Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Colles–feuille 5

Exercice 1. Calculer le produit :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Exercice 3. Trouver toutes les matrices réelles de format 4×4 qui commutent avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Même question avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 & = & b_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 & = & b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 & = & b_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 & = & b_4 \end{array} \right.$$

Exercice 6. Déterminer (en les paramétrant) l'ensemble des solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & - & 4x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 12 \\ -3x & + & 5y & = & 1 \\ 7x & - & 11y & = & -1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 6 \\ 3x & - & 2y & + & 7z & = & 14 \\ x & + & 3y & - & 3z & = & -4 \end{array}\right.$$

Exercice 8. Résoudre (en discutant suivant les valeurs du paramètre réel λ) le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & 6y & + & 2z & = & 5 \\ 7x & + & 3y & + & z & = & \lambda \end{array}\right.$$

Exercice 9. Résoudre (en discutant suivant les valeurs des paramètres réels a et b) le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ ax & + & by & = & 1 \\ a^2x & + & b^2y & = & 2 \\ a^3x & + & b^3y & = & 6 \end{array}\right.$$

Exercice 10. Résoudre (en discutant suivant les valeurs des paramètres réels a et b) le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 11. Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ fixés. On considère le système suivant dans $\mathbf{C}^n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 2a_1 \\ x_2 & + & x_3 & = & 2a_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ x_{n-1} & + & x_n & = & 2a_{n-1} \\ x_n & + & x_1 & = & 2a_n \end{array}\right.$$

Résoudre ce système en commençant par les cas particuliers $n = 2, 3, 4$ puis dans le cas général (en distinguant les cas n pair / n impair.)

Exercice 12. Calculer, s'il existe, l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Calculer, s'il existe, l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14. Calculer, s'il existe, l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Exercice 15. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice $n \times n$ à coefficients complexes. On fait l'hypothèse que pour chaque i le terme diagonal a_{ii} a un module strictement supérieur à la somme des modules des autres termes de sa ligne :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Montrer alors que le système linéaire $AX = \mathbf{0}$ (avec X un vecteur colonne d'inconnues) n'admet que la solution nulle.

En déduire que A est inversible.