Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

5 – Matrices (suite)

Exercice 1. Résoudre les systèmes dépendant d'un paramètre réel a :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & y & = & 2 \\ (a^2+1)x & + & 2ay & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} (a+1)x & + & (a-1)y & = & 1 \\ (a-1)x & + & (a+1)y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 (Une remarque à garder en tête)**.** Soit A une matrice carrée. On suppose que le système

$$AX = 0$$

(où X est un vecteur-colonne contenant les inconnues, et 0 désigne le vecteur nul) ne possède que la solution $X = 0$. Montrer que A est inversible.

Exercice 3. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Pour chaque entier $n \geq 1$ calculer B^n.
2. En déduire A^n.
3. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et par la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & 2v_n & + & 3w_n \\ v_{n+1} & = & & & v_n & + & 2w_n \\ w_{n+1} & = & & & & & w_n \end{array}\right.$$

   Calculer (u_n), (v_n) et (w_n) en fonction de u_0, v_0, w_0.

Exercice 4. On note N la matrice carrée de taille $m \times m$ dont les coefficients n_{ij} sont donnés par : $n_{ij} = 1$ si $j = i + 1$ et $n_{ij} = 0$ sinon.

1. Ecrire explicitement la matrice N, d'abord pour $m = 3$ puis « avec des pointillés » en général. Ensuite, faire de même avec $A = I + N$ (avec I la matrice identité $m \times m$).
2. Calculer les puissances de N.
3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse. On utilisera pour cela une identité remarquable bien connue.

Exercice 5 (Défi)**.** Soient A et B des matrices carrées telles que $AB = A + B$. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 6. Dans cet exercice, les matrices considérées sont carrées, de taille $n \times n$. On définit la *trace* d'une matrice comme étant la somme des coefficients sur la diagonale ; en d'autres termes, si $A = (a_{ij})_{i,j}$, alors

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

1. Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j}$. Exprimer $\mathrm{Tr}(AB)$ en fonction des coefficients a_{ij} et b_{ij}.

2. En déduire que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. Soit P une matrice inversible, et M une matrice quelconque. Montrer que $\mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(M)$.

Exercice 7 (Cayley-Hamilton pour les matrices 2×2)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I = 0\,.$$

Ici I est la matrice identité 2×2. On rappelle que, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors $\det(A) = ad - bc$.

Exercice 8 (Suite de Fibonacci)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})\,.$$

1. Montrer que $A^2 - A - I = 0\,.$
2. Trouver λ_1 et λ_2 tels que
$$X^2 - X - 1 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2).$$
Puis, trouver des scalaires $s, t \in \mathbb{R}$ tels que
$$s(A - \lambda_1 \cdot I) + t(A - \lambda_2 \cdot I) = I\,.$$
3. Soit $v \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur, c'est-à-dire une matrice-colonne. Déduire de la question précédente que l'on peut trouver deux vecteurs v_1 et v_2 tels que $v = v_1 + v_2$ et
$$Av_1 = \lambda_1 v_1\,, \qquad Av_2 = \lambda_2 v_2\,.$$
4. Donner une formule pour $A^n v_1$, $A^n v_2$ et $A^n v$, pour tout $n \geq 1$. Pour
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
déterminer explicitement v_1 et v_2, puis $A^n v$.
Conseils de calcul. Garder λ_1 et λ_2 le plus longtemps possible, plutôt que leurs expressions avec une racine carrée. Exploiter les identités $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1\lambda_2 = -1$, $\lambda_2 - \lambda_1 = \pm\sqrt{5}$ (préciser), et $\lambda_i^2 = 1 + \lambda_i$ pour $i = 1, 2$. La réponse finale fait intervenir la quantité $\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}$.
5. La *suite de Fibonacci* est la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence par $x_0 = x_1 = 1$ et $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On introduit
$$v_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Puis, à l'aide des questions précédentes, trouver une formule pour x_n. En déduire
$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}\,.$$

Exercice 9. On va généraliser la question (2) de l'exercice précédent. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$. On suppose que $P = P_1 P_2$ et que $pgcd(P_1, P_2) = 1$.

1. À l'aide du théorème de Bézout, montrer que tout vecteur $v \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ peut s'écrire $v = v_1 + v_2$, avec $P_i(A)v_i = 0$, pour $i = 1, 2$.
2. Montrer que cette décomposition est unique.
Indication. Si $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, introduire $w := v_1 - v_1' = v_2' - v_2$, calculer $P_i(A)w$ pour $i = 1, 2$, et ré-utiliser la relation de Bézout.