

3.1. Orientation des sommes. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de V en somme directe. Si E et F sont orientés alors (par convention) l'espace vectoriel $E \oplus F$ est orienté par la base constituée d'une base directe de E suivie d'une base directe de F . Il est évident que ceci définit une orientation de $E \oplus F$ qui ne dépend que des orientations de E et de F et non des bases directes choisies. Du point de vue des orientations, on a l'égalité $F \oplus E = (E \oplus F)^{(-1)^{\dim E \times \dim F}}$.

Si V et E sont orientés et F est un supplémentaire de E dans V , alors il n'y a qu'une seule manière d'orienter F pour avoir $V = E \oplus F$.

Il est aussi clair que si E , F et G sont en somme directe et sont orientés alors

$$(E \oplus F) \oplus G = E \oplus (F \oplus G)$$

et ceci permet de donner une orientation univoque aux sommes du type $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$.

3.2. Orientation des intersections. Si E et F sont deux sous-espaces vectoriels orientés de V orienté, avec $V = E + F$, alors il existe une orientation sur $E \cap F$ telle que l'égalité suivante (entre espaces vectoriels orientés) est vérifiée :

$$V = E' \oplus E \cap F \oplus F'$$

où E' est un supplémentaire de $E \cap F$ dans E , muni de l'orientation pour laquelle l'égalité $V = E' \oplus F$ est vérifiée et de même F' est un supplémentaire de $E \cap F$ dans F , orienté avec $V = E \oplus F'$. L'orientation sur $E \cap F$ ne dépend pas des supplémentaires E' et F' . On a également l'égalité entre espaces vectoriels orientés, $F \cap E = (E \cap F)^{(-1)^{\text{codim} E \times \text{codim} F}}$.

Si E_1, \dots, E_k sont des espaces vectoriels orientés vérifiant que la codimension de l'intersection $\cap E_i$ est égale à la somme des codimensions¹ des E_i , alors $E_1 \cap \dots \cap E_k$ est aussi orienté.

3.3. Grassmanniennes. La grassmannienne des k -plans de l'espace vectoriel V est notée $\text{Gr}_k(V)$, elle est naturellement munie d'une action du groupe $\text{GL}(V)$ qui en fait un espace homogène. La grassmannienne $\text{Gr}_k(V)$ est munie de la topologie quotient. En particulier $\text{Gr}_1(V) = \mathbb{P}(V)$.

C'est un espace compact et il est facile de le munir d'une métrique. Par exemple étant donnée une norme sur V , la distance entre E_1 et E_2 appartenant à $\text{Gr}_k(V)$ peut être définie comme la distance de Hausdorff entre les sphères unité de E_1 et de E_2 .

De manière analogue on définit la grassmannienne $\text{Gr}_k^+(V)$ des k -plans orientés de V , qui est aussi un espace homogène sous l'action de $\text{GL}(V)$ et est compact. La projection naturelle :

$$k : \text{Gr}_k^+(V) \rightarrow \text{Gr}_k(V)$$

fait de $\text{Gr}_k^+(V)$ un revêtement d'ordre 2 sur la base $\text{Gr}_k(V)$.

Nous utiliserons le lemme suivant, qui est un lemme facile sur les revêtements :

Lemme 4. *Soit ξ_k est une application continue d'un espace simplement connexe X dans $\text{Gr}_k(V)$. Il existe toujours une application continue² de X dans $\text{Gr}_k^+(V)$ relevant ξ_k .*

De plus on peut prolonger un relèvement s'il est déjà défini sur un ensemble connexe :

si l'application continue ξ_k^+ de F dans $\text{Gr}_k^+(V)$ relève ξ_k , i.e. :

$$k \circ \xi_k^+ = \xi_k|_F,$$

avec F connexe, alors l'application ξ_k^+ se prolonge en une unique application continue de X dans $\text{Gr}_k^+(V)$, notée encore ξ_k^+ et telle que $k \circ \xi_k^+ = \xi_k$.

Nous utiliserons aussi le fait que si $\lim_{q \rightarrow \infty} E^q = E$ dans $\text{Gr}_k^+(V)$, alors pour toute base directe (u_1, \dots, u_k) de E , il existe, pour tout q , une base directe (u_1^q, \dots, u_k^q) de E^q , telles que $\lim_{q \rightarrow \infty} (u_1^q, \dots, u_k^q) = (u_1, \dots, u_k)$.

3.4. Variété drapeau. La variété drapeau $\text{Drap}(V)$ est l'ensemble des drapeaux complets de V :

$$\text{Drap}(V) = \{E_1 \subset \dots \subset E_{n-1} \text{ avec } \dim(E_i) = i\}.$$

La variété $\text{Drap}(V)$ peut alors se réaliser comme un sous-ensemble du produit $\text{Gr}_1(V) \times \dots \times \text{Gr}_{n-1}(V)$, et on la munit de la topologie induite. L'action continue de $\text{GL}(V)$ sur $\text{Drap}(V)$ en fait encore un espace homogène compact.

De même la variété $\text{Drap}^+(V)$ des drapeaux orientés de V est incluse dans le produit $\text{Gr}_1^+(V) \times \dots \times \text{Gr}_{n-1}^+(V)$, la projection naturelle

$$: \text{Drap}^+(V) \rightarrow \text{Drap}(V)$$

en fait un revêtement de base $\text{Drap}(V)$ et d'ordre 2^{n-1} . Le lemme 4 est aussi vrai dans le cas de ce revêtement.

¹cette condition équivaut à ce que la somme $E_1^\perp + \dots + E_k^\perp$ est directe dans V^* .

²Comme le revêtement est d'ordre 2, on sait qu'il existe exactement deux relèvements.

4. Courbe Frenet

Venons-en au cœur de ce qui nous concerne, montrer que la courbe duale d'une courbe Frenet est aussi Frenet. V est un espace vectoriel de dimension n .

Théorème 5. *Si I est un intervalle de \mathbb{R} ou le cercle S^1 et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ une courbe Frenet. La courbe duale $\xi^\perp = (\xi_{n-1}^\perp, \dots, \xi_1^\perp)$ de I dans $\text{Drap}(V^*)$ est alors Frenet.*

Le théorème pour I un intervalle de \mathbb{R} implique facilement le théorème pour les courbes Frenet de S^1 dans $\text{Drap}(V)$; il suffit de considérer la restriction d'une telle courbe au complémentaire d'un point dans S^1 , $S^1 - \{x\} \simeq \mathbb{R}$.

Nous commençons d'abord par traduire en terme d'intersections la définition de Frenet. Le lemme suivant est immédiat, en utilisant simplement que $E^\perp + F^\perp = (E \cap F)^\perp$.

Lemme 6. *Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ une application d'un espace topologique X dans $\text{Drap}(V)$. L'application duale $\xi^\perp = (\xi_{n-1}^\perp, \dots, \xi_1^\perp)$ est Frenet si et seulement si les deux points suivants sont vérifiés :*

- Les intersections sont en position générale :
pour tout k -uplet d'entiers (m_1, \dots, m_k) tel que $n = m_1 + \dots + m_k$ et pour tout k -uplet (x_1, \dots, x_k) d'éléments de X deux à deux distincts, l'intersection suivante est triviale :

$$\bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}(x_i) = \{0\}.$$

- Compatibilité avec les limites :
pour tout k -uplet (m_1, \dots, m_k) tel que $m = m_1 + \dots + m_k \leq n$ et pour tout x dans X , on a la limite :

$$\lim_{(x_1, \dots, x_k) \rightarrow x} \bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}(x_i) = \xi_{n-m}(x)$$

la limite étant prise sur les k -uplets d'éléments deux à deux distincts.

Le théorème 5 sera alors conséquence de la proposition suivante qui précise la position des intersections et des sommes pour une courbe Frenet.

Proposition 7. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ une courbe Frenet de I dans $\text{Drap}(V)$ alors :*

- Les sommes et les intersections sont en position générale :
pour tout k -uplet (m_1, \dots, m_k) et pour tout l -uplet (p_1, \dots, p_l) tels que $m_1 + \dots + m_k = p_1 + \dots + p_l \leq n$, si (x_1, \dots, x_k) et (y_1, \dots, y_l) sont des points de I tels que, pour un indice g :

$$y_1 < \dots < y_g < x_1 < \dots < x_k < y_{g+1} < \dots < y_l$$

alors la somme suivante est directe :

$$\bigoplus_{j=1}^l \xi_{p_j}(y_j) \oplus \bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}(x_i) = V.$$

- Compatibilité avec les limites :
pour tout k -uplet (m_1, \dots, m_k) et l -uplet (p_1, \dots, p_l) tels que $p = p_1 + \dots + p_l \leq m = m_1 + \dots + m_k \leq n$, et pour tout x dans I :

$$\lim_{((x_i), (y_j)) \rightarrow x} \bigoplus_{j=1}^l \xi_{p_j}(y_j) \oplus \bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}(x_i) = \xi_{n-m+p}(x)$$

la limite étant prise sur les $(k+l)$ -uplets vérifiant $y_1 < \dots < y_g < x_1 < \dots < x_k < y_{g+1} < \dots < y_l$.

Remarques : Dans cette proposition, les hypothèses sur l'ordre des x_i et des y_j sont indispensables. En effet, comme l'illustre la figure suivante pour une courbe hyperconvexe dans le plan projectif, avec $y_1 < x_1 < y_2 < x_2$, la conclusion sur les sommes directes est mise en défaut.

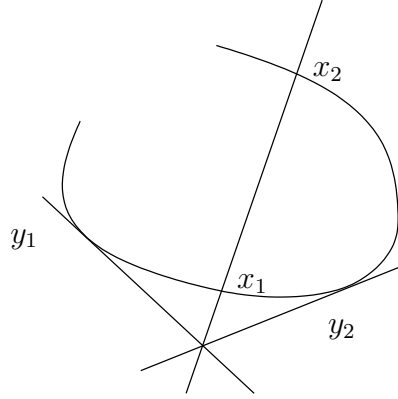


Fig. 1. Contre-exemple, le 2-plan $\xi_1(x_1) \oplus \xi_1(x_2)$ contient l'intersection $\xi_2(y_1) \cap \xi_2(y_2)$.

La proposition 7 sera démontrée dans la partie suivante.

5. Orientation des courbes Frenet

Dans cette partie, nous verrons que si ξ est une courbe Frenet définie sur un intervalle I , alors il est possible d'orienter V et les ξ_i de manière compatible avec les conditions de la définition Frenet (définition 2). Nous montrerons ensuite l'analogie de la proposition 7 pour les orientations.

5.1. Relèvement des courbes Frenet.

Proposition 8. Soit I un intervalle et ξ une courbe Frenet de I dans $\text{Drap}(V)$. L'application ξ se relève en une application continue ξ^+ de I dans $\text{Drap}^+(V)$ et telle que les orientations définies vérifient les points supplémentaires suivant :

- Les sommes sont compatibles aux orientations :
il existe une orientation sur V pour laquelle si $m_1 + \dots + m_k = n$ et si $x_1 < \dots < x_k$, alors on a l'égalité entre espaces vectoriels orientés :

$$V = \xi_{m_1}^+(x_1) \oplus \dots \oplus \xi_{m_k}^+(x_k).$$

- Les limites sont des limites d'espaces orientés :
si $m = m_1 + \dots + m_k \leq n$ et si x appartient à I , alors on a la limite suivante dans $\text{Gr}_m^+(V)$.

$$\lim_{x_1 < \dots < x_k \rightarrow x} \xi_{m_1}^+(x_1) \oplus \dots \oplus \xi_{m_k}^+(x_k) = \xi_m^+(x).$$

Démonstration : Comme I est simplement connexe, il est possible de relever la courbe ξ_1 en une application continue ξ_1^+ de I dans $\text{Gr}_1^+(V)$.

Par les conventions de la partie 3, si $x_1 < \dots < x_n$ sont n points de I , alors les espaces suivants sont orientés :

$$\xi_1(x_1) \oplus \dots \oplus \xi_1(x_k)$$

k variant entre 1 et n , et ces orientations varient continûment en fonction de $x_1 < \dots < x_n$. Pour k valant n , ceci prouve que l'orientation définie ainsi sur V ne dépend pas du choix de $x_1 < \dots < x_n$.

Soit k compris entre 1 et $n - 1$, le lemme 4 implique que l'on peut relever ξ_k en utilisant ces sommes. Plus précisément, soit X le sous-ensemble de I^k constitué des (x_1, \dots, x_k) tels que $x_1 < \dots < x_k$ ou $x_1 = \dots = x_k$, comme la courbe est Frenet, l'application suivante est continue :

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \text{Gr}_k(V) \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^k \xi_1(x_i) & \text{si } x_1 < \dots < x_k \\ \xi_k(x_1) & \text{si } x_1 = \dots = x_k \end{cases} \end{aligned}$$

et par ce qu'on vient de dire, elle se relève dans $\text{Gr}_k^+(V)$ sur le sous-ensemble $F = \{x_1 < \dots < x_k\}$, le lemme 4 prouve alors que ce relèvement se prolonge à X et par restriction à $\{x_1 = \dots = x_k\}$ on obtient un relèvement ξ_k^+ de ξ_k .

L'orientation de ξ_1 permet donc de définir les orientations sur V et sur les ξ_k . Les deux propriétés voulues sont alors immédiates par continuité. \square

Ici, la contractibilité de I est essentielle pour cette proposition, cette dernière n'est pas toujours vraie pour des courbes Frenet définies sur S^1 .

Définition 4. Une application d'un intervalle I dans la variété des drapeaux orientés $\text{Drap}^+(V)$ et qui vérifie les conditions de la proposition 8 sera appelée courbe Frenet orientée.

La proposition s'interprète donc en disant que toute courbe Frenet de I dans $\text{Drap}(V)$ se relève en une courbe Frenet orientée de I dans $\text{Drap}^+(V)$. La démonstration de la proposition 8 montre aussi qu'il existe exactement deux tels relèvements.

5.2. Courbes Frenet orientées. Le reste de cette partie sera consacrée à exprimer et à démontrer l'équivalent de la proposition 7 pour les courbes Frenet orientées.

Proposition 9. Soit $\xi^+ = (\xi_1^+, \dots, \xi_{n-1}^+)$ une courbe Frenet orientée d'un intervalle I dans $\text{Drap}^+(V)$. Alors

(1) Les intersections sont en position générale :

pour tout k , pour tout k -uplet (m_1, \dots, m_k) tel que $n = m_1 + \dots + m_k$ et pour tout k -uplet (x_1, \dots, x_k) de points de I deux à deux distincts, l'intersection suivante est triviale :

$$\bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) = \{0\}.$$

(2) Les intersections sont orientées :

pour tout k -uplet (m_1, \dots, m_k) tel que $m = m_1 + \dots + m_k \leq n$ et pour tous $x_1 < \dots < x_k$ points de I , l'espace vectoriel suivant :

$$\xi_{n-m_1}^+(x_1) \cap \cdots \cap \xi_{n-m_k}^+(x_k)$$

de dimension $n - m$ est canoniquement orienté avec les conventions de la partie 3. Cette orientation varie continûment en fonction de $x_1 < \cdots < x_k$.

(3) Sommes directes :

pour tout (m_1, \dots, m_k) et pour tout (p_1, \dots, p_l) tels que $p_1 + \cdots + p_l = m_1 + \cdots + m_k \leq n$, si (x_1, \dots, x_k) et (y_1, \dots, y_l) sont des points de I vérifiant :

$$\text{pour un certain indice } g, \\ y_1 < \cdots < y_g < x_1 < \cdots < x_k < y_{g+1} < \cdots < y_l$$

alors on a l'égalité entre espaces orientés :

$$V = \xi_{p_1}^+(y_1) \oplus \cdots \oplus \xi_{p_g}^+(y_g) \\ \oplus \left(\xi_{n-m_1}^+(x_1) \cap \cdots \cap \xi_{n-m_k}^+(x_k) \right) \\ \oplus \xi_{p_{g+1}}^+(y_{g+1}) \oplus \cdots \oplus \xi_{p_l}^+(y_l).$$

(4) Limites :

pour tout (m_1, \dots, m_k) et pour tout (p_1, \dots, p_l) tels que $p = p_1 + \cdots + p_l \leq m = m_1 + \cdots + m_k \leq n$, on a la limite suivante d'espaces orientés :

$$\lim_{((x_i), (y_j)) \rightarrow x} \bigoplus_{j=1}^g \xi_{p_j}^+(y_j) \oplus \bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) \oplus \bigoplus_{j=g+1}^l \xi_{p_j}^+(y_j) = \xi_{n-m+p}^+(x)$$

la limite étant prise sur les $(k+l)$ -uplets vérifiant $y_1 < \cdots < y_g < x_1 < \cdots < x_k < y_{g+1} < \cdots < y_l$.

Démonstration : On va d'abord démontrer les points 1, 2 et 3 par récurrence sur l'entier k . Les points 1 et 2 se règlent facilement, nous aurons besoin d'un lemme intermédiaire sur les drapeaux (lemme 10) pour montrer le point 3. Pour faciliter la lecture les démonstrations seront d'abord faites pour $k = 2$ avant de faire la récurrence générale.

Ensuite, il faudra montrer comment le point 3 implique 4. \square

Démonstration du point 1 de la proposition 9 avec $k = 2$: Soit $x_1 < x_2$ et m_1, m_2 avec $n = m_1 + m_2$ il faut montrer que l'intersection suivante est triviale :

$$\xi_{n-m_1}(x_1) \cap \xi_{n-m_2}(x_2)$$

mais c'est immédiat car par hypothèse, la somme suivante est directe :

$$\xi_{n-m_1}(x_1) \oplus \xi_{n-m_2}(x_2) = V$$

ayant $(n - m_1) + (n - m_2) = n$. \square

Démonstration du point 2 de la proposition 9 avec $k = 2$: Soient $x_1 < x_2$ deux points de I et m_1, m_2 tels que $m_1 + m_2 \leq n$, d'après le point 1, on sait que $V = \xi_{n-m_1}(x_1) + \xi_{n-m_2}(x_2)$. Ceci implique que l'intersection $\xi_{n-m_1}(x_1) \cap \xi_{n-m_2}(x_2)$ est de dimension $n - m_1 - m_2$ et on oriente cette intersection avec les conventions de la partie 3. Il est clair que cette orientation est continue en fonction de $x_1 < x_2$. \square

Démonstration du point 3 de la proposition 9 avec $k = 2$: Soient $x_1 < x_2$ deux points de I . Soient aussi $m = p_1 + \dots + p_l \leq n$ et (y_1, \dots, y_l) des points de I , tels que

$$y_1 < \dots < y_g < x_1 < x_2 < y_{g+1} < \dots < y_l.$$

On veut montrer que si $m_1 + m_2 = m$ alors

$$V = \bigoplus_{i=1}^g \xi_{p_i}^+(y_i) \oplus \left(\xi_{n-m_1}^+(x_1) \cap \xi_{n-m_2}^+(x_2) \right) \oplus \bigoplus_{i=g+1}^l \xi_{p_i}^+(y_i).$$

Par hypothèse, on connaît, pour tout $m'_1 + \dots + m'_l + n'_2 = n'_1$, l'égalité entre espaces vectoriels orientés :

$$(*) \quad V = \bigoplus_{i=1}^g \xi_{m'_i}^+(y_i) \oplus \xi_{n-n'_1}^+(x_1) \oplus \xi_{n'_2}^+(x_2) \oplus \bigoplus_{i=g+1}^l \xi_{m'_i}^+(y_i).$$

Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 10. Soient $E_1^+ \subset \dots \subset E_{n-1}^+$ et $F_1^+ \subset \dots \subset F_{n-1}^+$ deux drapeaux orientés, tels qu'il existe une orientation sur V pour laquelle :

$$\text{pour tout } i, E_i^+ \oplus F_{n-i}^+ = V.$$

On suppose qu'il existe aussi deux drapeaux orientés (incomplets) $G_1^+ \subset \dots \subset G_p^+$, avec $\dim G_s^+ = s$, et $H_1^+ \subset \dots \subset H_q^+$, avec $\dim H_t^+ = t$, tels que :

$$\text{si } s + i + j + t = n, G_s^+ \oplus E_i^+ \oplus F_j^+ \oplus H_t^+ = V,$$

alors, avec les conventions d'orientation de la partie 3, on a les égalités suivantes entre espaces vectoriels orientés :

$$\text{si } s + t = i + j \leq n, G_s^+ \oplus \left(E_{n-i}^+ \cap F_{n-j}^+ \right) \oplus H_t^+ = V.$$

La démonstration de ce lemme est reportée à la partie 7, voyons comment l'appliquer.

Avec les notations du lemme, les drapeaux (E_i^+) et (F_i^+) sont respectivement les drapeaux $(\xi_i^+(x_1))$ et $(\xi_i^+(x_2))$. Posons $p = p_1 + \dots + p_g$ et $q = p_{g+1} + \dots + p_l$, alors le drapeau $(G_s^+)_{s=1, \dots, p}$ est :

$$\xi_1^+(y_1) \subset \dots \subset \xi_{p_1}^+(y_1) \subset \left(\xi_{p_1}^+(y_1) \oplus \xi_1^+(y_2) \right) \subset \dots \subset \bigoplus_{i=1}^g \xi_{p_i}^+(y_i),$$

et le drapeau $(H_t^+)_{t=1, \dots, q}$ est

$$\xi_1^+(y_{g+1}) \subset \dots \subset \xi_{p_{g+1}}^+(y_{g+1}) \subset \dots \subset \bigoplus_{i=g+1}^l \xi_{p_i}^+(y_i).$$

Les hypothèses du lemme 10 sont alors bien vérifiées d'après l'équation (*). Ceci conclut les trois premiers points de la démonstration de la proposition 9 pour $k = 2$. \square

5.3. Récurrence. On se propose maintenant de montrer les trois premiers points de la proposition 9 par récurrence. Dans cette partie nous supposons donc que 1, 2 et 3 sont vrais pour un entier

Démonstration du point 1 de la proposition 9 au rang $k + 1$:
Soient $x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}$ des éléments de I et (m_1, \dots, m_{k+1}) tel que $m_1 + \dots + m_k + m_{k+1} = n$, il faut montrer que

$$\left(\bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) \right) \cap \xi_{n-m_{k+1}}^+(x_{k+1}) = \{0\},$$

or comme $n - m_{k+1} = m_1 + \dots + m_k$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence avec le point 3 en posant $y_1 = x_{k+1}$ et $p_1 = n - m_{k+1}$

$$\left(\bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) \right) \oplus \xi_{n-m_{k+1}}^+(x_{k+1}) = V.$$

ce qui permet de conclure pour l'intersection. \square

Démonstration du point 2 de la proposition 9 au rang $k + 1$:
Soient $x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}$ et $m_1 + \dots + m_{k+1} \leq n$, d'après le point 1 la somme suivante vaut V :

$$\bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) + \xi_{n-m_{k+1}}^+(x_{k+1}) = V.$$

ceci permet d'orienter l'intersection

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} \xi_{n-m_i}^+(x_i)$$

et cette orientation dépend continûment des (x_i) . \square

Démonstration du point 3 de la proposition 9 au rang $k + 1$:
Soient $x_1 < \dots < x_{k+1}$ et $y_1 < \dots < y_l$, on suppose que pour un indice g , on a $y_g < x_1$ et $x_{k+1} < y_{g+1}$.

Si $m_1 + \dots + m_{k+1} = p_1 + \dots + p_l \leq n$, on veut démontrer l'égalité :

$$V = \bigoplus_{j=1}^g \xi_{p_j}^+(y_j) \oplus \left(\bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) \cap \xi_{n-m_{k+1}}^+(x_{k+1}) \right) \oplus \bigoplus_{j=g+1}^l \xi_{p_j}^+(y_j).$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que si $m'_1 + \dots + m'_l + n'_{k+1} = n'_1 + \dots + n'_k \leq n$, alors

$$(**) \quad V = \bigoplus_{j=1}^g \xi_{m'_j}^+(y_j) \oplus \bigcap_{i=1}^k \xi_{n-n'_i}^+(x_i) \oplus \xi_{n'_{k+1}}^+(x_{k+1}) \oplus \bigoplus_{j=g+1}^l \xi_{m'_j}^+(y_j).$$

On va appliquer le lemme 10, avec les notations de ce lemme le drapeau (E_i^+) est construit avec y_1, \dots, y_k et est le suivant, dans l'ordre décroissant :

$$\begin{aligned} \xi_{n-1}^+(x_k) \supset \dots \supset \xi_{n-m_k}^+(x_k) \supset \left(\xi_{n-1}^+(x_{k-1}) \cap \xi_{n-m_k}^+(x_k) \right) \supset \dots \supset \\ \left(\xi_{m_2+\dots+m_{k+1}}^+(x_1) \cap \bigcap_{i=2}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) \right), \end{aligned}$$

le drapeau (F_j^+) est construit avec x_{k+1} :

$$\xi_1^+(x_{k+1}) \subset \dots \subset \xi_{n-1}^+(x_{k+1}).$$

et en posant $p = p_1 + \dots + p_g$ et $q = p_{g+1} + \dots + p_l$, le drapeau $(G_s^+)_{s=1, \dots, p}$ est

$$\xi_1^+(y_1) \subset \cdots \subset \xi_{p_1}^+(y_1) \subset \left(\xi_{p_1}^+(y_1) \oplus \xi_1^+(y_2) \right) \subset \cdots \subset \bigoplus_{i=1}^g \xi_{p_i}^+(y_i),$$

et le drapeau $(H_t^+)_{t=1, \dots, g}$ est

$$\xi_1^+(y_{g+1}) \subset \cdots \subset \xi_{p_{g+1}}^+(y_{g+1}) \subset \cdots \subset \bigoplus_{i=g+1}^l \xi_{p_i}^+(y_i).$$

D'après l'équation (**), les hypothèses du lemme sont encore vérifiées, ce qui permet de conclure la récurrence. \square

5.4. Limites. Nous montrons dans cette partie le point 4 de la proposition sur les limites. L'idée est d'utiliser les conditions de positivité données par le point 3 de la proposition pour montrer la nullité de certains déterminants.

Comme plus haut nous commençons par traiter d'abord un cas particulier pour mettre les idées en valeur.

5.4.1. *Cas $\xi_{n-1}^+(x_1) \cap \xi_2^+(x_2)$.* On veut montrer que, si x appartient à I :

$$\lim_{(x_1 < x_2) \rightarrow x} \xi_{n-1}^+(x_1) \cap \xi_2^+(x_2) = \xi_1^+(x)$$

Comme l'espace $\text{Gr}_1^+(V)$ est compact, il suffit de montrer que toutes les valeurs d'adhérence possibles valent $\xi_1^+(x)$. C'est à dire, si deux suites de I $(x_1^q)_{q \in \mathbb{N}}$ et $(x_2^q)_{q \in \mathbb{N}}$ vérifient :

- pour tout q , $x_1^q < x_2^q$,
- $\lim_q x_1^q = \lim_q x_2^q = x$,
- et il existe une droite orientée D appartenant à $\text{Gr}_1^+(V)$ telle que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_{n-1}^+(x_1^q) \cap \xi_2^+(x_2^q) = D,$$

alors D est égale à $\xi_1^+(x)$.

Soit donc une suite $(u^q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $V - \{0\}$ avec $u^q \in \xi_{n-1}^+(x_1^q) \cap \xi_2^+(x_2^q)$ et telle que :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} u^q = d \in D - \{0\}$$

Il faut donc montrer que d appartient à $\xi_1^+(x)$ et définit la bonne orientation sur cette droite.

Fixons pour toute la suite une base directe $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ de V . Choisissons aussi $z_1 < \cdots < z_{n-1}$ des points de I plus grands que x (i.e. $x < z_1$), des vecteurs $\hat{\xi}(z_i)$ définissant l'orientation de $\xi_1^+(z_i)$ et un vecteur $\hat{\xi}(x)$ de $\xi_1^+(x)$ définissant l'orientation. On va montrer que

$$(\star) \quad \det_{(\varepsilon_i)} \left(\hat{\xi}(x), d, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-2}) \right) = 0,$$

$$(\star\star) \quad \text{et } \det_{(\varepsilon_i)} \left(d, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-1}) \right) \geq 0.$$

La nullité du premier déterminant implique que

$$d \in \xi_1^+(x) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2} \xi_1^+(z_i),$$

et comme ceci vaut pour tous les choix des (z_i) , on en déduit que d appartient à $\xi_1^+(x)$, donc d est de la forme $\lambda \hat{\xi}(x)$ pour un réel λ non nul, il faut encore montrer que λ est positif, or le second déterminant vaut alors :

$$\lambda \det_{(\varepsilon_i)} \left(\hat{\xi}(x), \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-1}) \right)$$

comme on sait que la base $\left(\hat{\xi}(x), \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-1}) \right)$ est directe, le déterminant dans cette dernière expression est strictement positif et on en déduit la positivité de λ .

Démonstration de (★★) :

En utilisant le point 3 de la proposition 9, comme pour q assez grand on a $x_1^q < x_2^q < z_1 < \dots < z_{n-1}$, on sait que la base $(u^q, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-1}))$ est directe, ce qui se traduit par :

$$\det_{(\varepsilon_i)}(u^q, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-1})) > 0$$

et on conclut par passage à la limite. \square

Démonstration de (★) : Soit U un voisinage de x ne contenant aucun des z_i . On peut aussi supposer que $\hat{\xi}$ est définie et continue sur U et que pour tout y de U le vecteur $\hat{\xi}(y)$ est une base directe de $\xi_1^+(y)$.

Si $y < x$, alors pour q assez grand, on aura $y < x_1^q < x_2^q < z_1 < \dots < z_{n-2}$. Dans ce cas, le point 3 affirme que la base $\left(\hat{\xi}(y), u^q, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-2}) \right)$ est directe, c'est-à-dire

$$\det_{(\varepsilon_i)} \left(\hat{\xi}(y), u^q, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-2}) \right) > 0,$$

et donc,

$$\det_{(\varepsilon_i)} \left(\hat{\xi}(y), d, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-2}) \right) \geq 0,$$

et par continuité, le déterminant dans l'égalité (★) est positif.

Si $y > x$ et q assez grand, la base $(u^q, \hat{\xi}(y), \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-2}))$ est directe ce qui implique que le déterminant suivant est positif :

$$\det_{(\varepsilon_i)} \left(d, \hat{\xi}(y), \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{n-2}) \right),$$

et donc que le déterminant considéré est négatif et donc nul. \square

5.4.2. *Cas général.* Rappelons la propriété cherchée.

Soient $p = p_1 + \dots + p_l \leq m = m_1 + \dots + m_k \leq n$, alors si x appartient à I

$$\lim_{((x_i), (y_j)) \rightarrow x} \bigoplus_{j=1}^g \xi_{p_j}^+(y_j) \oplus \bigcap_{i=1}^k \xi_{n-m_i}^+(x_i) \oplus \bigoplus_{j=g+1}^l \xi_{p_j}^+(y_j) = \xi_{n-m+p}^+(x)$$

la limite étant prise sur les $(k+l)$ -uplets vérifiant $y_1 < \dots < y_g < x_1 < \dots < x_k < y_{g+1} < \dots < y_l$.

Cette fois-ci, il faudra procéder par récurrence sur la dimension, c'est-à-dire sur l'entier $n - m + p$ (il n'y a rien à montrer lorsque $n - m + p = 0$). A nouveau nous allons montrer que la seule valeur d'adhérence possible est $\xi_{n-m+p}^+(x)$ et, comme on travaille par récurrence, on pourra supposer qu'une valeur d'adhérence contient le sous-espace $\xi_{n-m+p-1}^+(x)$. Voici le lemme qui permettra de conclure la récurrence :

Lemme 11. *Soit ξ^+ une courbe Frenet orientée définie sur un intervalle I . Soient $p = p_1 + \dots + p_l \leq m = m_1 + \dots + m_k \leq n$. Soit x appartenant à I .*

Si $(y_j^q)_{q \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, l$, et $(x_i^q)_{q \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \dots, k$, sont des suites de I convergeant vers x et telles que :

$$\det_{(\varepsilon_i)}(w_1, \dots, w_{n-m+p}, v, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{m-p-1})) \geq 0.$$

Or, comme la courbe est Frenet, on sait que

$$\lim_{y \underset{<}{\rightarrow} x} \xi_1^+(y) \oplus \xi_{n-m+p-1}^+(x) = \xi_{n-m+p}^+(x),$$

donc, si $y^q \underset{<}{\rightarrow} x$ et si $(w_1^q, \dots, w_{n-m+p}^q)$ est une base directe de $\xi_1^+(y^q) \oplus \xi_{n-m+p-1}^+(x)$, qui converge, quand q tend vers l'infini, vers (u_1, \dots, u_{n-m+p}) , on obtient :

$$\det_{(\varepsilon_i)}(u_1, \dots, u_{n-m+p}, v, \hat{\xi}(z_1), \dots, \hat{\xi}(z_{m-p-1})) \geq 0$$

De manière similaire, en considérant $y > x$ on prouve que ce dernier déterminant est aussi négatif et donc est nul (\star). \square

Remarques : Expliquons maintenant comment l'on peut démontrer la caractérisation des courbes Frenet énoncée dans la proposition 1. Les hypothèses de cette proposition permettent d'orienter la courbe comme dans la démonstration de la proposition 8, ensuite il est immédiat que les déterminants que l'on doit considérer sont positifs (pas strictement), un argument de croissance, similaire à la proposition 5.3 de [2], permet de conclure.

6. Généralisations

Les courbes Frenet vérifient en fait des propriétés beaucoup plus fortes que celles de la proposition 7. Introduisons quelques notations. Soit Y une partie finie de l'intervalle I et soit $f = (f_y)_{y \in Y}$ une fonction sur Y à valeurs entières, on pose, si ξ est une courbe Frenet de I dans $\text{Drap}(V)$:

$$d(f) := n - \sum_{y \in Y} f_y \text{ et}$$

$$\xi^\cap(Y, f) := \bigcap_{y \in Y} \xi_{n-f_y}(y)$$

si $d(f)$ est positif, la dimension de $\xi^\cap(Y, f)$ est alors $d(f)$, c'est une conséquence de la proposition 7. Si Y_1 et Y_2 sont deux parties (finies ou non) de I , on notera $Y_1 < Y_2$ pour signifier que y_1 est strictement inférieur à y_2 pour tout (y_1, y_2) appartenant à $Y_1 \times Y_2$.

La proposition suivante généralise la proposition 7 :

Proposition 12. *Pour tous $(Y_1, f_1), \dots, (Y_k, f_k)$ tels que*

- *pour tout i , Y_i est une partie finie de I ,*
- *$Y_1 < \dots < Y_k$,*
- *pour tout i , f_i est une fonction à valeurs entières définie sur Y_i et $d(f_i)$ est positif,*
- *$n = d(f_1) + \dots + d(f_k)$,*

alors la somme suivante est directe :

$$\xi^\cap(Y_1, f_1) \oplus \dots \oplus \xi^\cap(Y_k, f_k) = V.$$

De même, il y a une proposition plus générale avec les limites. Changeons un tout petit peu les notations ci-dessus. Soit A un ensemble fini totalement ordonné, y désigne maintenant une fonction strictement croissante de A dans I et f une fonction définie sur A à valeurs entières :

$$d(f) := n - \sum_{a \in A} f_a \text{ et}$$

$$\xi^\cap(y, f) := \bigcap_{a \in A} \xi_{n-f_a}(y_a)$$

et toujours par la proposition 7, si $d(f)$ est positif, alors $d(f)$ est la dimension de $\xi^\cap(y, f)$.

Si deux fonctions y_1 et y_2 sont définies respectivement sur A_1 et A_2 , on notera $y_1 < y_2$ si pour tout couple (a_1, a_2) , on a $(y_1)_{a_1} < (y_2)_{a_2}$. Aussi une suite $(y^q)_{q \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur A converge vers x appartenant à I si pour tout a dans A , $\lim_{q \rightarrow \infty} y_a^q = x$.

On peut alors énoncer la proposition correspondante pour les limites :

Proposition 13. *Soit ξ une courbe Frenet définie sur un intervalle I . Soient A_1, \dots, A_k des ensembles finis totalement ordonnés et f_1, \dots, f_k des fonc-*

$$m_{\alpha,1} > 0 \text{ pour tout } \alpha = 1, \dots, n.$$

Pour $k = 2$, on sait que $m_{\alpha,1}$ est strictement positif et (par exemple)

$$(1) \quad m_{1,1}m_{2,2} - m_{2,1}m_{1,2} > 0$$

$$(2) \quad m_{2,1}m_{3,2} - m_{3,1}m_{2,2} > 0,$$

et on veut montrer

$$m_{1,1}m_{3,2} - m_{3,1}m_{1,2} > 0,$$

mais en multipliant (1) par $m_{3,1} > 0$ et en multipliant (2) par $m_{1,1} > 0$, on obtient en additionnant les deux inégalités obtenues :

$$m_{2,1}(m_{1,1}m_{3,2} - m_{3,1}m_{1,2}) > 0,$$

ce qu'on voulait car $m_{2,1} > 0$. De proche en proche on peut ainsi montrer que tous les mineurs de taille 2 sont strictement positifs. Dans le cas général, nous utiliserons le lemme 15, basé sur une identité similaire sur les mineurs s , pour montrer de proche en proche que les mineurs sont positifs.

Pour la suite, nous supposons que tous les mineurs de taille $k - 1$ sont strictement positifs avec $k \geq 2$. Il faut montrer que

$$\text{pour tous } i_1 < \dots < i_k, \det(m_{\alpha,\beta})_{\substack{\alpha=i_1,\dots,i_k \\ \beta=1,\dots,k}} > 0$$

ce que nous allons montrer par récurrence sur l'entier :

$$\begin{aligned} p &= (i_2 - i_1 - 1) + (i_3 - i_2 - 1) + \dots + (i_k - i_{k-1} - 1) \\ &= i_k - i_1 - k + 1. \end{aligned}$$

Lorsque p vaut 0, les entiers i_1, \dots, i_k sont consécutifs et c'est par hypothèse sur $(m_{\alpha,\beta})$ que le déterminant est strictement positif.

Si $p > 0$, alors il existe un indice $1 \leq j < k$ tel que $i_{j+1} > i_j + 1$. Soit alors la matrice extraite de taille $(k + 1, k)$ suivante :

$$(m_{\alpha,\beta})_{\alpha=i_1,\dots,i_j,i_j+1,i_{j+1},\dots,i_k \\ \beta=1,\dots,k}$$

tous les mineurs "à gauche" de taille $k - 1$ de cette matrice sont strictement positifs, mais aussi, par hypothèse de récurrence sur p , les deux mineurs de taille k :

$$\det(m_{\alpha,\beta})_{\alpha=i_1,\dots,i_j,i_j+1,i_{j+1},\dots,i_{k-1} \\ \beta=1,\dots,k} > 0,$$

$$\det(m_{\alpha,\beta})_{\alpha=i_2,\dots,i_j,i_j+1,i_{j+1},\dots,i_k \\ \beta=1,\dots,k} > 0,$$

et le lemme suivant permet de conclure que :

$$\det(m_{\alpha,\beta})_{\alpha=i_1,\dots,i_k \\ \beta=1,\dots,k} > 0,$$

ce qu'on voulait. \square

Lemme 15. Soit $(n_{\alpha,\beta})_{\alpha=1,\dots,k+1 \\ \beta=1,\dots,k}$ une matrice de $M_{k+1,k}(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs "à gauche" de taille $k - 1$ sont strictement positifs et telle que :

$$\det(n_{\alpha,\beta})_{\alpha=1,\dots,k \\ \beta=1,\dots,k} > 0$$

$$\text{et } \det(n_{\alpha,\beta})_{\alpha=2,\dots,k+1 \\ \beta=1,\dots,k} > 0,$$

alors tous les mineurs de taille k de $(n_{\alpha,\beta})$ sont strictement positifs.

Démonstration du lemme 15 :

Notons L_1, \dots, L_{k+1} les lignes de cette matrices :

$$L_\alpha = (n_{\alpha,1}, \dots, n_{\alpha,k}),$$

et notons L'_1, \dots, L'_{k+1} ces mêmes lignes où l'on a retiré la dernière coordonnée :

$$L'_\alpha = (n_{\alpha,1}, \dots, n_{\alpha,k-1}).$$

Si $1 < i < k + 1$, il faut montrer que³ :

$$\det(L_1, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_{k+1}) > 0.$$

Par hypothèse, (L_1, \dots, L_k) est une base de \mathbb{R}^k , donc on peut exprimer L_{k+1} sur cette base, $L_{k+1} = \sum \alpha_j L_j$, alors :

$$\begin{aligned} \det(L_1, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_{k+1}) &= \det(L_1, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_k, \alpha_i L_i) \\ &= (-1)^{k-i} \alpha_i \det(L_1, \dots, L_k) \end{aligned}$$

On va essayer d'éliminer α_i en utilisant les autres mineurs.

$$\begin{aligned} \det(L_2, \dots, L_{k+1}) &= \det(L_2, \dots, L_k, \alpha_1 L_1) \\ &= (-1)^{k-1} \alpha_1 \det(L_1, \dots, L_k). \end{aligned}$$

Utilisons maintenant les mineurs d'ordre inférieur, $(L'_1, \dots, \widehat{L}'_i, \dots, L'_k)$ est une base de \mathbb{R}^{k-1} :

$$\begin{aligned} L'_i &= \sum_{j \neq i} \alpha_j L'_j \\ L'_{k+1} &= \alpha_i L'_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L'_j = \sum_{j \neq i} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j) L'_j. \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \det(L'_2, \dots, \widehat{L}'_i, \dots, L'_{k+1}) &= \det(L'_2, \dots, \widehat{L}'_i, \dots, L'_k, (\alpha_i \alpha_1 + \alpha_1) L'_1) \\ &= (-1)^k (\alpha_i \alpha_1 + \alpha_1) \det(L'_1, \dots, \widehat{L}'_i, \dots, L'_k) \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \det(L'_2, \dots, L'_k) &= \det(L'_2, \dots, \alpha_1 L'_1, \dots, L'_k) \\ &= (-1)^{i-1} \alpha_1 \det(L'_1, \dots, \widehat{L}'_i, \dots, L'_k). \end{aligned}$$

Si l'on rassemble les quatre égalités obtenues, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \det(L_1, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_{k+1}) \det(L'_2, \dots, L'_k) &= \\ \det(L_1, \dots, L_k) \det(L'_2, \dots, \widehat{L}'_i, \dots, L'_{k+1}) &+ \\ \det(L_2, \dots, L_{k+1}) \det(L'_1, \dots, \widehat{L}'_i, \dots, L'_k) & \end{aligned}$$

³Un chapeau $\widehat{}$ indique un terme manquant dans une liste.

dans cette égalité, on cherche le signe du déterminant le plus à gauche, or les cinq autres déterminants qui apparaissent sont strictement positifs, d'où on déduit la positivité manquante. \square

7.2. Le lemme sur les drapeaux. L'énoncé à montrer est le suivant :

Lemme 16. *Soit V un espace vectoriel orienté de dimension finie n .*

Soient $E_1^+ \subset \dots \subset E_{n-1}^+$ et $F_1^+ \subset \dots \subset F_{n-1}^+$ deux drapeaux orientés de V tels que :

$$\text{si } i + j = n, \text{ alors } V = E_i^+ \oplus F_j^+.$$

Soient enfin deux autres drapeaux (incomplets) $G_1^+ \subset \dots \subset G_p^+$ et $H_1^+ \subset \dots \subset H_q^+$, avec $\dim G_s^+ = s$ et $\dim H_t^+ = t$ et tels que

$$\text{si } s + i + j + t = n, \text{ alors } V = G_s^+ \oplus E_i^+ \oplus F_j^+ \oplus H_t^+,$$

alors, les intersections étant orientées par les conventions de la partie 3 :

$$\text{si } s + t = i + j \leq n, V = G_s^+ \oplus (E_{n-i}^+ \cap F_{n-j}^+) \oplus H_t^+.$$

Démonstration : Nous allons chercher à appliquer le lemme 14.

Soient (e_1, \dots, e_n) une base de V telle que

$$\text{pour tout } i, e_i \text{ définit l'orientation sur } E_i^+ \cap F_{n-i+1}^+.$$

Alors (e_1, \dots, e_i) est une base directe de E_i^+ , et (e_{n-j+1}, \dots, e_n) est une base directe de F_j^+ .

Soient aussi (c_1, \dots, c_p) tel que, pour tout s , (c_1, \dots, c_s) est une base directe de G_s^+ et $(c_{p+1}, \dots, c_{p+q})$ tel que, pour tout t , $(c_{p+1}, \dots, c_{p+t})$ est une base directe de H_t^+ . L'hypothèse sur les drapeaux se traduit sur les bases par :

si $s + i + j + t = n$, alors $(c_1, \dots, c_t, e_1, \dots, e_i, e_{n-j+1}, \dots, e_n, c_{p+1}, \dots, c_{p+t})$ est une base directe de V .

La conclusion se traduit par :

si $s + t = i + j$, alors $(c_1, \dots, c_s, e_{j+1}, \dots, e_{n-i}, c_{p+1}, \dots, c_{p+t})$ est une base directe de V .

Soient C_1, \dots, C_{p+q} les vecteurs colonnes représentant c_1, \dots, c_{p+q} dans la base (e_1, \dots, e_n) , et soit $(c_{\alpha, \beta})_{\substack{\alpha=1, \dots, n \\ \beta=1, \dots, p+q}}$ la matrice (C_1, \dots, C_{p+q}) . Malheureusement cette matrice ne vérifie pas directement les hypothèses du lemme 14.

Fixons donc deux entiers s et t , avec $s \leq p$, $t \leq q$ et $s + t \leq n$. Notons E_1, \dots, E_n la base canonique de \mathbb{R}^n , alors on sait

♦ si $k + i + j = n$ avec $k \leq s$,

$$\det(C_1, \dots, C_k, E_1, \dots, E_i, E_{n-j+1}, \dots, E_n) > 0,$$

♦ et si $s + i + j + k = n$ avec $k \leq t$,

$$\det(C_1, \dots, C_s, E_1, \dots, E_i, E_{n-j+1}, \dots, E_n, C_{p+1}, \dots, C_{p+k}) > 0.$$

Remarquons que nous n'avons écrit qu'une partie des hypothèses vérifiées par les vecteurs colonnes C_i , mais sous ses seules conditions ci-dessus, nous allons montrer :

• si $k = i + j$, $k \leq s$, alors

$$\det(C_1, \dots, C_k, E_{j+1}, \dots, E_{n-i}) > 0,$$

• si $s + k = i + j$, $k \leq t$, alors

$$\det(C_1, \dots, C_s, E_{j+1}, \dots, E_{n-i}, C_{p+1}, \dots, C_{p+k}) > 0.$$

A nouveau, nous n'avons écrit qu'une partie des conclusions voulues mais nous les obtenons toutes en laissant varier s et t .

Les hypothèses, auxquelles on se restreint, se traduisent sur les mineurs de $(c_{\alpha,\beta})$:

♦ si $k \leq s$, $k + i + j = n$ alors

$$\det(c_{\alpha,\beta})_{\substack{\alpha=i+1,\dots,n-j \\ \beta=1,\dots,k}} (-1)^{ki} > 0,$$

♦ et si $k \leq t$, $s + i + j + k = n$, alors

$$\det(c_{\alpha,\beta})_{\substack{\alpha=i+1,\dots,n-j \\ \beta=1,\dots,s,p+1,\dots,p+k}} (-1)^{si+kj} > 0.$$

De même les conclusions, auxquelles on veut arriver, sont

• si $k \leq s$, $k = i + j$, alors

$$\det(c_{\alpha,\beta})_{\substack{\alpha=1,\dots,j,n-i+1,\dots,n \\ \beta=1,\dots,k}} (-1)^{(n-k)(k+j)} > 0,$$

• si $k \leq t$, $s + k = i + j$, alors

$$\det(c_{\alpha,\beta})_{\substack{\alpha=1,\dots,j,n-i+1,\dots,n \\ \beta=1,\dots,s,p+1,\dots,p+k}} (-1)^{(n-s-k)(s+j)} > 0.$$

Posons $d_{\alpha,\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} c_{\alpha,\beta}$ si $\cdot \leq s$ et $d_{\alpha,s+\beta} = (-1)^{\alpha+\beta+(n+1)} c_{\alpha,p+\beta}$ si $1 \leq \cdot \leq t$. On vérifie alors que la matrice $(d_{\alpha,\beta})_{\substack{\alpha=1,\dots,n \\ \beta=1,\dots,s+t}}$ satisfait les

hypothèses du lemme 14, *i.e.* tous les mineurs “à gauche” et par blocs sont strictement positifs, et on vérifie aussi que les conclusions de ce même lemme impliquent que les mineurs recherchés de $(c_{\alpha,\beta})$ sont bien du signe voulu. \square

Références

- [1] N. H. Kuiper. On convex locally-projective spaces. In *Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Italia, 1953*, pages 200–213. Edizioni Cremonese, Roma, 1954.
- [2] François Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. preprint, 2003.