Université de Strasbourg
FCR
P. Guillot & J. Narboux

FCR – Exercices

Sur le §2 « Le discours mathématique »

Exercice 1. Pour chacune des expressions ci-dessous, indiquer s'il s'agit d'une proposition (= *quelque chose qui peut être vrai ou faux*), ou de la description d'un objet mathématique. Puis, identifier les variables, et préciser lesquelles sont muettes.

1. L'équation $2x + 3 = c$, d'inconnue réelle x, a une solution positive.
2. Pour tout x, on a $mx^2 + 4x + 4 > 0$.
3. L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 3$ cm.
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$.
5. $\displaystyle\int_0^1 e^{at}\,\mathrm{d}t$.
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} \neq 0$.
7. $\sum_{k=1}^{n} k$.
8. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - xy = 0$, d'inconnues réelles x et y.
9. $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$.
10. $\lim_{n\to+\infty} u_n > 0$.
11. $\{a \in \mathbb{R} \mid$ l'application $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est croissante au sens large sur $[0, +\infty[\}$.

Exercice 2. Parmi ces propositions, préciser celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ n \leq p$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ n \geq p$
3. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ n \leq p$
4. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ n \geq p$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Parmi les propositions ci-dessous, regrouper celles qui sont équivalentes.

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f n'est pas la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas de signe constant.
4. La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.
6. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$.
7. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$.
8. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) < 0$.
10. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) > 0$.
11. $(\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0) \wedge (\exists y \in \mathbb{R} \quad f(y) > 0)$.

Exercice 4. Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$. Pour chacune des propositions suivantes, donner une proposition équivalente en utilisant seulement les quantificateurs, les connecteurs, des variables et les symboles d'égalité et d'inégalité (large ou stricte).

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle I.
2. La fonction f n'est pas croissante sur l'intervalle I.
3. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.
4. La fonction f admet un maximum sur l'intervalle I.
5. La fonction f est bornée sur l'intervalle I.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels. Regrouper les propositions équivalentes.

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
2. Les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sont tous positifs à partir d'un certain rang.
3. $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes positifs.
4. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne s'annule jamais.
6. Il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel $n \geq k$, on a $u_n \geq 0$.
7. Quel que soit l'entier naturel k, quel que soit l'entier naturel $n \geq k$, on a $u_n \geq 0$.
8. Quel que soit l'entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
9. Il existe un réel a tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq a$.
10. Quel que soit l'entier naturel n, on a $u_n \geq 0$.
11. Il existe un entier naturel n tel que $u_n \neq 0$.
12. Quel que soit l'entier naturel n, on a $u_n \neq 0$.

Exercice 6. On considère l'assertion

« Si f est dérivable, alors elle est continue. »

Quelle est sa contraposée, et quelle est sa réciproque ? L'une ou l'autre est-elle vraie ?

Exercice 7. Considérons les assertions suivantes :

(A) m et n sont des entiers pairs.

(B) $m + n$ est un entier pair.

L'assertion A est-elle une condition suffisante, une condition nécessaire, une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait B ?

Ensuite, même question avec les assertions suivantes, dans lequelles la variable n désigne un entier naturel :

(A) $n + \sqrt{2}n = 4$.

(B) $n = 2$.

Exercice 8. On considère les propositions :

(A) D et D' sont parallèles

(B) D et D' n'ont aucun point en commun

(C) D et D' sont confondues

Utiliser les lettres A, B, C et les connecteurs logiques pour reformuler les propositions suivantes :

1. D et D' sont parallèles si elles n'ont aucun point en commun ou si elles sont confondues.
2. D et D' ne sont ni parallèles, ni confondues.
3. Si D et D' n'ont aucun point en commun, alors elles sont parallèles.
4. Pour que D et D' soient parallèles, il faut qu'elles n'aient aucun point commun.
5. Si D et D' ont un point commun, elles ne sont pas parallèles, sauf si elles sont confondues.
6. Soit D et D' n'ont aucun point en commun, soit elles sont confondues.
7. Si D et D' ne sont pas confondues, alors pour qu'elles soient parallèles, il suffit qu'elles n'aient aucun point en commun.

Attention ! Ici évidemment on a envie d'interpréter la situation en imaginant que D et D' sont des droites du plan, mais il faut noter deux choses : d'abord, l'exercice peut se faire sans interprétation ; ensuite, dans cette interprétation, certaines des propositions sont fausses...

Exercice 9. On considère trois réels x, y et z tels que

1. l'un de ces trois nombres est nul, et les deux autres sont de signes contraires,
2. $y = 0 \implies x > 0$,
3. $y > 0 \implies x < 0$,
4. $x \neq 0 \implies z > 0$.

Peut-on comparer les nombres x, y, z ?

Exercice 10. On s'intéresse à la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq a \implies |x^2 - 1| \leq 1\,. \tag{*}$$

Examiner si (*) est vraie pour $a = 1$, puis $a = 2$, et enfin $a = -1$. Ensuite, trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (*) soit vraie.

Exercice 11. Nier la proposition : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

Exercice 12. Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.

Sur le §3 « Les règles de raisonnement »

Exercice 13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad x \leq \varepsilon) \implies x \leq 0\,.$$

Exercice 14. On dit que le réel x est *rationnel* si

$$\exists a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z} \quad (b \neq 0) \wedge (x = \frac{a}{b})\,.$$

On dit que x est *irrationnel* lorsqu'il n'est pas rationnel.

Montrer que le produit d'un irrationnel par un rationnel non nul est irrationnel.

Exercice 15. Soit n un entier. On suppose que n est la somme de deux carrés d'entiers. Montrer que le reste dans la division de n par 4 n'est jamais 3.

Exercice 16. On demande à un étudiant de trouver tous les réels x tels que $\sin(x) = \cos(x)$. Voici le raisonnement.

On calcule

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \frac{\pi}{2} - x &= \pm x \\ x &= \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

La seule solution est donc $x = \frac{\pi}{4}$.

Cette réponse est incorrecte. Trouver la faute dans le raisonnement, et donner la bonne réponse.

Exercice 17. On demande à un étudiant de trouver tous les réels x tels que $-2 \leq x \leq 1$ et tels que $1 - \sqrt{1-x} = \sqrt{2+x}$. Voici le raisonnement.

On calcule

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1-x} &= \sqrt{2+x} \\ 1 - x - 2\sqrt{1-x} &= 2 + x \\ x &= \sqrt{1-x} \\ x^2 + x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $-2 \leq x \leq 1$, on en déduit que $x = (-1+\sqrt{5})/2$.

Vérifier (par exemple à l'aide d'une calculatrice) que cette réponse est incorrecte, identifier l'erreur, puis trouver les solutions correctes.

Exercice 18. Sous l'hypothèse $x \geq 0$, on a réussi à démontrer que $x < 0$. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

Sur le §4 « Ensembles »

Exercice 19.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le sous-ensemble $A = \mathbb{R} \times [0,1]$. Indiquer, en justifiant, quelles affirmations sont vraies :
   (a) $\forall x \exists y \quad (x,y) \in A$.
   (b) $\exists x \forall y \quad (x,y) \in A$.
   (c) $\forall y \exists x \quad (x,y) \in A$.
   (d) $\exists y \forall x \quad (x,y) \in A$.
2. Même questions avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.
3. Peut-on trouver une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que (a) et (d) soient faux, et (b) et (c) soient vrais ?
4. Peut-on trouver une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que (a) et (c) soient faux, et (b) et (d) soient vrais ?

Exercice 20. Compléter, quand c'est possible, avec le symbole $\in$ ou $\subset$:

1. $0 \ldots [0,1]$
2. $\{a\} \ldots \{a,b,c\}$
3. $\{3\} \ldots \mathbb{N}$
4. $\{0,1\} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{N})$
5. $0 \ldots \mathscr{P}(\{0,1\})$
6. $[0,1] \ldots \mathscr{P}([0,1])$
7. $\mathbb{N} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{R})$
8. $[0,1] \ldots [0,1] \cup [3,4]$
9. $\emptyset \ldots \{1,2,3\}$
10. $\{\emptyset\} \ldots \{1,2,3\}$
11. $3 \ldots [0,1] \cup \{3\}$
12. $\{4\} \ldots \{0,1\} \cup [3,4]$

Exercice 21. Dans cet exercice, A, B et C sont des parties d'un ensemble E. Reformuler les énoncés suivants en termes de propriétés de leurs éléments. (Exemple : $A = B$ peut se reformuler en $\forall x \in E \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$.)

1. $A \subset B$
2. $A \not\subset B$

3. $A \subset E \smallsetminus B$
4. $A \cup B \subset C$
5. $A \subset B \cap C$
6. $A \neq B$
7. $A \cap B = \emptyset$
8. $A = \emptyset$

Exercice 22. Soient A, B deux parties de l'ensemble E.

1. Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$, où l'inconnue est $X \in \mathscr{P}(E)$.
2. Même chose avec $A \cap X = B$.

Exercice 23.

1. Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\}))$.
2. Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\{a, \{a\}\})$.

Sur le §5 « Fonctions »

Exercice 24. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $g(n) = f_n(n) + 1$.

Montrer qu'il n'existe aucun entier p tel que $g = f_p$.

Exercice 25. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ? injectives ?

1. La fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$.
2. La fonction $g\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie par $g(\emptyset) = 0$, et si $X \neq \emptyset$, alors $g(X) =$ le plus petit élément de X.

Exercice 26. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction.

1. Soient A, B des parties de X. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, et enfin donner un exemple où cette inclusion est stricte.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A, B \in \mathscr{P}(X) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A, B \in \mathscr{P}(X) \quad Y \smallsetminus f(A) = f(X \smallsetminus A)$.
4. Soient C, D des parties de Y. (On rappelle que $f^{-1}(C)$ a un sens, même sans supposer que f est une bijection !) Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, puis que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, et enfin que $f^{-1}(Y \smallsetminus C) = X \smallsetminus f^{-1}(C)$.

Exercice 27. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 28. Soit $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$. Montrer que

1. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, et si g est injective, alors f est surjective ;
3. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
4. si $g \circ f$ est injective, et si f est surjective, alors g est injective.

Exercice 29. On considère

$$P = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0, y > 0\}.$$

Par ailleurs, soit $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

Montrer que

$$f(P) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 > 1 \text{ et } y < 0\}.$$

Décrire P et $f(P)$ géométriquement.

Exercice 30. Soit E un ensemble, et soit A une partie de E. On définit $f_A\colon \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ par $f_A(X) = X \cap A$, et $g_A\colon \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ par $g_A(X) = X \cup A$.

1. Montrer que f_A est injective si et seulement si $A = E$.
2. Montrer que g_A est surjective si et seulement si $A = \emptyset$.

Sur le §6 « Relations »

Exercice 31. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, ayant fixé un entier n, on définit une relation $\equiv$ en spécifiant que $x \equiv y$ signifie « n divise $x - y$ ». Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.

Exercice 32. Soit R la relation sur les couples d'entiers relatifs définie de la manière suivante :

$$(x, y)R(z, t) \underset{\text{def}}{\iff} x + t = y + z\,.$$

Montrer que R est une relation d'équivalence.

Exercice 33. Quelle est l'erreur dans le raisonnement suivant ?

Supposons qu'une relation R est symétrique et transitive. Alors pour tout x, d'après la symétrie, on a $x\ R\ y$ implique $y\ R\ x$. D'après la transitivité, on a $x\ R\ y$ et $y\ R\ x$ implique $x\ R\ x$. Donc toute relation symétrique et transitive est réflexive.

Exercice 34. Soient $\leq_i$ un ordre sur l'ensemble X_i, pour $i = 1, 2$. Montrer que l'ordre lexicographique sur $X_1 \times X_2$ est bien un ordre.

Exercice 35. Soit Ω un ensemble totalement ordonné. Si $A \subset \Omega$ et si $x \in \Omega$, on dit que x est *un majorant de* A si $\forall a \in A \quad a \leq x$. On dit que $x \in \Omega$ est *le plus grand élément de* A si x est un majorant de A qui vérifie de plus $x \in A$.

On vous laisse imaginer les définitions de « minorant de A » et « plus petit élément de A ».

On dit que $x \in \Omega$ est *la borne supérieure de* A si c'est le plus petit élément de

$$\{M \in \Omega \mid M \text{ est un majorant de } A\}\,.$$

(Il est donc possible qu'un ensemble n'ait pas de borne supérieure.)

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1[$. Montrer que

   $$\{M \in \Omega \mid M \text{ est un majorant de } A\} = [1, +\infty[\,.$$

   Montrer que 1 est la borne supérieure de A. Par contre, montrer que A ne possède pas de plus grand élément.
2. Montrer que, si x et x' vérifient tous les deux la définition de « plus grand élément de A », alors $x = x'$. (Ça justifie que l'on dise de x que c'est « le » plus grand élément. On le note parfois $\max(A)$.)
3. Montrer que si A possède un plus grand élément, alors cet élément est également la borne supérieure de A.
4. Montrer l'unicité de la « borne supérieure ». (En général on note $\sup(A)$ la borne supérieure de A, lorsqu'elle existe.)
5. (*Plus difficile.*) Soit $\Omega = \mathbb{Q}$ et $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$. Montrer que A possède des majorants, mais pas de borne supérieure.

Sur le §7 « Les entiers »

Exercice 36. Soit x un entier fixé.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

   $$x^{n+1} - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)\,.$$

   (*C'est une formule que vous devez connaître !*)
2. En déduire que $10^n - 1$ est toujours divisible par 9, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la petite règle suivante : pour qu'un entier m soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres (lorsqu'on l'écrit en base 10) soit divisible par 9.

Exercice 37. Montrer que pour tout $a_1, \dots, a_m \in]0,1[$, avec $m \geq 2$, on a

$$\prod_{i=1}^{m}(1-a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{m} a_i \,.$$

Exercice 38. La suite de Fibonnaci $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \,.$$

1. Écrire un petit programme Python pour calculer les termes de la suite.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n \,.$$

3. Montrer que $u_n \leq 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 39. On considère trois propriétés qui dépendent d'un entier $n \in \mathbb{N}$:

1. 3^n est pair.
2. $10^n + 1$ est multiple de 9.
3. $2^n \geq (n+1)^2$.

Écrivons P pour l'une de ces propositions. Dans chaque cas, montrer que $P(n) \implies P(n+1)$. Puis, en tirer une conclusion (attention, les trois ne sont pas toutes du même genre).

Exercice 40. *Cet exercice fait références aux polynômes, et un tout petit peu à la notion de dérivée. On rappelle que $f^{(n)}$, la n-ième dérivée de f, est définie par récurrence par $f^{(0)} = f$, et $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$. (Cette définition ne s'applique pas à toutes les fonctions : certaines ne sont même pas dérivables une fois !)*

1. En raisonnant par récurrence sur le degré des polynômes, montrer que, pour toute fonction polynôme P, il existe un entier k tel que $P^{(k)} = 0$.
2. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = e^x$.

Sur le §8 « Dénombrement »

Exercice 41. Soit X un ensemble de cardinal n, soit Y un ensemble de cardinal m, et soit Y^X l'ensemble de toutes les fonctions $X \to Y$. Montrer que Y^X est en bijection avec Y^n, et en déduire le cardinal de Y^X.

Exercice 42. Calculer le cardinal de $\mathscr{P}(X)$, où X est un ensemble de cardinal n, à l'aide de la formule du binôme.

Exercice 43. Soit X un ensemble. On écrit (comme dans un exercice précédent) $\{0,1\}^X$ pour l'ensemble des fonctions $X \to \{0,1\}$. On considère alors la fonction

$$\chi \colon \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}^X$$

$$A \mapsto \chi_A$$

où χ_A est la *fonction caractéristique de* A, définie elle-même par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ sinon. (Il est standard d'écrire χ_A au lieu de $\chi(A)$, et ça évite de devoir écrire $\chi(A)(x)$ pour $\chi_A(x)$.)

Montrer que χ est une bijection. Lorsque X est de cardinal n, en déduire le calcul du cardinal de $\mathscr{P}(X)$, et comparer avec l'exercice précédent.

Exercice 44. Calculer $\displaystyle\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.

Indication : si on appelle p et i ces deux sommes, alors $p+i$ et $p-i$ sont faciles à calculer...

Exercice 45. Pour $1 \leq k \leq n$ montrer l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Pouvez-vous trouver une démonstration « sans calculs » ?

Exercice 46. En calculant de deux façons différentes le coefficient de x^n dans l'expression $(1+x)^{2n}$ prouver pour tout entier $n \geq 1$ la formule :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

---

http://www-irma.u-strasbg.fr/~guillot/teaching.html