Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Devoir d'algèbre numéro 1

Problème 1

Dans ce problème on va montrer des propriétés des entiers qui sont évidentes, ou bien connues, ou les deux (surtout dans les deux premières questions). Le but est de s'entraîner à rédiger. On évitera toute formule du genre ≪ il est clair que. . . ≫, et toute référence à des théorèmes savants.

Un entier $n \in \mathbb{N}$ est dit *pair* lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Lorsque n n'est pas pair, on dit qu'il est *impair*.

1. Montrer soigneusement l'équivalence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$n \text{ est impair} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2k+1\,.$$
Conseil : montrer $\Longleftarrow$ directement, puis $\Longrightarrow$ par récurrence.
2. Montrer par récurrence que tout $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ peut s'écrire
$$n = 2^\ell(2k+1)$$
où $k, \ell \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si
$$2^\ell(2k+1) = 2^{\ell'}(2k'+1)\,,$$
avec $k, k', \ell, \ell' \in \mathbb{N}$, alors $k = k'$ et $\ell = \ell'$.
4. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$.

Problème 2

Si A et B sont des ensembles, on note B^A l'ensemble de toutes les fonction dont le domaine de définition est A et dont le but est B. Ainsi, l'écriture $f \in B^A$ signifie exactement la même chose que $f : A \longrightarrow B$.

Enfin, C désigne encore un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une bijection entre $(C^B)^A$ et $C^{A\times B}$.
Cette question nécessite beaucoup de rédaction, et il est normal d'y passer du temps (elle rapporte beaucoup de points aussi). On gardera en tête les choses suivantes. Si $f : A \times B \to C$, alors pour $a \in A$ on peut regarder $f_a : B \to C$ définie par $f_a(b) = f(a, b)$. Par ailleurs, si $g : A \to C^B$, penser que $g(a)(b)$ a un sens.
2. Donner, sans démonstration, une ≪ formule ≫ pour $(B \times C)^A$.
Inversement, cette question rapporte peu de points !

.../ ...

Problème 3

1. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0,1[$.
2. On rappelle que tout nombre $x \in]0,1[$ peut s'écrire de manière unique

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

   où $0 \leq d_i \leq 9$, et où l'écriture ne se termine pas par une infinité de 9. Utiliser ceci pour construire une fonction injective $]0,1[\times]0,1[\longrightarrow]0,1[$. Votre fonction est-elle une bijection ?
3. En déduire qu'il existe une fonction injective $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.