Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Colles – 3e semaine

Exercice 1. Soient $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$. Prouvez que si l'on a $f(X)^2 - Xg(X)^2 = Xh(X)^2$ alors on a $f(X) = g(X) = h(X) = 0$.

Exercice 2. Deux polynômes U et V vérifient $U(x)sin(x) + V(x)cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

Exercice 3. Montrer que $X^2 - X + 1$ divise $P(X) = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Exercice 4. Déterminer a et b pour que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + b$.

Exercice 5. Calculer, pour $n \geq 2$ les restes des divisions euclidiennes de $P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par

1. $(X-3)(X-2)$;
2. $(X-2)^2$;

(on pourra, pour b) dériver l'expression obtenue en écrivant une division euclidienne).

Exercice 6. Déterminer a et b dans $\mathbb{C}$ tels que $A = X^2 + X + 1$ divise $B = X^4 + aX^2 + bX + a^2 + 1$.

Exercice 7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8.
1. Déterminer deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_n = a_nX^{n+1} + b_nX^n + 1$ soit divisible par $B = (X-1)^2$.
2. Déterminer le quotient de la division euclidienne de A_n par B pour $n \geq 1$. *Indication : récurrence.*
3. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} kx^k$ si $x \neq 1$ est un complexe.

Exercice 9. Montrer que $P = X^3+pX+q$ admet une racine double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 10. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11. Soit a et b deux nombres complexes distincts, m et n deux entiers naturels. Montrer que si les polynômes $(X-a)^m$ et $(X-b)^n$ divisent un polynôme $P(X)$, alors le polynôme $(X-a)^m(X-b)^n$ divise P.

Exercice 12. Déterminer les polynômes P à coefficients complexes tels que P' divise P.

Exercice 13. Soit $P = 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 3X + 2$. On pose $Y = X + 1/X$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$.
2. Calculer les racines de Q.
3. En déduire les racines de P, puis sa factorization sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 14. Déterminer $pgcd(P,Q)$ où $P = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ et $Q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$. En déduire les factorisations de P et Q sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Déterminer le racines communes à P et P' si $P = X^5+X^4+2X^3+2X^2+X+1$. Montrer que $(X^2+1)^2$ divise P et factoriser P sur $\mathbb{R}$.