Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Deuxième devoir

Exercice 1. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, et

$$P = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 6X + 4 \in \mathbb{K}[X] .$$

1. Calculer $D = pgcd(P, P')$.
2. Déterminer les deux racines distinctes de D.
3. Factoriser P complètement, sans faire aucun calcul.

Exercice 2. *Polynômes d'interpolation de Lagrange.*

1. Soient a_0, a_1 , $\dots a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier i compris entre 0 et n on pose :

$$L_i = \frac{(X - a_0)\dots(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})\dots(X - a_n)}{(a_i - a_0)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n)} = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

   Calculer les nombres $L_i(a_k)$.

2. On se donne des réels t_0, t_1, $\dots t_n$. Montrer que le polynôme

$$P = \sum_{i=0}^{n} t_i L_i$$

   vérifie

$$P(a_k) = t_k \qquad \text{pour } 0 \leq k \leq n . \qquad (*)$$

3. Montrer que le polynôme P de la question précédente est l'unique polynôme de degré $\leq n$ qui satisfait (*).
4. Application : trouver P de degré ≤ 3 qui vérifie : $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = -2$, $P(2) = 4$.

Exercice 3. *Polynômes de Tchebychev.* On peut (comme d'habitude) admettre le résultat d'une question, et passer aux suivantes.

1. Question préliminaire : montrer que, si P et Q sont deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta))$$

   pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors $P = Q$.

2. Montrer qu'il existe pour chaque entier $n \geq 1$ un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait l'identité

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta) \qquad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R} .$$

   Indication : on pourra utiliser le fait que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.
   Explicitez T_n pour $n \leq 3$.

3. En utilisant la formule de trigonométrie qui exprime $\cos(n\theta \pm \theta)$, prouver que les T_n satisfont à la relation de récurrence :

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} .$$

   Utiliser cette relation pour donner T_4 et T_5.

4. En dérivant deux fois la relation de la question (2), montrer l'identité :

$$(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0 .$$