Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Devoir d'algèbre numéro 1 – correction

Problème 1

1. Montrons $\Longleftarrow$. Supposons que l'entier n vérifie $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$. Si n était pair, on aurait $n = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$, d'où $2k' = 2k+1$ et $2(k'-k) = 1$. Mais c'est absurde : le nombre 1 n'est pas le double d'un entier.

   Maintenant, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété
   $$n \text{ impair} \implies \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2k+1\,.$$
   Lorsque $n = 0 = 2 \times 0$, on constate que 0 est pair, donc l'implication est vraie. Pour $n = 1$, qui est impair, on a bien $1 = 2 \times 0 + 1$, donc $k = 1$ convient.

   Supposons donc que l'implication est vraie pour un entier n, et montrons-la pour $n+1$. On suppose donc que $n+1$ est impair, et on doit montrer l'existence de k. Montrons d'abord que n est pair. S'il ne l'était pas, alors n serait impair par définition, et par récurrence, on aurait un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Mais alors $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$: nous venons de montrer que $n+1$ est pair, ce qui est absurde. Donc n est pair.

   Par définition, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, d'où $n+1 = 2k+1$, comme on le souhaitait.

2. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que tout entier m tel que $1 \leq m \leq n$ peut s'écrire $m = 2^\ell(2k+1)$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}$.

   Pour $n = 1$, il n'y a que $m = 1$ à traiter, et $k = \ell = 0$ conviennent : en effet $2^0(2 \times 0 + 1) = 1$.

   Supposons donc la propriété vraie pour n, et montrons-la pour $n+1$. Il n'y a que le cas $m = n+1$ à traiter. Nous distinguons deux cas. Premier cas : $n+1$ est impair ; dans ce cas, par la question précédente, on peut écrire $n+1 = 2k+1 = 2^0(2k+1)$, qui est bien de la forme voulue. Deuxième cas : $n+1$ est pair. Dans ce cas, on a $n+1 = 2m$ avec $m < n+1$. Par récurrence, on peut écrire $m = 2^\ell(2k+1)$, d'où $n+1 = 2m = 2^{\ell+1}(2k+1)$. Dans tous les cas, on a montré que $n+1$ pouvait se mettre sous la forme voulue.

3. Supposons que $2^\ell(2k+1) = 2^{\ell'}(2k'+1)$. Par l'absurde, supposons que $\ell' > \ell$, donc que l'on peut écrire $\ell' = \ell + r$ avec r un entier > 0. On divise des deux côtés par 2^ℓ et on obtient :
   $$2k+1 = 2^r(2k'+1)\,.$$
   Cette dernière égalité est absurde, car le membre de gauche est impair (question 1), alors que le membre de droite est pair (puisque $r > 0$). Donc l'hypothèse $\ell' > \ell$ est absurde. Par symétrie, $\ell < \ell'$ est également absurde. Donc $\ell = \ell'$.

   On divise l'égalité $2^\ell(2k+1) = 2^\ell(2k'+1)$ par 2^ℓ pour obtenir $2k+1 = 2k'+1$, et on en déduit $k = k'$.

4. Soit $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(k,\ell) = 2^\ell(2k+1)-1$. La question 2 montre que f est surjective ; en effet si $n \in \mathbb{N}$, alors $n+1 \geq 1$ donc $n+1$ s'écrit $2^\ell(2k+1)$, et $n = f(k,\ell)$.
   Si $f(k,\ell) = f(k',\ell')$, alors $(k,\ell) = (k',\ell')$ d'après la question 3, donc f est injective. Finalement, f est une bijection.

Problème 2

1. Pour $f\colon A\times B \longrightarrow C$, et $a \in A$, notons $f_a\colon B \longrightarrow C$ la fonction définie par $f_a(b) = f(a,b)$. L'association $a \mapsto f_a$ définit donc une fonction
$$A \longrightarrow C^B$$
   que l'on va noter $P(f)$. On a donc
$$P(f)(a) = f_a \quad \text{et} \quad P(f)(a)(b) = f(a,b)\,. \tag{*}$$
   Enfin, l'association $f \mapsto P(f)$ est une application
$$P\colon C^{A\times B} \longrightarrow (C^B)^A\,.$$
   On va montrer que c'est une bijection en construisant une application
$$Q\colon (C^B)^A \longrightarrow C^{A\times B}$$
   et en montrant que $Q = P^{-1}$.
   Partons de $g\colon A \longrightarrow C^B$. On définit une fonction $A\times B \longrightarrow C$ par la formule $(a,b) \mapsto g(a)(b)$. C'est cette fonction que l'on note $Q(g)$. Ainsi
$$Q(g)(a,b) = g(a)(b)\,. \tag{**}$$
   Calculons $Q \circ P(f) = Q(P(f))$. C'est une fonction $A\times B \to C$, et en (a,b) elle donne :
$$\begin{aligned} Q(P(f))(a,b) &= P(f)(a)(b) \text{ par (**)} \\ &= f(a,b) \text{ par (*)}\,. \end{aligned}$$
   C'est vrai pour tout couple (a,b), donc $Q(P(f)) = f$ (égalité de fonctions $A\times B \to C$).
   De même, calculons $P\circ Q(g) = P(Q(g))$. C'est une fonction $A \longrightarrow C^B$ et, pour $a\in A$ et $b \in B$:
$$\begin{aligned} P(Q(g))(a)(b) &= Q(g)(a,b) \text{ par (*)} \\ &= g(a)(b) \text{ par (**)}\,. \end{aligned}$$
   Comme c'est vrai pour tout b, on a $P(Q(g))(a) = g(a)$ (égalité de fonctions $B \to C$) ; comme cette dernière égalité est vraie pour tout a, on a $P(Q)(g) = g$ (égalité de fonctions $A \to C^B$).
   Finalement $Q = P^{-1}$ d'après le cours. Ouf !
2. Une fonction $f\colon A \to B\times C$ est de la forme $a \mapsto (f_1(a), f_2(a))$, et on en tire l'existence d'une bijection entre $(B\times C)^A$ et $(B^A)\times(C^A)$. La bijection est $f \mapsto (f_1, f_2)$, mais heureusement le texte ne demande pas de démontrer que c'est bien une bijection.

Problème 3

1. Définissons $f\colon \mathbb{R} \to]0,1[$ par $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$. Comme $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$, on a bien $0 < f(x) < 1$.
   Si $0 < y < 1$, alors l'équation $f(x) = y$ s'écrit
   $$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x) = y &\iff \arctan(x) = \pi(y - \frac{1}{2}) \\ &\iff x = \tan\left(\pi(y - \frac{1}{2})\right). \end{aligned}$$
   Ainsi f est une bijection, et $f^{-1}(y) = \tan\left(\pi(y - \frac{1}{2})\right)$.
2. Pour
   $$x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots \quad \text{et} \quad y = 0, e_1 e_2 e_3 \ldots$$
   on pose $\phi(x,y) = 0, d_1 e_1 d_2 e_2 d_3 e_3 \ldots \in]0,1[$. Ceci définit
   $$\phi\colon]0,1[\, \times\,]0,1[\longrightarrow]0,1[\,.$$
   Montrons que ϕ est injective. Si $\phi(x,y) = \phi(x',y') = 0, t_1 t_2 t_3 \ldots$, alors on a $x = x' = 0, t_1 t_3 t_5 \ldots t_{2k+1} \ldots$ et $y = y' = t_2 t_4 t_6 \ldots t_{2k} \ldots$. Ceci montre que $(x,y) = (x',y')$, et ϕ est effectivement injective.
   Par contre ϕ n'est pas surjective (et donc pas bijective), car un nombre se terminant par une alternance infinie $\ldots 09090909 \ldots$ n'est pas dans l'image de ϕ. (Rappelons que ni x ni y, dans les notations ci-dessus, ne se termine par une infinité de 9.)
3. Considérons d'abord la fonction $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow]0,1[\, \times\,]0,1[$ définie par $(x_1,x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))$, où f est la fonction de la question 1. Notons-la $f \times f$. Alors $f \times f$ est injective : si $f \times f(x_1,x_2) = f \times f(y_1,y_2)$, c'est que $f(x_1) = f(y_1)$ et $f(x_2) = f(y_2)$, et comme f est elle-même injective, on en tire bien $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$.
   La fonction composée $\phi \circ (f \times f)$ est donc injective, comme composée de fonctions injectives.
   On a déjà une fonction injective $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow]0,1[$. Afin d'avoir exactement ce qui est demandé dans l'énoncé, nous pouvons composer avec l'inclusion $]0,1[\to \mathbb{R}$, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto x$, et l'on a bien construit une injection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.