Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Deuxième devoir – correction

Exercice 1.

1. On a $P' = 4X^3 + 9X^2 + 6X + 6$. On effectue la division de P par P' ; le quotient est $10X + 1$, et le reste est $R = -X^2 + 5X - 2$.
   Puis on effectue la division de P' par R, et on constate que le reste est nul (le quotient est $9X + 10$). Le pgcd est le dernier reste non-nul, rendu unitaire, donc ici $D = -R = X^2 - 5X + 2$.
2. On écrit
   $$X^2 - \overline{5}X + \overline{2} = (X - \frac{\overline{5}}{2})^2 - \frac{\overline{25}}{4} + \overline{2}\,.$$
   Faisons un peu le ménage : d'abord $\overline{25} = -\overline{1}$. Ensuite $\overline{2} \times \overline{7} = \overline{1}$, donc $\frac{1}{2} = \overline{7}$, d'où $\frac{5}{2} = \overline{35} = \overline{9}$, et $\frac{1}{4} = \overline{7}^2 = \overline{10}$. Finalement $\overline{2} - \frac{\overline{25}}{4} = \overline{12} = -\overline{1}$, et
   $$X^2 - \overline{5}X + \overline{2} = (X - \overline{9})^2 - \overline{1}\,,$$
   de sorte que
   $$X^2 - \overline{5}X + \overline{2} = 0 \Longleftrightarrow (X - \overline{9})^2 = \overline{1}\,.$$
   Les deux racines carrées de 1 sont ± 1, donc $X - \overline{9} = \pm 1$, et enfin
   $$X = \overline{10} \quad \text{ou} \quad X = \overline{8}\,.$$
   Je déconseille en général d'utiliser la formule $b^2 - 4ac$ etc avec $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, simplement parce que le symbole $\sqrt{\Delta}$ a tendance a faire oublier que la racine carrée n'existe peut-être pas... mais si on préfère, et qu'on s'en sort comme ça, c'est très bien.
3. Les racines de D sont les racines communes de P et P', donc les racines multiples de P. Donc $(X - 8)^2$ divise P, et $(X - 10)^2$ divise P. On en déduit (*) que $(X - 8)^2(X - 10)^2$ divise P. Comme P est de degré 4, et est unitaire, on a simplement
   $$P = (X - 8)^2(X - 10)^2\,.$$
   J'imagine que vous serez nombreux à dire que (*) est évident (ce n'est pas complètement faux, et vous ne perdrez pas vraiment de points là-dessus). Pour être tout-à-fait complet, il faut le justifier. Voici d'abord une manière très directe. Puisque $(X - 8)^2$ divise P, on a $P = (X - 8)^2 Q$; comme $P(10) = 0$, et que $8 \neq 10$, on en déduit $Q(10) = 0$ et $P = (X - 8)^2(X - 10)R$. Mais $(X - 10)^2$ divise P, donc en écrivant $P = (X - 10)^2 S = (X - 8)^2(X - 10)R$, puis en simplifiant par $X - 10$, et en faisant $X = 10$, on obtient $R(10) = 0$. On a bien prouvé (*).
   Autre façon de rédiger : les polynômes $X - 8$ et $X - 10$ sont irréductibles (car de degré 1) et distincts, donc $pgcd(X - 8, X - 10) = 1$, et même $pgcd((X - 8)^2, (X - 10)^2) = 1$. On a $P = (X - 8)^2 Q$ comme ci-dessus, et $(X - 10)^2$ divise P, et donc par le lemme de Gauss, on voit que $(X - 10)^2$ divise Q.

Exercice 2.

1. Si $k \neq i$, on a clairement $P_i(a_k) = 0$. Par contre
   $$P_i(a_i) = \prod_{j \neq i} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1\,.$$

2. Calculons
$$P(a_k) = \sum_i t_i P_i(a_k) = t_k P_k(a_k) = t_k\,,$$
en utilisant la question précédente.
3. Si Q est un autre polynôme de degré $\leq n$ satisfaisant (*), alors le polynôme $P - Q$ est de degré $\leq n$ et admet $n+1$ racines, à savoir $a_0, \ldots, a_n$. C'est donc le polynôme nul, d'où $P = Q$.
4. Posons $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, et utilisons la recette des questions précédentes. On a
$$L_0 = \frac{X(X-1)(X-2)}{-6} = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X$$
puis
$$L_1 = \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{2} = \frac{1}{2}X^3 - X^2 - \frac{1}{2}X + 1\,,$$
et de même
$$L_2 = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X\,, \qquad L_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{6}X\,.$$
Le polynôme recherché est
$$-2L_0 + L_1 + 4L_3 = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1\,.$$

Exercice 3.

1. Le polynôme $R = P - Q$ vérifie $R(\cos(\theta)) = 0$ pour tout θ. Or, tout nombre réel dans $[-1, 1]$ s'écrit $\cos(\theta)$ pour un certain θ, et en particulier, il y a une infinité de nombres de cette forme. Donc R possède une infinité de racines, et $R = 0$.
2. Posons $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$, de sorte que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de
$$e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n = (c + is)^n\,.$$
On utilise la formule du binôme de Newton :
$$(c + is)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} c^{n-k} i^k s^k\,.$$
Lorsque k est impair, on a $i^k = \pm i$, donc le terme $\binom{n}{k} c^{n-k} i^k s^k$ est imaginaire pur ; par contre, pour $k = 2\ell$, on a $i^k = (-1)^\ell$. Donc
$$\cos(n\theta) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} c^{n-k} (-1)^{k/2} s^k = \sum_{0 \leq 2\ell \leq n} \binom{n}{2\ell} c^{n-2\ell} (-1)^\ell (s^2)^\ell\,.$$
Il est essential de se rappeler que $c^2 + s^2 = 1$, donc $s^2 = (1 - c^2)$, et finalement
$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \leq 2\ell \leq n} \binom{n}{2\ell} c^{n-2\ell} (-1)^\ell (1 - c^2)^\ell = T_n(c)\,,$$
en posant
$$T_n = \sum_{0 \leq 2\ell \leq n} \binom{n}{2\ell} X^{n-2\ell} (-1)^\ell (1 - X^2)^\ell \in \mathbb{Z}[X]\,.$$
Voilà qui montre l'existence de T_n. L'unicité découle de la question (1).

Pour $n = 1$, il suffit de prendre $T_1 = X$. Pour $n = 2$, avec un peu de chance on connait par coeur la relation $\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$, donc $T_2 = 2X^2 - 1$. Pour $n = 3$, on reprend la méthode ci-dessus :

$$(c + is)^3 = c^3 + 3ic^2 s - 3cs^2 - is^3 \,,$$

la partie réelle est $c^3 - 3cs^2 = c^3 - 3c(1 - c^2)$. Donc $T_3 = X^3 - 3X(1 - X^2) = 4X^3 - 3X$.

3. On a d'une part

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \,, \qquad (1)$$

et d'autre part

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta)\cos(-\theta) - \sin(n\theta)\sin(-\theta) \,,$$

que l'on ré-écrit

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta) \,. \qquad (2)$$

En faisant (1) + (2) on a

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \,,$$

d'où

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2T_n(\cos(\theta))T_1(\cos(\theta)) \,.$$

D'après la question (1), on en déduit l'égalité des polynômes.
Application : on obtient

$$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \,,$$

$$T_5 = 2XT_4 - T_3 = 16X^5 - 20X^3 + 5X \,.$$

4. On part de

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \,,$$

d'où, en dérivant (par rapport à θ) :

$$-n\sin(n\theta) = -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) \,,$$

et en dérivant à nouveau :

$$-n^2\cos(n\theta) = -\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + \sin(\theta)^2 T_n''(\cos(\theta)) \,.$$

On ré-écrit ça :

$$(1 - \cos(\theta)^2)T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + n^2 T_n(\cos(\theta)) = 0 \,.$$

D'après la question (1), on en déduit

$$(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0 \,.$$

(En effet le polynôme à gauche s'annule pour $X = \cos(\theta)$, quel que soit θ.)