Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Colles, deuxième feuille

Exercice 1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

a) $e^{\frac{\pi i}{6}}$ b) $6\, e^{5\pi i}$ c) $e^{\frac{-3\pi i}{4}}$ d) $e^{\frac{-2\pi i}{3}}$ e) $3\, e^{-\frac{7\pi i}{6}}$

Exercice 2. On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres complexes z tels que $\mathrm{Im} z > 0$, et *disque unité* l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres complexes z tels que $|z| < 1$. Démontrer que $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 3. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z = \dfrac{z_1^5}{z_2^4}$.

a) Calculer le module et l'argument de z_1 , de z_2 et de Z.

b) Calculer de deux façons différentes la partie réelle et la partie imaginaire de Z. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :
a) $z^2 - (2+3i)z + 3i - 1 = 0$ b) $z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$

Exercice 5. Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 6. Déterminer les complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

Exercice 7.
1. Dresser la liste des cubes dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$. Montrer que 13 divise x, y, z.
3. L'équation : $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ a-t-elle des solutions entières ?

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$x^2 + x + 1 = 0\,, \quad \text{et} \quad x^2 + x - 1 = 0\,.$$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases}$$

Exercice 10. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts. On suppose que $p_i \equiv -1 \bmod 4$ pour chaque p_i. On pose $a = p_1 p_2 \cdots p_r + 2$ et $b = p_1 p_2 \cdots p_r + 4$.

1. Montrer que ou bien $a \equiv -1 \bmod 4$, ou bien $b \equiv -1 \bmod 4$.
2. Soit c celui de a ou b qui est $\equiv -1 \bmod 4$. Soit p un nombre premier divisant c. Montrer que $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$.
3. Montrer que c possède au moins un diviseur premier p tel que $p \equiv -1 \bmod 4$.
4. Conclusion ?