Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

---

2 – Nombres

Récurrences

Exercice 1. Montrer par récurrence que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Pouvez-vous trouver une démonstration sans récurrence ?

Exercice 2.
1. Montrer par récurrence que $3^{2n+6} - 2^n$ est divisible par 7, pour tout n.
2. Même chose avec $3^{2n+4} - 2^n$?

Nombres binomiaux

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\sum_{p \text{ pair}} \binom{n}{p}$ et $\displaystyle\sum_{p \text{ impair}} \binom{n}{p}$.

Exercice 4. Pour $1 \leq k \leq n$ montrer l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Pouvez-vous trouver une démonstration « sans calculs » ?

Exercice 5. En calculant de deux façons différentes le coefficient de x^n dans l'expression $(1+x)^{2n}$ prouver pour tout entier $n \geq 1$ la formule :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Nombres complexes

Exercice 6. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

a) $(2+3i)^2$ b) $(1+i)^3$ c) $\dfrac{1}{1+2i}$ d) $\dfrac{2+i}{1+i}$

e) i^{41} f) $\dfrac{(2+i)^2}{(2-i)^2}$ g) $(1+i)^{-3}$

Exercice 7.
1. Mettre l'expression $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ sous la forme $\rho e^{i\phi}$ avec ρ et ϕ réels.
2. Mettre sous forme trigonométrique : $1 + e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1$.
3. Soient A, B, C trois points sur le cercle unité (en d'autres termes, les affixes a, b, et c de A, B, C sont des nombres complexes de module 1). Montrer par le calcul que si B et C sont diamétralement opposés, alors ABC est rectangle en A. (Résultat de géométrie déjà connu, normalement.)

4. Montrer la réciproque : si B et C sont sur le cercle unité, diamétralement opposés, et si ABC est rectangle en A, alors A est aussi sur le cercle unité. *Conseils : le calcul se ramène à montrer que si une expression de la forme* $(z-1)/(z+1)$ *est imaginaire pure, alors* z *est de module* 1 *; pour ceci, montrer d'abord que* $(\bar{z}-1)(z+1)$ *est également imaginaire pur.*

Exercice 8. Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0 \ ; \ z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \ ; \ 4z^2-2z+1=0 \ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 10. On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres complexes z tels que $\mathrm{Im} z>0$, et *disque unité* l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres complexes z tels que $|z|<1$. Démontrer que $z\mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

Autour de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 11. Retrouver les résultats de l'exercice 2 en utilisant $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 12. Ecrire la table de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, celle de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 13. Déterminer, pour chaque élément non nul de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, son inverse. Calculer le produit de tous éléments non nuls de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. En déduire la congruence : $12!\equiv -1 \pmod{13}$.

Exercice 14. On veut généraliser l'exercice précédent en remplaçant 13 par un nombre premier $p\geq 3$. Montrer que $\bar{1}$ et $-\bar{1}$ sont les deux seuls éléments de $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*=\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)\setminus\{0\}$ qui coïncident avec leur inverse. On résoudra pour cela l'équation $x^2=1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En déduire la valeur du produit de tous éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ puis la congruence : $(p-1)!\equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 15. (« Critère de Wilson » – utilise le précédent). Montrer que p premier $\Longleftrightarrow$ p divise $(p-1)!+1$

Exercice 16. Résoudre l'équation $x^2=1$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Commentaire ?

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

1. $$\begin{cases} \bar{3}x+\bar{7}y=\bar{3} \\ \bar{6}x-\bar{7}y=\bar{0}. \end{cases}$$

2. $x^2-\overline{31}x+\overline{18}=\bar{0}$.

Exercice 18. (Plus difficile.) Montrer qu'il existe un corps possédant 4 éléments, et qu'il est unique.