Université de Strasbourg
MPA Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Partie I : logique

Langage mathématique

Exercice 1. Pour chacune des expressions ci-dessous, indiquer s'il s'agit d'une proposition (= *quelque chose qui peut être vrai ou faux*), ou de la description d'un objet mathématique. Puis, identifier les variables, et préciser lesquelles sont muettes.

1. L'équation $2x + 3 = c$, d'inconnue réelle x, a une solution positive.
2. Pour tout x, on a $mx^2 + 4x + 4 > 0$.
3. L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 3$ cm.
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$.
5. $\displaystyle\int_0^1 e^{at}\,\mathrm{d}t$.
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} \neq 0$.
7. $\sum_{k=1}^{n} k$.
8. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - xy = 0$, d'inconnues réelles x et y.
9. $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$.
10. $\lim_{n\to+\infty} u_n > 0$.
11. $\{a \in \mathbb{R} \mid$ l'application $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est croissante au sens large sur $[0, +\infty[\}$.

Exercice 2. Parmi ces propositions, préciser celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ n \leq p$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ n \geq p$
3. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ n \leq p$
4. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ n \geq p$

Exercice 3. Traduisez les énoncés suivants en énoncés symboliques.

1. Tout entier plus grand que trois est somme de deux nombres premiers.
2. Tout entier est la somme de quatre carrés.
3. Le carré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
4. Par un point, on peut tracer une droite perpendiculaire à une autre.
5. Par un point, on peut tracer une unique droite perpendiculare à une autre.
6. Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un point qui est à égal distance des sommets.

Exercice 4. Soit I un intervalle, et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour chacune des propositions suivantes, donner une proposition équivalente en utilisant seulement les quantificateurs, les connecteurs, des variables et les symboles d'égalité et d'inégalité (large ou stricte).

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle I.
2. La fonction f n'est pas croissante sur l'intervalle I.

3. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.
4. La fonction f admet un maximum sur l'intervalle I.
5. La fonction f est bornée sur l'intervalle I.

Exercice 5. Pour tout $z, n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^z}$. Donner une expression pour $f_k(n)$, où $k, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Parmi les propositions ci-dessous, regrouper celles qui sont équivalentes.

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f n'est pas la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas de signe constant.
4. La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.
6. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$.
7. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$.
8. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) < 0$.
10. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) > 0$.
11. $(\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0) \wedge (\exists y \in \mathbb{R} \quad f(y) < 0)$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre réels. Regrouper les propositions équivalentes.

1. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
2. Les termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sont tous positifs à partir d'un certain rang.
3. $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite à termes positifs.
4. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ne s'annule jamais.
6. Il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel $n \geq k$, on a $u_n \geq 0$.
7. Quel que soit l'entier naturel k, quel que soit l'entier naturel $n \geq k$, on a $u_n \geq 0$.
8. Quel que soit l'entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
9. Il existe un réel a tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq a$.
10. Quel que soit l'entier naturel n, on a $u_n \geq 0$.
11. Il existe un entier naturel n tel que $u_n \neq 0$.
12. Quel que soit l'entier naturel n, on a $u_n \neq 0$.

Exercice 8. On considère trois réels x, y et z tels que

1. l'un de ces trois nombres est nul, et les deux autres sont de signes contraires,
2. $y = 0 \implies x > 0$,
3. $y > 0 \implies x < 0$,
4. $x \neq 0 \implies z > 0$.

Peut-on comparer les nombres x, y, z ?

Exercice 9. On s'intéresse à la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq a \implies |x^2 - 1| \leq 1\,. \tag{*}$$

Examiner si (*) est vraie pour $a = 1$, puis $a = 2$, et enfin $a = -1$. Ensuite, trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (*) soit vraie.

Exercice 10. Nier la proposition : ≪ tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ≫.

Exercice 11. Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.

Les règles de raisonnement

Exercice 12. Démontrer chacun des énoncés suivants. On indiquera toute les étapes, en respectant les règles (il ne s'agit pas de simplement ≪ donner l'idée ≫). Par exemple, si l'énoncé commence par $\forall x$... alors il est *obligatoire* que la rédaction commence par ≪ Soit x... ≫ ; si l'on doit montrer $A \implies B$, il est *obligatoire* d'écrire ≪ Supposons A, et montrons B ≫. Etc.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 3 \implies \frac{x-2}{x-3} \neq 1$.
2. $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \quad a + b$ impair $\implies ab$ pair.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \quad n = a + b \implies (a \leq n/2) \vee (b \leq n/2)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (\exists a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} \quad n = a^2 + b^2) \implies (\exists q \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{N}, \quad n = 4q + r \ \wedge\ r \in \{0, 1, 2\})$.
5. (On désigne par $M_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, où $d \geq 2$ est un entier fixé une fois pour toutes.)
   $\forall A \in M_d(\mathbb{R}), \quad (\exists k \in \mathbb{N} \quad A^k = 0) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies A^n = 0)$.
6. $\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \quad (\forall B \in M_2(\mathbb{R}), \quad AB = 0) \implies A = 0$.
7. En posant $X = \{0, 1\}$:
   $\forall a \in X, \forall b \in X, \forall c \in X, \quad a = b \ \vee\ a = c \ \vee\ b = c$.
8. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 = 0 \implies (a = 0 \ \wedge\ b = 0)$.
9. $\forall f\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f$ croissante $\wedge\ f(0) = 2) \implies (\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \neq 0)$. (On vous laisse remplacer ≪ f croissante ≫ par la définition.)
10. $\forall f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-2, 5\}) \implies f$ n'est pas croissante.

Exercice 13. Pour tout nombre entier n montrer que

1. l'entier $n(n + 1)$ est divisible par 2,
2. l'entier $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 3,
3. l'entier $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 6.

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad x \leq \varepsilon) \implies x \leq 0\,.$$

Exercice 15. Sous l'hypothèse $x \geq 0$, on a réussi à démontrer que $x < 0$. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

Exercice 16. L'énoncé suivant est il vrai ?

≪Soient a, b deux entiers quelconque. Alors il existe des entiers m, n tels que $a = m - n$ et $b = m + n$. ≫

Sinon, quelle hypothèse peut-on rajouter pour qu'il devienne vrai ?

Exercice 17. Soient a, b, c trois entiers impairs. Montrer que l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ n'admet pas de solutions x, y entières avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Exercice 18. 1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le sous-ensemble $A = \mathbb{R} \times [0,1]$. Indiquer, en justifiant, quelles affirmations sont vraies :

(a) $\forall x \exists y \quad (x,y) \in A$.
(b) $\exists x \forall y \quad (x,y) \in A$.
(c) $\forall y \exists x \quad (x,y) \in A$.
(d) $\exists y \forall x \quad (x,y) \in A$.

2. Même questions avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.
3. Peut-on trouver une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que (a) et (d) soient faux, et (b) et (c) soient vrais ?
4. Peut-on trouver une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que (a) et (c) soient faux, et (b) et (d) soient vrais ?

Exercice 19. Compléter, quand c'est possible, avec le symbole $\in$ ou $\subset$:

1. $0 \ldots [0,1]$
2. $\{a\} \ldots \{a,b,c\}$
3. $\{3\} \ldots \mathbb{N}$
4. $\{0,1\} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{N})$
5. $0 \ldots \mathscr{P}(\{0,1\})$
6. $[0,1] \ldots \mathscr{P}([0,1])$
7. $\mathbb{N} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{R})$
8. $[0,1] \ldots [0,1] \cup [3,4]$
9. $\emptyset \ldots \{1,2,3\}$
10. $\{\emptyset\} \ldots \{1,2,3\}$
11. $3 \ldots [0,1] \cup \{3\}$
12. $\{4\} \ldots \{0,1\} \cup [3,4]$

Exercice 20. Dans cet exercice, A, B et C sont des parties d'un ensemble E. Reformuler les énoncés suivants en termes de propriétés de leurs éléments. (Exemple : $A = B$ peut se reformuler en $\forall x \in E \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$.)

1. $A \subset B$
2. $A \not\subset B$
3. $A \subset E \setminus B$
4. $A \cup B \subset C$
5. $A \subset B \cap C$
6. $A \neq B$
7. $A \cap B = \emptyset$
8. $A = \emptyset$

Exercice 21. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble $E(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1\}$. Donner une expression pour $E(1, x^2/y^2)$, où $x, y \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Exercice 22. Soient A, B deux parties de l'ensemble E.

1. Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$, où l'inconnue est $X \in \mathscr{P}(E)$.
2. Même chose avec $A \cap X = B$.

Exercice 23.

1. Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\}))$.
2. Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\{a, \{a\}\})$.

Exercice 24. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $g(n) = f_n(n) + 1$.

Montrer qu'il n'existe aucun entier p tel que $g = f_p$.

Exercice 25. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ? injectives ?

1. La fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$.
2. La fonction $g\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie par $g(\emptyset) = 0$, et si $X \neq \emptyset$, alors $g(X) =$ le plus petit élément de X.

Exercice 26. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction.

1. Soient A, B des parties de X. Montrer que $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$, puis que $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, et enfin donner un exemple où cette inclusion est stricte.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A, B \in \mathscr{P}(X) \quad f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.
3. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A, B \in \mathscr{P}(X) \quad Y \smallsetminus f(A) = f(X \smallsetminus A)$.
4. Soient C, D des parties de Y. (On rappelle que $f^{-1}(C)$ a un sens, même sans supposer que f est une bijection !) Montrer que $f^{-1}(C\cup D) = f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$, puis que $f^{-1}(C\cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, et enfin que $f^{-1}(Y \smallsetminus C) = X \smallsetminus f^{-1}(C)$.

Exercice 27. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 28. Soit $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$. Montrer que

1. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, et si g est injective, alors f est surjective ;
3. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
4. si $g \circ f$ est injective, et si f est surjective, alors g est injective.

Exercice 29. Dans chacun des exemples ci-dessous, on vous donne une fonction, et vous devez montrer que c'est une bijection ; on vous demande aussi de donner une formule simple pour la réciproque.

1. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$.
2. $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$.
3. $f\colon \ ]-\infty, 0] \longrightarrow [1, +\infty[$, $f(x) = 5x^2 + 1$.
4. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-9, +\infty[$, $f(x) = 2e^{4x-7} - 9$.
5. $f\colon \ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\tan(x) + 4$.
6. $f\colon \ \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\tan(x) + 4$.
7. $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N}^*)$, $f(X) = \{n + 1 \mid n \in X\}$.
8. $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{7, -2, 12, 78\}$ définie par $f(1) = 7$, $f(2) = 78$, $f(3) = -2$, $f(4) = 12$.
9. $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par
$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$
10. On fixe un entier $n \geq 1$ et une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. La fonction est alors $f\colon M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $f(M) = AMA^{-1}$.
11. $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

Exercice 30. Soit E un ensemble, et soit A une partie de E. On définit $f_A\colon \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ par $f_A(X) = X \cap A$, et $g_A\colon \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ par $g_A(X) = X \cup A$.

1. Montrer que f_A est injective si et seulement si $A = E$.
2. Montrer que g_A est surjective si et seulement si $A = \emptyset$.

Relations

Exercice 31. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, ayant fixé un entier n, on définit une relation $\equiv$ en spécifiant que $x \equiv y$ signifie « n divise $x - y$ ». Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.

Exercice 32. Soit R la relation sur $\mathbb{N}^2$, c'est-à-dire sur les couples d'entiers naturels, définie de la manière suivante :

$$(x, y)R(z, t) \underset{\text{def}}{\iff} x + t = y + z\,.$$

Montrer que R est une relation d'équivalence. Décrire l'ensemble des classes d'équivalence.

Exercice 33. Soit Ω un ensemble totalement ordonné. Si $A \subset \Omega$ et si $x \in \Omega$, on dit que x est *un majorant de* A si $\forall a \in A \quad a \leq x$. On dit que $x \in \Omega$ est *le plus grand élément de* A si x est un majorant de A qui vérifie de plus $x \in A$.

On vous laisse imaginer les définitions de « minorant de A » et « plus petit élément de A ».

On dit que $x \in \Omega$ est *la borne supérieure de* A si c'est le plus petit élément de

$$\{M \in \Omega \mid M \text{ est un majorant de } A\}\,.$$

(Il est donc possible qu'un ensemble n'ait pas de borne supérieure.)

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1[$. Montrer que

$$\{M \in \Omega \mid M \text{ est un majorant de } A\} = [1, +\infty[\,.$$

   Montrer que 1 est la borne supérieure de A. Par contre, montrer que A ne possède pas de plus grand élément.
2. Montrer que, si x et x' vérifient tous les deux la définition de « plus grand élément de A », alors $x = x'$. (Ça justifie que l'on dise de x que c'est « le » plus grand élément. On le note parfois $\max(A)$.)
3. Montrer que si A possède un plus grand élément, alors cet élément est également la borne supérieure de A.
4. Montrer l'unicité de la « borne supérieure ». (En général on note $\sup(A)$ la borne supérieure de A, lorsqu'elle existe.)
5. (*Plus difficile.*) Soit $\Omega = \mathbb{Q}$ et $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$. Montrer que A possède des majorants, mais pas de borne supérieure.

Les entiers

Exercice 34. Dans chacun des exemples ci-dessous, on vous donne une propriété qui dépend d'un entier n. On vous demande de la montrer par récurrence (certaines sont vraies pour $n \geq 0$, d'autres pour $n \geq 1$, etc, c'est à vous de préciser).

1. $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.
2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$$

   Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

3. Le produit de n entiers impairs est un entier impair.
4. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
5. $(x > -1, x \neq 0) \implies (1+x)^n > 1 + nx$.
6. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (utiliser la question précédente).
7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que la suite est majorée par 4.

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n positif, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$. Montrer que $1 \leq u_n \leq n^2$.
9. Soit $a \in]0, \pi/2[$, et définissons une suite réelle par $u_0 = 2\cos(a)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$.
10. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Exercice 35. Soit x un entier fixé.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$x^{n+1} - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)\,.$$

(*C'est une formule que vous devez connaître !*)

2. En déduire que $10^n - 1$ est toujours divisible par 9, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la petite règle suivante : pour qu'un entier m soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres (lorsqu'on l'écrit en base 10) soit divisible par 9.

Exercice 36. Montrer que pour tout $a_1, \ldots, a_m \in]0, 1[$, avec $m \geq 2$, on a

$$\prod_{i=1}^{m}(1 - a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{m} a_i\,.$$

Exercice 37. La suite de Fibonnaci $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\,.$$

1. Écrire un petit programme Python pour calculer les termes de la suite.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n\,.$$

3. Montrer que $u_n \leq 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 38. On considère trois propriétés qui dépendent d'un entier $n \in \mathbb{N}$:

1. 3^n est pair.
2. $10^n + 1$ est multiple de 9.
3. $2^n \geq (n+1)^2$.

Écrivons P pour l'une de ces propositions. Dans chaque cas, montrer que $P(n) \implies P(n+1)$. Puis, en tirer une conclusion (attention, les trois ne sont pas toutes du même genre).

Exercice 39. 1. Programmer en Python une fonction récursive qui calcule : $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

2. En déduire, une fonction Python qui calcule : $\sum_{k=1}^{n} k$
3. En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ proposer une autre réponse à la question précédente. Est-ce que les deux implémentations se comportent de la même manière ?

Exercice 40. On écrit S pour l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall u \in S \quad (\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n) \implies (\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n = u_N)\,.$$

Autrement dit, toute suite décroissante d'entiers est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 41. Soit E un ensemble fini et A, B des parties de X. Trouver une formule pour le cardinal de $A \cup B$ (on ne suppose pas que $A \cap B = \emptyset\,!$), puis donner une démonstration la plus complète possible.

Exercice 42. Soit X un ensemble de cardinal n, soit Y un ensemble de cardinal m, et soit Y^X l'ensemble de toutes les fonctions $X \to Y$. Montrer que Y^X est en bijection avec Y^n, et en déduire le cardinal de Y^X.

Exercice 43. Calculer le cardinal de $\mathscr{P}(X)$, où X est un ensemble de cardinal n, à l'aide de la formule du binôme.

Exercice 44. Soit X un ensemble. On écrit (comme dans un exercice précédent) $\{0,1\}^X$ pour l'ensemble des fonctions $X \to \{0,1\}$. On considère alors la fonction

$$\chi \colon \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}^X$$

$$A \mapsto \chi_A$$

où χ_A est la *fonction caractéristique de* A, définie elle-même par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ sinon. (Il est standard d'écrire χ_A au lieu de $\chi(A)$, et ça évite de devoir écrire $\chi(A)(x)$ pour $\chi_A(x)$.)

Montrer que χ est une bijection. Lorsque X est de cardinal n, en déduire le calcul du cardinal de $\mathscr{P}(X)$, et comparer avec l'exercice précédent.

Exercice 45. Calculer $\displaystyle\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.

Indication : si on appelle p et i ces deux sommes, alors $p + i$ et $p - i$ sont faciles à calculer...

Exercice 46. Pour $1 \le k \le n$ montrer l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Pouvez-vous trouver une démonstration « sans calculs » ?

Exercice 47. En calculant de deux façons différentes le coefficient de x^n dans l'expression $(1+x)^{2n}$ prouver pour tout entier $n \ge 1$ la formule :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 48. Soit $n \ge 1$ un entier et considérons un échiquier de taille $n \times n$. Trouver le nombre de carrés composés de cases voisines. Par exemple, pour $n = 2$ on trouve 5 carrés et pour $n = 3$ on en trouve 14.