GROUPES PLONGÉS QUASI ISOMÉTRIQUEMENT DANS UN GROUPE DE LIE

OLIVIER GUICHARD

Résumé. Soit Γ un sous-groupe discret de type fini d'un groupe de Lie semi-simple G. On donne ici une condition suffisante pour que l'injection de Γ dans le groupe G admet un voisinage de représentations fidèles et discrètes.

Table des matières

1. Introduction

Soit G un groupe de Lie semi-simple à centre fini et soit Γ un sous-groupe discret de type fini dans G. Le groupe Γ est dit plongé quasi isométriquement dans le groupe G si la distance définie par la longueur des mots sur Γ est équivalente à la restriction à Γ d'une distance sur G.

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Si de plus Γ est contenu dans un sous-groupe G^* de rang un de G, Alors il existe un voisinage de l'injection de Γ dans G, dans l'espace* $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ *des représentations, constitué de plongements quasi isométriques.*

Lorsque le groupe G est égal au groupe G^*, le groupe Γ est plongé quasi isométriquement dans G si et seulement si le groupe Γ est convexe-cocompact (théorème 6). On en déduit alors immédiatement le théorème suivant

Théorème 2. *Soit G un groupe de Lie semi-simple de centre fini et G^* un sous-groupe de rang un de G. Si Γ est un sous-groupe convexe-cocompact de G^* alors il existe un voisinage U de l'injection ι de Γ dans G dans l'ensemble des représentations* $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ *constitué de représentations fidèles et discrètes.*

On n'obtient cependant pas que toute la composante connexe contenant l'injection ι est constituée de représentation fidèles et discrètes.

Dans le cas plus particulier où le groupe G est $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ et G^* est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ plongé dans G par la représentation irréductible de dimension n et où le groupe Γ est le groupe fondamental d'une surface compacte, F. Labourie [Lab03] obtient que toute une composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est constituée de représentations fidèles et discrètes, sa démonstration utilise des structures géométriques sur la surface. Ici, les démonstrations sont basées sur la connaissance de l'action de Γ sur des espaces projectifs.

Plan de l'article. La partie 3 revient sur l'équivalence (déjà connue) dans le cadre du rang un entre groupe convexe-cocompact et groupe plongé quasi isométriquement dans G. On en déduira ensuite que les éléments de Γ s'écrivent comme des produits transverses (lemme 7 et lemme 9), ces conséquences seront utiles pour la démonstration des théorèmes 1 et 2. La partie 4 est consacrée à la démonstration du théorème 1 et à un renforcement de ce théorème (théorème 15). On introduira dans la partie 2 quelques définitions et on rappellera des résultats sur les quasi-isométries et les groupes hyperboliques. Enfin l'annexe A contient les démonstrations de résultats techniques.

2. Quasi-isométrie et groupes hyperboliques

Cette partie présente quelques rappels sur les notions de quasi-isométries et de groupes hyperboliques.

2.1. **Quasi-isométries.**

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et φ une application de X dans Y

Définition 1. *L'application φ est un* plongement quasi isométrique *ou un* $(\mathcal{K}, C)$-plongement quasi isométrique *si pour tout (x, x') dans X, on a :*

$$\frac{1}{\mathcal{K}} d_Y\big(\varphi(x)\,,\varphi(x')\big) - C \leq d_X\big(x, x'\big) \leq \mathcal{K} d_Y\big(\varphi(x)\,,\varphi(x')\big) + C.$$

Elle est une quasi-isométrie *ou une* $(\mathcal{K}, C)$-quasi-isométrie *si elle vérifie de plus :*

pour tout y appartenant à Y, il existe x dans X
avec $d_Y(y, \varphi(x)) \leq C$.

Dans ce cas, on dit que les deux espaces métriques X et Y sont quasi isométriques.

2.2. **Groupes hyperboliques.**

2.2.1. *Longueur des mots.* Si le groupe Γ est un groupe de type fini et S un système fini de générateurs de Γ tel que $S^{-1} = S$, on note d_S la distance sur Γ invariante à gauche définie par la longueur des mots, *i.e.* pour tout (γ, γ') dans Γ, $d_S(\gamma', \gamma) = \ell_S\big(\gamma^{-1}\gamma'\big)$ où l'entier $\ell_S\big(\gamma^{-1}\gamma'\big)$ est le plus petit entier n tel que $\gamma^{-1}\gamma'$ s'écrive comme un produit de n éléments de S. Cette distance sera notée d_Γ lorsqu'il ne sera pas utile de faire référence au système de générateurs S. Pour tout autre système de générateurs S', l'identité de (Γ, d_S) dans $(\Gamma, d_{S'})$ est une quasi-isométrie. Seule la classe de quasi-isométries de la distance d_Γ est donc bien définie.

2.2.2. *Graphe de Cayley.* Le graphe de Cayley $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ est le graphe réel dont les sommets sont les éléments de Γ et où deux sommets γ et γ' sont reliés par une arête si le produit $\gamma^{-1}\gamma'$ appartient à S. C'est un graphe métrique où toutes les arêtes sont isométriques au segment $[0, 1]$. Le graphe de Cayley présente l'avantage d'être un espace géodésique. Si $\mathcal{C}(\Gamma, S')$ est le graphe de Cayley associé à un autre système de générateurs S', alors $\mathcal{C}(\Gamma, S')$ est quasi isométrique à $\mathcal{C}(\Gamma, S)$. C'est donc seulement la classe de quasi-isométrie du graphe de Cayley qui est bien défini indépendamment du système de générateurs.

2.2.3. *Espaces métriques hyperboliques.* Un *segment géodésique* entre deux points x et x' d'un espace métrique (X, d) est une isométrie $\varphi : [0, d(x, x')] \to X$ reliant x et x'. Un tel segment, même s'il n'est pas unique, est noté $[x, x']$ et sera le plus souvent identifié à son image dans X. L'espace métrique X est dit *géodésique* s'il existe un segment géodésique entre n'importe quel couple de ses points.

Soient x, x', x'' trois points de X, un *triangle géodésique* ou plus simplement *triangle* est la réunion de trois segments géodésiques[1] $[x, x']$, $[x', x'']$ et $[x'', x]$. Un triangle est dit δ-fin pour un réel δ positif si chaque coté est contenu dans le δ-voisinage des deux autres, par exemple :

$$\text{pour tout } y \text{ dans } [x'', x],\ d\big(y, \big[x, x'\big] \cup \big[x', x''\big]\big) \leq \delta.$$

Définition 2. *Un espace métrique géodésique X est dit* hyperbolique *ou δ-hyperbolique si tous ses triangles sont δ-fins.*

Définition 3. *On dit qu'un groupe de type fini est un* groupe hyperbolique *si son graphe de Cayley est un espace métrique hyperbolique.*

Cette notion ne dépend pas du système de générateurs avec lequel le graphe est construit.

Remarques : Les groupes que l'on étudie ici sont automatiquement des groupes hyperboliques, mais ce fait ne sera pas utilisé dans les démonstrations. On utilisera surtout l'hyperbolicité de l'espace symétrique d'un groupe de rang un.

2.2.4. *Quasi-géodésiques.* Soit I est un segment (borné ou non) de $\mathbb{R}$, une application f de I dans X est une *quasi-géodésique* ou une $(\mathcal{K}, C)$-*quasi-géodésique* si c'est un $(\mathcal{K}, C)$-plongement quasi isométrique de I dans X. Dans un espace métrique hyperbolique, les quasi-géodésiques sont proches des géodésiques, c'est ce qu'énonce le lemme suivant.

[1] on ne considère donc uniquement les cotés du triangle pas l'intérieur.

Lemme 3. *(théorème 5.11 p. 87 de* [GdlH90]*) Il existe une constante H dépendant de $\mathcal{K}$, C et δ telle que :*

si f est une $(\mathcal{K}, C)$-quasi-géodésique de I dans un espace δ-hyperbolique X, alors il existe g une géodésique d'un interval J dans X vérifiant :

$$\mathrm{Im}(f) \subset \{x \in X \,/\, d(x, \mathrm{Im}(g)) \leq H\}$$
$$\textit{et } \mathrm{Im}(g) \subset \{x \in X \,/\, d(x, \mathrm{Im}(f)) \leq H\}$$

De plus, g peut être choisi ayant les mêmes extrémités que f.

2.2.5. *Courbure négative.* Les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle plus petite que $\kappa < 0$ sont des espaces métriques hyperboliques. Elles ont la propriété supplémentaire qu'il existe une unique géodésique reliant deux points donnés, et aussi que les notions de convexité et d'enveloppe convexe ont un sens. En particulier nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4. *Soit X une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure plus petite que $\kappa < 0$ et n la dimension de X. Il existe un réel C tel que :*

pour tous $x_1, \ldots, x_n$, si $\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_n)$ est l'enveloppe convexe de ces n points et $\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)$ la réunion des segments géodésiques reliant deux de ces points, alors on a l'inclusion suivante

$$\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_n) \subset \Big\{ x \in X \,/\, d\big(x, \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)\big) \leq C \Big\}.$$

Remarques : Ce lemme est une généralisation de l'hypothèse d'hyperbolicité à tous les simplexes, pas seulement les triangles.

Démonstration : Par récurrence sur $l \leq n$, montrons qu'il existe une constante C_l telle que $\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_l) \subset \{x \in X \,/\, d(\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_l)) \leq C_l\}$. C'est évident quand l vaut 1 ou 2. Soit $l \geq 3$ et un point y de $\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_l)$, la géodésique issue de x_l et passant par y coupe l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_{l-1})$ en un point y'. Par δ-hyperbolicité de X (δ dépend de κ), en considérant le triangle $[x_l, y'] \cup [y', x_1] \cup [x_1, x_l]$, le point y se trouve à une distance inférieure à δ de $[y', x_1] \cup [x_1, x_l]$, or le segment $[y', x_1]$ est contenu dans le C_{l-1}-voisinage de $\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_{l-1})$ par l'hypothèse de récurrence, $C_l = \delta + C_{l-1}$ convient donc. $\square$

3. Quasi-isométries dans un groupe de rang un

Dans cette partie, G^* désigne un groupe de Lie semi-simple[2] à centre fini et de rang un. On remontre qu'un groupe Γ est plongé quasi isométriquement dans G^* si et seulement si Γ est convexe-cocompact. Quelques conséquences en sont tirées sur l'action de Γ sur l'espace symétrique X (lemme 7).

3.1. Quelques notations.

3.1.1. *Espace symétrique.* Soit K^* un sous-groupe compact maximal de G^*, et A^* un sous-espace de Cartan[3]. Le quotient $X = G^*/K^*$ est l'espace symétrique associé à G^*. Le point de X correspondant à la classe de K^* sera

[2] Un groupe semi-simple sera toujours supposé connexe.

[3] L'algèbre de Lie de G^* s'écrit $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, somme orthogonale pour la forme de Killing, où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K^*. Un sous-espace de Cartan est par définition un sous-groupe connexe dont l'algèbre de Lie est une sous-algèbre abélienne maximale contenue $\mathfrak{p}$.

noté x_{K^*}. La projection

$$\begin{aligned} \pi : & G^* \to G^*/K^* \\ & g \mapsto g \cdot x_{K^*} \end{aligned}$$

est alors une quasi-isométrie[4].

La variété X a une structure riemannienne à courbure négative inférieure ou égale à $-\frac{1}{4}$, ce qui implique que X est un espace métrique hyperbolique. Les éléments de G^* agissent sur X par isométrie.

Soit A^{*+} une chambre de Weyl fermée de A^*. Tout élément g de G^* s'écrit comme un produit $k_1 \mu_+(g)\, k_2$ (décomposition de Cartan) avec k_1 et k_2 appartenant à K^* et $\mu_+(g)$ appartenant à A^{*+}. L'élément $\mu_+(g)$ est uniquement déterminé par g et lorsque $\mu_+(g)$ est non nul, les deux éléments k_1 et k_2 sont déterminés modulo un élément du centralisateur de A^* dans K^*, $M = K^* \cap Z_{G^*}(A^*)$, *i.e.* la classe $k_1 \cdot M$ de k_1 dans K^*/M est uniquement déterminée par g. L'élément $\mu_+(g)$ est identifié à un élément de $\mathbb{R}^+$ de sorte que :

$$d_X(g \cdot x_{K^*}, x_{K^*}) = d_X(\mu_+(g) \cdot x_{K^*}, x_{K^*}) = \mu_+(g)$$

La fonction $\mu_+ : A^{*+} \to \mathbb{R}^+$ est la restriction à A^{*+} d'un morphisme de groupe[5] μ de A^* dans $\mathbb{R}$.

3.1.2. *Plongement quasi isométrique.* Si $\varphi : \Gamma \to G^*$ est un morphisme de groupe, et que le groupe Γ est muni d'une distance d_Γ qui est invariante à gauche, les remarques précédentes montrent que :

Lemme 5. *Le morphisme φ est un plongement quasi isométrique si et seulement s'il existe des constantes $(\mathcal{K}, C)$ telles que pour tout γ dans Γ :*

$$\frac{1}{\mathcal{K}} d_\Gamma(\gamma, e) - C \leq \mu_+(\varphi(\gamma)) \leq \mathcal{K} d_\Gamma(\gamma, e) + C. \tag{1}$$

Remarques : Quand le groupe Γ est un groupe de type fini et que la distance d_Γ est définie par la longueur des mots, alors l'inégalité de droite dans l'équation (1) est toujours automatiquement vérifiée :

en effet, soit S un système de générateurs, si γ s'écrit comme un produit $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ d'éléments de S avec $n = \ell_S(\gamma)$, alors

$$\mu_+(\varphi(\gamma)) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_+(\varphi(\gamma_i)) \leq \mathcal{K} n \text{ avec } \mathcal{K} = \max_{s \in S} \mu_+(\varphi(s))$$

Dans ce cas seule l'inégalité de gauche dans l'équation (1) est significative.

3.1.3. *Racines dans G^*.* L'action de A^* sur l'algèbre de Lie de G^* est diagonalisable :

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{z}^* \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}^*_\lambda$$

où $\mathfrak{z}^*$ est le centralisateur de A^* dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$, et $\mathfrak{g}^*_\lambda$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ, c'est-à-dire

$$\mathfrak{g}^*_\lambda = \{ v \in \mathfrak{g}^* \,/\, \mathrm{Ad}(a) \cdot v = e^{\lambda \mu(a)} v \text{ pour tout } a \text{ dans } A^* \}.$$

[4] C'est encore vrai sans hypothèse sur le rang du groupe G^*

[5] On prendra garde au fait que les restrictions de μ_+ et de μ à la chambre A^{*-} ne coïncident pas, où A^{*-} est la chambre de Weyl opposée à A^{*+}

Soit N le sous-groupe de G^* d'algèbre de Lie $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda>0} \mathfrak{g}^*_\lambda$ et N^- celui d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\lambda<0} \mathfrak{g}^*_\lambda$.

3.2. **Bord de l'espace symétrique, ensemble limite.**

3.2.1. *Le bord de X.* Un *rayon géodésique* de X est une isométrie $f : \mathbb{R} \to X$, un *demi-rayon géodésique* est une isométrie g de $\mathbb{R}^+$ dans X, on ne fera pas en pratique de distinctions entre l'application f (resp. g) et son image $f(\mathbb{R})$ (resp. $g(\mathbb{R}^+)$).

Deux demi-rayons géodésiques sont dits *équivalents* s'ils sont à distance de Hausdorff finie. Deux demi-rayons géodésiques g et g' sont équivalents si et seulement si, pour un certain réel H, on a :

$$\text{pour tout } t \geq 0, \quad d_X\big(g(t)\,, g'(t)\big) \leq H$$

Définition 4. *L'ensemble des classes d'équivalence de demi-rayons géodésiques est appelé* le bord *de X, et est noté ∂X. Le bord de X est compact.*

Dans l'espace symétrique X, tout rayon géodésique est de la forme $g \cdot A^* \cdot x_{K^*}$ pour un g dans le groupe G^* et tout demi-rayon géodésique est de la forme $g \cdot A^{*+} \cdot x_{K^*}$. Tout demi-rayon géodésique est ainsi équivalent à un rayon de la forme $k \cdot A^{*+} \cdot x_{K^*}$ avec k un élément du groupe K^*. Deux demi-rayons géodésiques qui sont de la forme $k_1 \cdot A^{*+} \cdot x_{K^*}$ et $k_2 \cdot A^{*+} \cdot x_{K^*}$ sont équivalents si et seulement s'ils sont égaux, ce qui est équivalent à avoir $k_1^{-1}k_2$ dans M.

Le bord ∂X est muni d'une action de G^* car le groupe G^* agit sur l'ensemble des demi-rayons géodésiques en respectant la relation d'équivalence. Le bord ∂X est en fait un K^*-espace homogène, $\partial X \simeq K^*/M$, donc l'ensemble ∂X peut être muni d'une métrique riemannienne K^*-invariante. De plus la réunion $X \cup \partial X$ est naturellement un espace topologique compact. En effet la décomposition de Cartan montre que $X \setminus \{x_{K^*}\}$ est homéomorphe à $K^*/M \times]0, +\infty[$ et ainsi $X \cup \partial X \setminus \{x_{K^*}\}$ est homéomorphe à $K^*/M \times]0, +\infty]$.

Le point de ∂X correspondant à $A^{*+} \cdot x_{K^*}$ est stabilisé par N, celui correspondant à $A^{*-} \cdot x_{K^*}$ est stabilisé par N^-. Plus précisément le stabilisateur du point du bord $A^{*+} \cdot x_{K^*}$ dans G^* est le groupe parabolique $P = MA^*N$ et l'action du groupe N^- sur le bord ∂X a exactement deux orbites[6] : le point $A^{*-} \cdot x_{K^*}$ et son complémentaire $N^- \cdot A^{*+} \cdot x_{K^*}$ qui est une orbite ouverte homéomorphe à N^-.

3.2.2. *Ensemble limite.* Soit Γ un sous-groupe de G^*.

Définition 5. l'ensemble limite Λ_Γ *du groupe Γ est défini comme l'adhérence d'une orbite $\Gamma \cdot x$ dans le bord ∂X, pour un point x de X.*

Cette définition est indépendante de l'orbite considérée. Un point ξ de ∂X appartient à Λ_Γ, si et seulement s'il existe une suite (λ_n) de Γ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \cdot x_{K^*} = \xi.$$

La suite $(\lambda_n \cdot x_{K^*})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de l'espace symétrique X qui converge dans le bord de X. Si $\lambda_n = k_n a_n k'_n$ est la décomposition de Cartan de λ_n, alors $\xi = \lim_{n\to\infty} k_n \cdot M$, la limite étant considérée ici dans le quotient K^*/M qui s'identifie naturellement à ∂X. Dans le cas où le groupe

[6] C'est le décomposition de Bruhat qui permet de les calculer.

Γ est non élémentaire[7], l'ensemble limite Λ_Γ n'est pas vide et c'est le plus petit fermé invariant de ∂Xpar l'action.

3.3. **Groupes convexes-cocompacts.** Soit Γ un sous-groupe de G^*, son ensemble limite Λ_Γ est supposé non vide. On note $\mathcal{C}(\Gamma)$ l'enveloppe convexe dans X de Λ_Γ. C'est un fermé de X invariant par l'action de Γ, c'est même le plus petit convexe fermé de X invariant par l'action de Γ.

Définition 6. *Le groupe Γ est dit convexe-cocompact si l'action de Γ sur le convexe fermé $\mathcal{C}(\Gamma)$ est cocompact et s'il est discret dans G^*.*

Le théorème suivant établit l'équivalence annoncée :

Théorème 6. *[Bourdon, Gromov] Soit Γ un sous-groupe de type fini d'un groupe de Lie G^* semi-simple à centre fini et de rang un. Le groupe Γ est muni de la distance définie par la longueur des mots. On note $\iota : \Gamma \to G^*$ l'injection. Les deux affirmations suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *le morphisme ι est un plongement quasi isométrique.*

(2) *le sous-groupe Γ de G^* est convexe-cocompact.*

Remarques : Les énoncés (1) et (2) impliquent tous les deux que le groupe Γ est un groupe hyperbolique, ce qui sera désormais supposé.

La démonstration se trouve dans l'article de M. Bourdon [Bou95], propositions 1.8.2, 1.8.6 et exemple 1.8.7. Nous la reproduisons ici pour la commodité du lecteur.

Démonstration : Supposons que ι est un plongement quasi isométrique. Il faut prouver qu'il existe un réel D positif tel que l'on a

$$\mathcal{C}(\Gamma) \subset \{x \in X \,/\, d(x, \Gamma \cdot x_{K^*}) \leq D\}$$

ce qui va se démontrer en deux étapes ; soit $\mathcal{G}(\Gamma)$ la réunion des géodésiques de X dont les deux extrémités sont des points de l'ensemble limite Λ_Γ, il suffit de montrer qu'il existe deux réels D_1 et D_2 tels que :

$$\mathcal{C}(\Gamma) \subset \{x \in X \,/\, d(x, \mathcal{G}(\Gamma)) \leq D_1\}$$
$$\mathcal{G}(\Gamma) \subset \{x \in X \,/\, d(x, \Gamma \cdot x_{K^*}) \leq D_2\}$$

La première inclusion résulte du lemme 4 et du fait que le théorème de Carathéodory est valable dans X. Il reste à démontrer la deuxième inclusion.

Le groupe Γ contient des géodésiques (pour la longueur des mots) entre n'importe quel couple de ces points et l'injection ι est un $(\mathcal{K}, C)$-plongement quasi isométrique pour des constantes $(\mathcal{K}, C)$. On en déduit que le sous-ensemble $\Gamma \cdot x_{K^*}$ de X contient des $(\mathcal{K}, C)$-géodésiques entre n'importe quel couple de points. D'après le lemme 3, il existe une constante H telle que si f est une $(\mathcal{K}, C)$-géodésique entre deux points x et x' alors le segment géodésique $[x, x']$ est inclus dans le H-voisinage de l'image $\mathrm{Im}(f)$. Notons $\mathcal{G}(\Gamma \cdot x_{K^*})$ la réunion des segments géodésiques entre deux points de $\Gamma \cdot x_{K^*}$, on a prouvé que :

$$\mathcal{G}(\Gamma \cdot x_{K^*}) \subset \big\{x \in X \,/\, d(x, \Gamma \cdot x_{K^*}) \leq H\big\}$$

Si maintenant ξ et ξ' sont dans l'ensemble limite Λ_Γ, alors tout point de la géodésique $]\xi, \xi'[$ est adhérent à $\mathcal{G}(\Gamma \cdot x_{K^*})$, ce qui termine la démonstration de la deuxième inclusion et de l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du théorème.

[7] Un groupe est non élémentaire si son ensemble limite contient au moins trois points.

Supposons maintenant la condition (2) vérifiée. Le groupe Γ agit de manière cocompacte sur le convexe $\mathcal{C}(\Gamma)$, il est alors classique que le groupe Γ est de type fini et est quasi isométrique à $\mathcal{C}(\Gamma)$ (proposition 19 page 60 de [GdlH90]) et donc que Γ est plongé quasi isométriquement dans G^*. $\square$

Le lemme suivant précise l'action d'un groupe convexe-cocompact sur l'espace symétrique X. Chaque élément s'écrit comme un produit de générateurs deux à deux transverses.

Lemme 7. *Soit Γ un sous-groupe convexe-cocompact de G^*. Il existe alors un réel D, tel que pour tout R plus grand que D, si l'on note S_R l'ensemble $\{s \in \Gamma \,/\, \mu_+(s) \leq R\}$, alors, tout élément γ de Γ s'écrit comme le produit des γ_i, $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$ d'éléments de S_R avec*
- *pour tout $i > 0$, $\mu_+(\gamma_i) \geq R - D$*
- *pour tout $0 < i < n$, $\mu_+(\gamma_i\gamma_{i+1}) \geq \mu_+(\gamma_i) + \mu_+(\gamma_{i+1}) - D$.*

En particulier le groupe Γ est de type fini.

Démonstration : Soit x un point de $\mathcal{C}(\Gamma)$, l'action de Γ sur $\mathcal{C}(\Gamma)$ étant cocompacte, il existe un réel d tel que

$$\mathcal{C}(\Gamma) \subset \big\{ y \in X \,/\, d(y, \Gamma \cdot x) \leq d \big\}$$

Posons $D = 6\,(d + d(x, x_{K^*}))$, on veut montrer que ce réel D convient. Fixons $R \geq D$.

Soit γ un élément de Γ, le segment géodésique $\big[x, \gamma^{-1} \cdot x\big]$ est inclus dans $\mathcal{C}(\Gamma)$. Soit x_i le point de $\big[x, \gamma^{-1} \cdot x\big]$ tel que

$$d(x, x_i) = i\left(R - \frac{D}{2}\right).$$

et soit n le plus grand des entiers i tel que $i\,(R - D/2) \leq \mu_+(\gamma)$. En particulier, on aura $d(x_i, x_{i+1}) = R - \frac{D}{2}$. Le point x_i appartient à $\mathcal{C}(\Gamma)$ et il existe λ_i appartenant à Γ tel que $d(x_i, \lambda_i \cdot x) \leq d$ (on prend $\lambda_0 = 1$), on en déduit

$$d(\lambda_i \cdot x, \lambda_{i+1} \cdot x) \geq R - \frac{D}{2} - 2d$$
$$\text{puis } d(\lambda_i \cdot x_{K^*}, \lambda_{i+1} \cdot x_{K^*}) \geq \left(R - \frac{D}{2}\right) - 2d - 2d(x, x_{K^*}) \geq R - D$$

c'est-à-dire $\mu_+(\lambda_{i+1}^{-1}\lambda_i) \geq R - D$ quand $i < n$.

De même, on obtient $\mu_+(\lambda_{i+1}^{-1}\lambda_i) \leq R$ et $\mu_+(\gamma\lambda_n) \leq R$. Posons maintenant $\gamma_0 = \gamma\lambda_n$ et pour i entre 1 et n, $\gamma_i = \lambda_{n-i+1}^{-1}\lambda_{n-i}$, alors γ s'écrit comme le produit $\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$ et cette décomposition vérifie déjà les deux premières inégalités de l'énoncé. Prouvons la troisième, remarquons d'abord que pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \mu_+(\gamma_i \cdots \gamma_j) =& \mu_+\big(\lambda_{n-i+1}^{-1}\lambda_{n-j}\big) \\ =& d(\lambda_{n-j} \cdot x_{K^*}, \lambda_{n-i+1} \cdot x_{K^*}) \end{aligned}$$

et donc

$$d(x_{n-j}, x_{n-i+1}) - \frac{D}{3} \leq \mu_+(\gamma_i \cdots \gamma_j) \leq d(x_{n-j}, x_{n-i+1}) + \frac{D}{3}.$$

Soit maintenant i compris entre 1 et $n-1$,

$$\begin{aligned}\mu_+(\gamma_i\gamma_{i+1}) \geq & d(x_{n-i-1}, x_{n-i+1}) - \frac{D}{3} \\ \geq & d(x_{n-i-1}, x_{n-i}) + d(x_{n-i}, x_{n-i+1}) - \frac{D}{3} \\ \geq & \mu_+(\gamma_i) + \mu_+(\gamma_{i+1}) - D\end{aligned}$$

Ce qui est bien l'inégalité cherchée. □

La démonstration de ce lemme implique le corollaire suivant :

Corollaire 8. *Si Γ est un sous-groupe convexe-cocompact de G^* alors il existe D tel que pour tout R plus grand que D, il existe un système de générateurs S_R de Γ tel que, pour tout γ de Γ :*

$$(R-D)\left(\ell_{S_R}(\gamma)-1\right) \leq \mu_+(\gamma) \leq R\ell_{S_R}(\gamma)$$

En particulier, l'injection de Γ dans G^* est une quasi-isométrie.

Démonstration : Reprenons les notations du lemme précédent. L'inégalité $\mu_+(\gamma) \leq R\ell_{S_R}(\gamma)$ est évidente. On peut écrire γ comme le produit de $n+1$ éléments de S_R où n est déterminé par la longueur de du segment $\left[x, \gamma^{-1}\cdot x\right]$:

$$\begin{aligned}n\left(R-\frac{D}{2}\right) \leq & d\left(x, \gamma^{-1}\cdot x\right) \\ \leq & \mu_+(\gamma) - \frac{D}{2}\end{aligned}$$

d'où on déduit l'inégalité de gauche du corollaire. □

La version quantitative du lemme 7 nous sera utile grâce au lemme technique suivant qui montre une condition de transversalité[8] et dont la démonstration est reportée à l'annexe.

Lemme 9. *Soit D un réel positif. Il existe un compact L du groupe N^- et un réel $R \geq 0$ tel que, si a et b deux éléments de A^{*+} et k un élément de K^* vérifient*

- *$\mu_+(a) \geq R$ et $\mu_+(b) \geq R$*
- *$\mu_+(akb) \geq \mu_+(a) + \mu_+(b) - D$*

alors k appartient à LP, où $P = MA^*N$.

4. Quasi-isométrie dans un groupe de rang supérieur

Soit G un groupe de Lie semi-simple de centre fini et Γ un sous-groupe discret de G, plongé quasi isométriquement dans G. L'objectif de cette partie est de démontrer que si le groupe Γ est contenu dans un sous-groupe G^* de rang un de G, alors Γ possède un voisinage de représentations quasi isométriques.

Théorème 10. *Si G est un groupe de Lie semi-simple à centre fini et Γ un sous-groupe de type fini de G, convexe-cocompact dans un sous-groupe de rang un de G, alors il existe un voisinage U de l'injection de Γ dans G dans les représentations de Γ dans G constitué de plongements quasi isométriques.*

[8]Nous portons l'attention du lecteur sur le fait que ce lemme est spécifique au rang un.

Le fait que l'injection ι soit elle-même un plongement quasi isométrique est simplement dû à ce que le groupe Γ est plongé quasi isométriquement dans l'espace symétrique G^*/K^* et que l'espace symétrique G^*/K^* est isométrique à un sous-espace totalement géodésique de l'espace symétrique G/K.

On donne d'abord un critère qui assure qu'un morphisme ψ de Γ dans G est un plongement quasi isométrique (proposition 13). Ce critère fait intervenir l'action de Γ sur l'espace homogène G/P', où P' un sous-groupe parabolique maximal de G. Enfin il faudra montrer que ce critère est satisfait au voisinage de l'injection ι du théorème ci-dessus.

4.1. **Quelques notations.**

4.1.1. *Racines.* Donnons nous un sous-espace de Cartan A de G, soit Σ l'ensemble des racines restreintes de A dans l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$$

ici $\mathfrak{z}$ désigne le centralisateur de A et $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace propre associé à α :

$$\mathfrak{g}_\alpha = \left\{ x \in \mathfrak{g} \,/\, \mathrm{Ad}(a) \cdot x = e^{\alpha(a)} x \text{ pour tout } a \text{ dans } A \right\}$$

Le choix d'une chambre de Weyl ouverte A^+ de A permet d'écrire l'ensemble des racines Σ comme réunion de Σ^+ et de Σ^- avec Σ^+ l'ensemble des racines positives. L'ensemble des racines simples est noté Π, $\Pi \subset \Sigma^+$, et toute racine β s'écrit $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ où les n_α sont tous entiers et du même signe.

4.1.2. *Groupes paraboliques.* Soit $N_\emptyset$, le sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\sum_{\beta \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\beta$ et $B = Z_G(A)\, N_\emptyset$. Les sous-groupes paraboliques de G contenant B sont indexés par les parties de Π. A toute partie σ de Π, on note P_σ le groupe parabolique associé. Plus précisément, on pose

$$\begin{aligned} A_\sigma &= \left\{ a \in A \,/\, \alpha(a) = 0 \text{ si } \alpha \notin \sigma \right\} \\ A_\sigma^+ &= \left\{ a \in A_\sigma \,/\, \alpha(a) > 0 \text{ si } \alpha \in \sigma \right\} \\ \mathfrak{n}_\sigma &= \sum_{\beta \in \Sigma^+, \beta_{|A_\sigma^+} > 0} \mathfrak{g}_\beta \text{ et } N_\sigma = \exp(\mathfrak{n}_\sigma) \end{aligned}$$

alors $P_\sigma = Z_G(A_\sigma)\, N_\sigma$ où $Z_G(A_\sigma)$ est le centralisateur de A_σ dans G. Les paraboliques maximaux stricts de G sont de la forme P_α, α parcourant l'ensemble des racines simples.

4.1.3. *Décomposition de Cartan.* Soit K un sous-groupe compact maximal de G. La décomposition de Cartan dans G permet d'écrire tout élément g de G comme un produit $g = kak'$, où l'élément a appartient à $\overline{A^+}$ est uniquement déterminé par g et k et k' sont déterminés modulo le centralisateur de a. Ceci permet de définir sur tout le groupe G la valeur d'une racine α

$$\alpha^\vee(g) = \alpha(a).$$

Si K_σ désigne le centralisateur de A_σ dans K, *i.e.* $K_\sigma = Z_G(A_\sigma) \cap K$, alors le groupe P_σ admet la décomposition $P_\sigma = K_\sigma A N_\sigma$. De plus le quotient G/P_σ est isomorphe à K/K_σ, ce qui permet de munir G/P_σ d'une métrique riemannienne K-invariante. La boule de centre x et de rayon r dans cet espace est notée $B(x, r)$.

4.2. **Action sur G/P_σ.** On reprend P_α, N_α, $\mathfrak{n}_\alpha$, A_α et A_α^+ comme ci-dessus avec $\sigma = \{\alpha\}$. Posons

$$\mathfrak{n}_\alpha^- = \bigoplus_{\beta_{|A_\alpha^+}<0} \mathfrak{g}_\beta \text{ et } N_\alpha^- = \exp(\mathfrak{n}_\alpha^-)$$

Alors l'algèbre de Lie de G est la somme directe de $\mathfrak{n}_\alpha^-$ et de $\mathfrak{p}_\alpha$, l'algèbre de Lie de P_α, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_\alpha^- \oplus \mathfrak{p}_\alpha$ et l'orbite $N_\alpha^- \cdot P_\alpha$ est un ouvert dense[9] de G/P_α. Cette orbite est homéomorphe à $\mathfrak{n}_\alpha^-$ par l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_\alpha^- &\to G/P_\alpha \\ n &\mapsto \exp(n) \cdot P_\alpha \end{aligned}$$

De plus le groupe A agit sur ces deux espaces : par l'action adjointe sur $\mathfrak{n}_\alpha^-$ et par multiplication à gauche sur G/P_α et cette application est A-équivariante. On en déduit qu'un élément de A^+ agit de manière contractante sur cette orbite.

Les deux lemmes qui vont suivre font plus précisément le lien entre la dynamique d'un élément a de A^+ sur G/P_α et la valeur de $\alpha(a)$. Le lemme 11 établit que si un élément a de la chambre de Weyl est loin du mur défini par la racine α alors l'action de a sur G/P_α est très contractante, le lemme 12 établit une réciproque.

Lemme 11. *Soit L un compact de G/P_α, si L est inclus dans $N_\alpha^- \cdot P_\alpha$, alors il existe une constante $\nu > 0$ dépendant de L et un réel r_0 tels que pour tout a appartenant à $\overline{A^+}$, alors la restriction de a au compact L est $e^{-\nu r}$-contractante avec $r = \alpha(a) \geq r_0$. De plus si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut aussi imposer que l'image de L par a est contenue dans la boule $B(P_\alpha, \varepsilon)$ de centre P_α et de rayon ε.*

Ce lemme ne suppose pas nécessairement que L est invariant par a.

Lemme 12. *Il existe $\delta > 0$ et une constante $D \geq 0$ tels que si un élément a appartient à $\overline{A^+}$ et si l'action de a est $e^{-\delta r}$-contractante sur un ouvert non vide de G/P_α, alors $\alpha(a) \geq r - D$.*

Comme la distance sur le quotient G/P_α est invariante par K, on déduit du lemme 12 que si un élément g de G agit sur G/P_α de manière $e^{-\delta r}$-contractante alors $\alpha^\vee(g) \geq r - D$. Si la décomposition de Cartan de g s'écrit kal^{-1}, on déduit du lemme 11 que l'action de g sur $l \cdot L$ est $e^{-\nu r}$-contractante et envoie $l \cdot L$ dans $k \cdot P_\alpha, \varepsilon()$ si $r = \alpha^\vee(g) \geq r_0$.

On énonce maintenant une condition sur l'action d'un groupe Γ sur l'espace G/P_α pour que Γ soit plongé quasi isométriquement dans G.

Proposition 13. *(Critère de plongement quasi isométrique)*

Soit Γ un groupe de type fini, $\psi : \Gamma \to G$ un morphisme de groupes, et L un compact d'intérieur non vide de G/P_α inclus dans $N_\alpha^- \cdot P_\alpha$. On se donne aussi $\varepsilon > 0$ et $R > 0$.

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées pour un système fini S de générateurs de Γ :

[9] son complémentaire est réunion d'un nombre finie d'orbites de N_α^- de dimension plus petite.

– *Pour tout γ appartenant à S, si $\alpha^\vee(\psi(\gamma)) \geq R$, il existe un élément l_γ de K et x_γ^+ dans G/P_α tels que la restriction de γ à $l_\gamma \cdot L$ est $e^{-\nu R}$-contractante et γ envoie le compact $l_\gamma \cdot L$ dans la boule $B\big(x_\gamma^+, \varepsilon\big)$. La constante ν étant donnée par le lemme 11.*
– *Tout élément γ de Γ s'écrit comme un produit $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$ d'éléments de S avec :*
  – *si $i > 0$, $\alpha^\vee(\psi(\gamma_i)) \geq R$*
  – *si $0 < i < n$, alors la boule $B\big(x_{\gamma_{i+1}}^+, \varepsilon\big)$ est contenue dans $l_{\gamma_i} \cdot L$.*

Alors le morphisme ψ est un $(\mathcal{K}, C)$-plongement quasi isométrique, où $\mathcal{K}$ et C sont des constantes qui dépendent de ε, R et du compact L.

Démonstration : D'après les remarques du paragraphe 3.1.2, il suffit de prouver qu'il existe des constantes $(\mathcal{K}, C)$ telles que pour tout γ appartenant à Γ, on a l'inégalité :

$$d_{G/K}\big(\psi(\gamma) \cdot x_K, x_K\big) \geq \frac{1}{\mathcal{K}} \ell_S(\gamma) - C,$$

où G/K est l'espace symétrique de G et x_K le point correspondant à K. Or, on a facilement la majoration suivante :

$$\text{pour tout } g \text{ dans } G,\ \alpha^\vee(g) \leq d_{G/K}(g \cdot x_K, x_K).$$

Il suffit donc de prouver :

$$\text{pour tout } \gamma \text{ dans } \Gamma,\ \alpha^\vee(\psi(\gamma)) \geq \frac{1}{\mathcal{K}} \ell_S(\gamma) - C.$$

Soit alors $\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$ une décomposition de γ comme dans l'énoncé de la proposition. Comme S est fini, il existe une constante C' telle que $\alpha^\vee(\psi(\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n)) \geq \alpha^\vee(\psi(\gamma_1 \cdots \gamma_n)) - C'$. Posons $\gamma' = \gamma_1 \cdots \gamma_n$, les hypothèses impliquent que $\psi(\gamma')$ est $e^{-n\nu R}$ contractante sur le compact $l_{\gamma_n} \cdot L$ qui est d'intérieur non vide, et donc, d'après le lemme 12, $\alpha^\vee(\psi(\gamma')) \geq n\frac{\nu R}{\delta} - D$, où δ et D sont les constantes de ce même lemme. Et donc $\alpha^\vee(\psi(\gamma')) \geq \mathcal{K}^{-1}\ell_S(\gamma') - D \geq \mathcal{K}^{-1}\ell_S(\gamma) - \mathcal{K}^{-1} - D$, ce qui permet de conclure. □

Pour assurer enfin qu'une représentation ψ de Γ admet un voisinage de représentations qui sont des plongements quasi isométriques, il suffit de renforcer les hypothèses de la proposition 13 pour qu'elles soient satisfaites dans un voisinage de ψ.

L'espace des déformations $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est muni de la topologie compact-ouvert. Si S est un système (fini) de générateurs du groupe Γ, alors une base de voisinages de ψ sont les :

$$\big\{\psi' \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \ / \ \psi'(s) \in \psi(s)\,U \text{ pour tout } s \in S\big\}$$

où U est un voisinage de l'identité dans G.

La proposition suivante donne une condition pour que ψ ait un voisinage de quasi-isométries.

Proposition 14. *(Critère d'ouverture)*

Les hypothèses de la proposition 13 sont reprises, avec le renforcement suivant :
– *Tout élément γ de Γ s'écrit sous forme d'un produit $\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$ d'éléments de S avec*
  – *si $i > 0$, $\alpha^\vee(\psi(\gamma_i)) \geq R$*
  – *si $0 < i < n$, alors la boule $B\big(x_{\gamma_{i+1}}^+, 2\varepsilon\big)$ est contenue dans $l_{\gamma_i} \cdot L$.*

Il existe alors un voisinage V de ψ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ *et des constantes* $(\mathcal{K}, C)$ *tels que toute représentation ψ' dans V est un $(\mathcal{K}, C)$-plongement quasi isométrique de (Γ, d_S) dans G.*

Démonstration : On fixe $0 < \eta < \varepsilon$, tel que $R - \eta > 0$. Notons S_R le sous-ensemble de S des éléments γ tel que $\alpha^\vee(\psi(\gamma)) \geq R$ et Δ_R le sous-ensemble de $S_R \times S_R$ constitué des couples (γ, γ') tel que $B\big(x^+_{\gamma'}, 2\varepsilon\big)$ est inclus dans $l_\gamma \cdot L$.

Les hypothèses de la proposition deviennent : tout γ s'écrit comme un produit $\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$ avec

– si $i > 0$, γ_i appartient à S_R,
– si $0 < i < n$, (γ_i, γ_{i+1}) appartient à Δ_R.

et tout élément γ de S_R envoie le compact $l_\gamma \cdot L$ dans $B\big(x^+_\gamma, \varepsilon\big)$.

Il existe alors un voisinage V de ψ tel que pour tout ψ' dans V on a :

– si γ appartient à S_R, alors $\alpha^\vee(\psi'(\gamma)) \geq R - \eta$ et $\psi'(\gamma)$ envoie $l_\gamma \cdot L$ dans la boule $B\big(x^+_\gamma, \varepsilon + \eta\big)$.
– si (γ, γ') appartient à Δ_R, alors la boule $B\big(x^+_{\gamma'}, \varepsilon + \eta\big)$ est incluse dans $l_\gamma \cdot L$.

On en déduit que tout élément ψ' de V vérifie les hypothèses de la proposition 13 avec les deux remplacements :

$$R \text{ devient } R - \eta$$
$$\varepsilon \text{ devient } \varepsilon + \eta$$

et on conclut par cette même proposition. □

4.3. **Démonstration du théorème 10.** On est en fait en mesure de démontrer le théorème suivant

Théorème 15. *Soit G un groupe de Lie semi-simple à centre fini et G^* un sous-groupe de rang un de G. Soit Γ un sous-groupe de type fini de G^* plongé quasi isométriquement dans G. L'injection de Γ dans G est notée ι.*

Il existe alors :

– *un voisinage U de ι dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.
– *des constantes* $(\mathcal{K}, C)$

tels que tout élément de U est un $(\mathcal{K}, C)$-plongement quasi isométrique de Γ dans G.

Il est possible de choisir le compact maximal K de G de façon à ce que $K^* = K \cap G^*$ soit un compact maximal de G^* et aussi de choisir le sous-espace de Cartan A pour avoir $A^* = A \cap G^*$. On supposera désormais ces choix faits et aussi que la chambre de Weyl A^{*+} de G^* est incluse dans la chambre de Weyl fermée $\overline{A^+}$ de G.

Comme dans la partie 3, le groupe A^* est identifié à $\mathbb{R}$ par un morphisme $\mu : A^* \to \mathbb{R}$. De plus tout morphisme μ' de A^* dans $\mathbb{R}$ est proportionnel à μ. Pour tout racine β de A, il existe donc un réel δ_β tel que la restriction de β à A^* est égale à $\delta_\beta\mu$. Comme A^* n'est pas relativement compact dans G, il existe une racine simple $\alpha \in \Pi$ telle que $\delta_\alpha \neq 0$, et comme A^{*+} est inclus dans $\overline{A^+}$ le coefficient δ_α est strictement positif.

Démonstration du théorème 15 :

Rappelons comment se décomposent les éléments de Γ :

Il existe un réel D positif, tel que pour R plus grand que D, l'ensemble $S = \{s \in \Gamma \,/\, \mu_+(\varphi(s)) \leq R\}$ est fini et engendre le groupe Γ et si γ appartient à Γ, il existe des éléments $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de S tels que :

– $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$.
– Si $i > 0$ alors $\mu_+(\varphi(\gamma_i)) \leq R - D$.
– Si $0 < i < n$, $\mu_+(\varphi(\gamma_i\gamma_{i+1})) \geq \mu_+(\varphi(\gamma_i)) + \mu_+(\varphi(\gamma_{i+1})) - D$

Aussi en notant $\gamma_i = k_i a_i l_i^{-1}$ la décomposition de Cartan de γ_i, alors les deuxième et troisième conditions ci dessus impliquent que a_i, a_{i+1} et $l_i^{-1}k_{i+1}$ satisfont les conditions du lemme 9 et donc que k_{i+1} appartient à l_iLP où L est un compact contenu dans le groupe N^-, ceci ne vaut que si R est plus grand que R_0 où R_0 dépend de D.

On cherche maintenant à utiliser ces conditions afin de trouver des générateurs de Γ vérifiant les hypothèses de la proposition 14. Pour cela nous avons d'abord besoin de renseignements sur l'image de N^- dans G.

Lemme 16. *L'ensemble N^-P est inclus dans le produit $N_\alpha^- P_\alpha$.*

La démonstration de ce lemme est reportée à l'annexe.

Soient maintenant $D' = D/\delta_\alpha$ et L' un compact de G/P_α, inclus dans l'ouvert $N_\alpha^- \cdot P_\alpha$, et contenant l'image de L. On fixe aussi ε pour que l'ensemble $L'_\varepsilon = \{x \in G/P_\alpha \,/\, d(x, L) \leq 3\varepsilon\}$ est aussi inclus dans l'ouvert $N_\alpha^- \cdot P_\alpha$.

La décomposition des éléments de Γ peut se traduire maintenant en terme de l'action sur G/P_α, si R' est assez grand, on a

– l'ensemble $S = \{s \in \Gamma \,/\, \alpha^\vee(s) \leq R'\}$ est fini et engendre le groupe Γ.
– Si un élément γ de S vérifie $\alpha^\vee(\gamma) \geq R' - D'$, alors il existe un élément l_γ appartenant à K et un élément x_γ^+ appartenant à G/P_α, tel que l'élément γ est $e^{-\nu\alpha^\vee(\gamma)}$-contractant sur le compact $l_\gamma \cdot L'_\varepsilon$ et envoie ce compact sur la boule $B(x_\gamma^+, \varepsilon)$.
– Tout élément γ de Γ admet une décomposition $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n$ avec :
  – pour tout i, γ_i appartient à S.
  – Si $i > 0$, $\alpha^\vee(\gamma_i) \geq R' - D'$.
  – Si $0 < i < n$, alors le point $x_{\gamma_{i+1}}^+$ appartient à $l_{\gamma_i} \cdot (L' \cdot P_\alpha)$.

Ceci montre que les hypothèses de la proposition 14 sont vérifiées avec les changements de notations suivants :

$$L \text{ devient } L'_\varepsilon$$
$$R \text{ devient } R' - D'.$$

La démonstration du théorème s'ensuit. □

Annexe A. Lemmes techniques

A.1. **Démonstration du lemme 9.** Rappelons-en son énoncé :

Lemme 17. *Soit D positif donné. Il existe un compact L inclus dans le sous-groupe N^- et un réel R positif tels que si a et b appartiennent à A^{*+} et si k appartient à K^*, a, b, k vérifiant :*

– *$\mu_+(a) \geq R$ et $\mu_+(b) \geq R$,*
– *$\mu_+(akb) \geq \mu_+(a) + \mu_+(b) - D$*

Alors l'élément k appartient à $L \cdot P$.

Démonstration : La conclusion s'écrit encore que l'élément $k \cdot P$ du bord de $\partial X \simeq G^*/P$ appartient à un compact L inclus dans l'ouvert $N^- \cdot P$. Le bord de X est l'ensemble des classes d'équivalence de demi-rayons géodésiques, il faut alors montrer qu'il existe un compact L inclus dans $N^- \cdot (A^{*+} \cdot x_{K^*}) = \partial X - \{A^{*-} \cdot x_{K^*}\}$ tel que $k \cdot (A^{*+} \cdot x_{K^*})$ appartient à L. Autrement dit on cherche un voisinage U de $A^{*-} \cdot x_{K^*}$ dans le bord ∂X tel que

si $\mu_+(a)$ et $\mu_+(b)$ sont assez grands et $\mu_+(akb) \geq \mu_+(a) + \mu_+(b) - D$,
alors $k \cdot (A^{*+} \cdot x_{K^*})$ n'appartient pas à U.

Notons $\gamma^+ : \mathbb{R}^+ \to X$ le demi-rayon géodésique tel que $\gamma^+(\mathbb{R}^+) = A^{*+} \cdot x_{K^*}$ et de même γ^- le demi-rayon géodésique associé à $A^{*-} \cdot x_{K^*}$.

D'après le lemme des ombres (voir par exemple le lemme 1.6.2 de [Bou95]), il existe $H > 0$ tel qu'une base de voisinage de γ^- dans le bord de X sont les :

$$U_{t_0} = \big\{\text{demi-rayon } \gamma \,/\, \gamma(0) = x_{K^*} \text{ et } d_X\big(\gamma(t_0)\,,\gamma^-(t_0)\big) \leq H\big\}$$

Posons aussi $t_a = \mu_+(a)$ et $t_b = \mu_+(b)$, ainsi $a \cdot x_{K^*} = \gamma^+(t_a)$ et $b^{-1} \cdot x_{K^*} = \gamma^-(t_b)$. L'hypothèse de l'énoncé s'écrit donc :

$$d_X\big(k \cdot \gamma^+(t_a)\,,\gamma^-(t_b)\big) \geq t_a + t_b - D$$

Supposons maintenant que t_a et t_b sont plus grands que t_0 et que $k \cdot \gamma^+$ appartient à l'ouvert U_{t_0}, alors

$$\begin{aligned} d_X\big(k \cdot \gamma^+(t_a)\,,\gamma^-(t_b)\big) &\leq d_X\big(k \cdot \gamma^+(t_a)\,, k \cdot \gamma^+(t_0)\big) \\ &\quad + d_X\big(k \cdot \gamma^+(t_0)\,,\gamma^-(t_0)\big) + d_X\big(\gamma^-(t_0)\,,\gamma^-(t_b)\big) \\ &\leq (t_a - t_0) + H + (t_b - t_0) \\ &\leq t_a + t_b + H - 2t_0 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $H - 2t_0 \geq -D$ et que $t_0 \leq \frac{H+D}{2}$. On obtient donc une contradiction si l'on fixe $t_0 > \frac{H+D}{2}$ et $R \geq t_0$. □

A.2. **Démonstration des lemmes de la partie 4.2.** On reprend les notations de cette même partie.

Lemme 18. *Pour tout compact L de G/P_α inclus dans $N_\alpha^- \cdot P_\alpha$, il existe une constante $\nu > 0$ et un réel r_0 tels que si a appartient à $\overline{A^+}$ et est tel que $r = \alpha(a) \geq r_0$, alors l'action de a sur le compact L est $e^{-\nu r}$-contractante.*

Démonstration : On sait que cette conclusion est vraie pour l'action de $\mathrm{Ad}(a)$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_\alpha^-$, *i.e.* la restriction de $\mathrm{Ad}(a)$ à $\mathfrak{n}_\alpha^-$ est $e^{-\nu r}$ contractante si $r = \alpha(a)$. De plus on sait que

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_\alpha^- &\to N_\alpha^- \cdot P_\alpha \\ n &\mapsto \exp(n) \cdot P_\alpha \end{aligned}$$

est un homéomorphisme A-équivariant, donc sa restriction à un compact est bilipschitzienne. □

Le deuxième lemme à montrer est le suivant :

Lemme 19. *Il existe $\delta > 0$ et une constante $D \geq 0$ tels que si un élément a de $\overline{A^+}$ agit de manière $e^{-\delta r}$-contractante sur un ouvert de G/P_α, alors $\alpha(a) \geq r - D$.*

Démonstration : On suppose que G/P_α est muni d'une structure riemannienne. Soit $U_{-\alpha}$ un élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } a \text{ dans } A,\ \mathrm{Ad}(a)\cdot U_{-\alpha} = e^{-\alpha(a)}U_{-\alpha}$$

L'élément $U_{-\alpha}$ permet de définir un champ de vecteurs $\widehat{U}_{-\alpha}$ sur G/P_α par la formule suivante :

$$\text{si } x \text{ appartient à } G/P_\alpha,\ \widehat{U}_{-\alpha}(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(tU_{-\alpha})\cdot x$$

Si a appartient à A, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}a_x \cdot \widehat{U}_{-\alpha}(x) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} a\cdot \exp(tU_{-\alpha})\cdot x \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(t\mathrm{Ad}(a)\cdot U_{-\alpha})\cdot ax \\ &= e^{-\alpha(a)}\widehat{U}_{-\alpha}(ax) \end{aligned} \tag{2}$$

Si de plus a est $e^{-\delta r}$ contractante au voisinage de x, alors

$$\left\| e^{-\alpha(a)}\widehat{U}_{-\alpha}(ax) \right\| \leq e^{-\delta r}\left\| \widehat{U}_{-\alpha}(x) \right\|$$

Donc, si $\left\|\widehat{U}_{-\alpha}(ax)\right\| \neq 0$

$$\alpha(a) \geq \delta r - \log \frac{\left\|\widehat{U}_{-\alpha}(x)\right\|}{\left\|\widehat{U}_{-\alpha}(ax)\right\|}$$

ce qui permet de conclure si l'on peut majorer $\frac{\|\widehat{U}_{-\alpha}(x)\|}{\|\widehat{U}_{-\alpha}(ax)\|}$ indépendamment de x et de a. Il reste donc à démontrer les deux assertions suivantes :
- l'ensemble des x tel que $\widehat{U}_{-\alpha}(x) \neq 0$ est dense dans G/P_α,
- il existe une constante C, telle que pour tout x dans G/P_α et pour tout a dans $\overline{A^+}$, $\left\|\widehat{U}_{-\alpha}(x)\right\| \leq C\left\|\widehat{U}_{-\alpha}(ax)\right\|$.

La première se règle facilement par l'analycité du champ $\widehat{U}_{-\alpha}$ et permet de trouver un x appartenant à U tel que $\widehat{U}_{-\alpha}(x)$ est non nul et d'après l'égalité (2) on aura aussi $\widehat{U}_{-\alpha}(ax)$ non nul.

Montrons le deuxième point : soit p la dimension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_\alpha$. Dans la représentation de G sur l'espace $\bigwedge^p \mathfrak{g}$, le stabilisateur de la droite $\bigwedge^k \mathfrak{p}_\alpha$ est exactement le groupe P_α. Ceci permet de plonger l'espace quotient G/P_α dans l'espace projectif $\mathbb{P}\big(\bigwedge^k \mathfrak{g}\big) \simeq \mathrm{SL}\big(\bigwedge^k \mathfrak{g}\big)/\mathrm{Stab}\big(\bigwedge^k \mathfrak{p}_\alpha\big)$. Ensuite on peut choisir une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\bigwedge^k \mathfrak{g}$ pour laquelle :
- e_1 appartient à la droite $\bigwedge^p \mathfrak{p}_\alpha$
- un élément de A^+ s'envoie sur une matrice diagonale à coefficients positifs $\mathrm{diag}\big(e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_n}\big)$, avec si $i > 1$, $\beta_1 - \beta_i \geq 0$
- L'élément $U_{-\alpha}$ s'envoie sur un élément de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ * & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

et qui est une valeur propre pour tout élément de A.

Ce qui conclut par le calcul suivant dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$:

Calcul. *Soit U un élément de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ * & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$. *et $\widehat{U}$ le champ de vecteur associé à U sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Il existe une constante C tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ et tout $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, avec $\lambda_1 \geq \lambda_i$, i entre 2 et n, si U est un vecteur propre de D , on a*

$$\left\| \widehat{U}(x) \right\| \leq C \left\| \widehat{U}(Dx) \right\|.$$

Démonstration du calcul : Il n'est pas restrictif de supposer que la première colonne de U est ${}^t(0,1,0,\ldots,0)$. L'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ est le quotient de la sphère de $\mathbb{R}^n$ et l'on munit $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ de la structure riemannienne quotient[10]. Si $x = [x_1, \ldots, x_n]$ est un point de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, posons $X = (x_1, \ldots, x_n)$, on vérifie que :

$$\left\| \widehat{U}(x) \right\| = \frac{x_1^2}{\|X\|^2} \left(1 - \frac{x_2^2}{\|X\|^2} \right)$$

et aussitôt que $\left\| \widehat{U}(Dx) \right\| \leq \left\| \widehat{U}(x) \right\|$. □

Ceci termine la démonstration du lemme. □

A.3. **Démonstration du lemme 16.** Notons ici σ le sous-ensemble des racines simples dont la restriction à A^* est non nulle. Il fallait montrer que, pour toute racine α appartenant à σ, l'ensemble N^-P était inclus dans $N_\alpha^- P_\alpha$. Or on a les factorisations suivantes de P, P^-, P_α, P_α^-

$$P = Z_{G^*}(A^*)\, N \text{ et } P^- = Z_{G^*}(A^*)\, N^-$$
$$P_\alpha = Z_G(A_\alpha)\, N_\alpha \text{ et } P_\alpha^- = Z_G(A_\alpha)\, N_\alpha^-$$

Ce qui montre que $N^-P = P^-P$ et de même que $N_\alpha^- P_\alpha = P_\alpha^- P_\alpha$. Il suffit donc de montrer que le groupe P est inclus dans P_α et de même que P^- inclus dans P_α^-.

On va en fait montrer le résultat un peu plus précis suivant : le groupe P est contenu dans le groupe P_σ. On va pour cela utiliser la caractérisation géométrique suivante de P_σ, notons $Y = G/K$ l'espace symétrique associé à G et x_K le point de Y correspondant à K.

Caractérisation géométrique de P_σ. Soit $a(t)$ un sous-groupe à un paramètre de A^+ avec pour $t > 0$, $a(t)$ appartient à A_σ^+. Alors

$$P_\sigma = \left\{ g \in G \,/\, \sup_{t>0} d_Y(g \cdot a(t) \cdot x_K, a(t) \cdot x_K) < \infty \right\}$$

De même, le sous-groupe parabolique P admet une même caractérisation :

$$P = \left\{ g \in G^* \,/\, \sup_{a \in A^{*+}} d_X(g \cdot a \cdot x_{K^*}, a \cdot x_{K^*}) < \infty \right\}$$

où X est l'espace symétrique de G^*.

[10]On peut changer de métrique, elles sont toutes équivalentes.

Comme X est un sous-espace totalement géodésique de Y, on a alors l'inclusion

$$P \subset \left\{ g \in G \,/\, \sup_{a \in A^{*+}} d_Y(g \cdot a \cdot x_K, a \cdot x_K) < \infty \right\}$$

or A^* est un sous-groupe à un paramètre de A qui satisfait bien les hypothèses de la caractérisation géométrique de P_σ, on obtient donc que P est inclus dans P_σ ce qu'on voulait démontrer.

Démonstration de la caractérisation géométrique :

Posons $R = \left\{ g \in G \,/\, \sup_{t>0} d_Y(g \cdot a(t) \cdot x_K, a(t) \cdot x_K) < \infty \right\}$. Il est facile de voir que si p est dans P_σ alors l'ensemble $\left\{ a(t)^{-1} pa(t) \right\}_{t>0}$ est relativement compact et donc p est dans R. Soit maintenant un élément g tel que

$$\sup_{t>0} d_Y(g \cdot a(t) \cdot x_K, a(t) \cdot x_K) < \infty$$

Si l'on écrit $g = pk$ avec p dans P_σ et k dans K, on vient de voir que p est aussi dans R, on obtient :

il existe C tel que pour tout $t > 0$, $d_X(k \cdot a(t) \cdot x_K, a(t) \cdot x_K) \leq C$

Les deux demi-rayons géodésiques $k \cdot a(t) \cdot x_K$ et $a(t) \cdot x_K$ sont donc à distance finie l'un de l'autre et ont même origine, ce qui implique qu'ils sont confondus. On en déduit que k appartient à $Z_G(a(t)) = Z_G(A_\sigma) \subset P_\sigma$ et donc que h appartient P_σ. $\square$

Références

[Bou95] M. Bourdon – « Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace », *Enseign. Math.* **41** (1995), no. 1-2, p. 63–102.

[GdlH90] É. Ghys P. de la Harpe – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, PM vol. 83, Birkhäuser., Boston, MA, 1990.

[Lab03] F. Labourie – « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », pre-print, 2003.