Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, guillot@math.unistra.fr

1 – Logique, ensembles, fonctions

Logique

Exercice 1 (Les syllogismes de Lewis Carroll)**.** On propose une série de ≪ syllogismes ≫, des petits raisonnements, dont certains sont faux. Le but de l'exercice est d'identifier les raisonnements corrects.

1. Quelques gourmets manquent de générosité. Tous mes oncles sont généreux. *Donc* : Mes oncles ne sont pas des gourmets.
2. Aucun avare n'est altruiste. Personne, excepté les avares, ne conserve les coquilles d'oeufs. *Donc* : Aucune personne altruiste ne conserve les coquilles d'oeufs.
3. Aucun docteur n'est enthousiaste. Vous êtes enthousiaste. *Donc* : Vous n'êtes pas docteur.
4. Je l'ai lu dans un journal. Tous les journaux racontent des mensonges. *Donc* : C'est un mensonge.
5. Quelques cravates sont de mauvais goût. J'admire tout ce qui est de bon goût. *Donc* : Il y a quelques cravates que je n'admire pas.
6. Quelques chandelles éclairent très mal. Les chandelles sont faites pour éclairer. *Donc* : Quelques objets qui sont faits pour éclairer le font très mal.
7. Tous les lions sont féroces. Quelques lions ne boivent pas de café. *Donc* : Quelques créatures qui ne boivent pas de café sont féroces.
8. Aucun fossile ne peut être malheureux en amour. Une huître ne peut être malheureuse en amour. *Donc* : Les huîtres ne sont pas des fossiles.
9. Tous les gens sans instruction sont superficiels. Les étudiants ont tous de l'instruction. *Donc* : Aucun étudiant n'est superficiel.
10. Une affaire mal dirigée ne fait pas de bénéfices. Les chemins de fer ne sont jamais mal dirigés. *Donc* : Tous les chemins de fer font des bénéfices.
11. Aucun professeur n'est ignorant. Les gens ignorants sont vains. *Donc* : Aucun professeur n'est vain.
12. Tout homme prudent évite les hyènes. Aucun banquier n'est imprudent. *Donc* : Aucun banquier ne manque jamais d'éviter les hyènes.
13. Aucun singe n'est soldat. Tous les singes sont malicieux. *Donc* : Quelques créatures malicieuses ne sont pas des soldats.
14. Quelques oreillers sont moelleux. Aucun tisonnier n'est moelleux. *Donc* : Quelques tisonniers ne sont pas des oreillers.
15. Une histoire invraisemblable n'est pas facile à croire. Aucune de ses histoires n'est vraisemblable. *Donc* : Aucune de ses histoires n'est facile à croire.
16. Personne en faillite n'est riche. Quelques commerçants ne sont pas en faillite. *Donc* : Quelques commerçants sont riches.
17. Aucune brouette n'est confortable. Aucun véhicule inconfortable n'a de succès. *Donc* : Aucune brouette n'a de succès.
18. Aucune grenouille n'est poète. Quelques canards ne sont pas poètes. *Donc* : Quelques canards ne sont pas des grenouilles.
19. Aucun empereur n'est dentiste. Tous les dentistes sont redoutés par les enfants. *Donc* : Aucun empereur n'est redouté par les enfants.
20. Tous les aigles peuvent voler. Quelques cochons ne peuvent pas voler. *Donc* : Quelques cochons ne sont pas des aigles.

Exercice 2. On donne la première partie d'un syllogisme, il s'agit de trouver une conclusion valide (il peut y en avoir plusieurs). Attention : dans certains cas, il n'y a aucune conclusion.

1. Aucun Français n'aime le pudding. Tous les Anglais aiment le pudding. *Donc* : ...
2. Aucun vieil avare n'a l'air joyeux. Certains vieux avares sont maigres. *Donc* : ...
3. Quelques tableaux ne sont pas des coups d'essai. Aucun coup d'essai n'est vraiment réussi. *Donc* : ...
4. Tous les gens intelligents sont populaires. Tous les gens serviables sont populaires. *Donc* : ...
5. Ce qui est compréhensible ne m'intrigue jamais. La logique m'intrigue. *Donc* : ...
6. Aucun pays déjà exploré n'est infesté de dragons. Les pays inexplorés excitent l'imagination. *Donc* : ...
7. Aucun quadrupède ne sait siffler. Quelques chats sont des quadrupèdes. *Donc* : ...
8. Tout voyageur prévoyant a beaucoup de monnaie sur lui. Tout voyageur imprévoyant perd ses bagages. *Donc* : ...
9. Toute explication claire est convaincante. Certaines excuses ne sont pas convaincantes. *Donc* : ...

Exercice 3. Nier la proposition : ≪ tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ≫.

Exercice 4. Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x+1$;
4. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.

Ensembles

Exercice 5. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 6. Démontrer les relations suivantes :

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ et $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Exercice 7. Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$(F \subset G \iff F \cup G = G)$ et $(F \subset G \iff {}^cF \cup G = E)$.

En déduire que :

$(F \subset G \iff F \cap G = F)$ et $(F \subset G \iff F \cap {}^cG = \emptyset)$.

Dans cet exercice, et dans la suite, on a noté ${}^cA$ pour le complémentaire de A dans E.

Exercice 8. On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+y<1\} \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x+y|<1\} \\ A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x|+|y|<1\} \\ A_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+y>-1\} \\ A_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x-y|<1\} \end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x+y|<1 \text{ et } |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

Exercice 9. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 10. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 11. A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$${}^cA \cup {}^cB = {}^c(A \cap B) \quad \text{et} \quad {}^cA \cap {}^cB = {}^c(A \cup B).$$

Fonctions

Exercice 12. Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) injective et non surjective, puis surjective et non injective.

Exercice 13. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 14. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 15. Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1]\cup[-2,1])$ et $f([-3,-1]\cap[-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 16. On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$
$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 17. Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X\ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X\ f({}^cA) = {}^cf(A)$.

Exercice 18. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Exercice 19. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 20. Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1-f$.
2. fg.
3. $f+g-fg$.

Exercice 21. Si A et B sont des ensembles, les fonctions de A vers B forment un nouvel ensemble, que l'on va noter ici B^A.

1. Soit E un ensemble. Trouver une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$.
2. Soit E un ensemble à n éléments. Utiliser la question précédente pour trouver le nombre d'élements de $\mathcal{P}(E)$.