Premiers éléments de logique

1. Le discours mathématique

Premiers éléments de logique

Les définitions

Les définitions

DÉFINITION. On dit qu'un entier n est *pair* lorsqu'il existe un entier k tel que $n = 2k$.

Les définitions

DÉFINITION. On dit qu'un entier n est *pair* lorsqu'il existe un entier k tel que $n = 2k$.

DÉFINITION. Un entier qui n'est pas pair est dit *impair*.

Les théorèmes

Les théorèmes

THÉORÈME. Soit n un entier impair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Les théorèmes

THÉORÈME. Soit n un entier impair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Variantes : « Lemme », « Proposition ».

Les démonstrations (premier aperçu !)

Les démonstrations (premier aperçu !)

THÉORÈME. Soit n un entier impair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Les démonstrations (premier aperçu !)

THÉORÈME. Soit n un entier impair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Démonstration. Soient q et r le quotient et le reste, respectivement, dans la division euclidienne de l'entier impair n par 2. On a donc

$$n = 2q + r$$

et $0 \leq r < 2$. Puisque r est entier, on a $r = 0$ ou $r = 1$. Voyons le cas $r = 0$: on a alors $n = 2q$, ce qui prouve que n est pair par définition ; or c'est absurde, car on a supposé le contraire. Donc le cas $r = 0$ mène à une absurdité, et l'on se tourne vers le cas $r = 1$. Alors $n = 2q + 1$. C'est précisément l'énoncé que l'on souhaite, avec $k = q$. $\square$

Schéma général

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ.

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais.

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais. Par exemple, dans le cours nous donnerons des propriétés des ensembles et des nombres entiers, qui sont à prendre comme des axiomes.

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais. Par exemple, dans le cours nous donnerons des propriétés des ensembles et des nombres entiers, qui sont à prendre comme des axiomes.
- Les démonstrations sont là pour déduire de nouveaux résultats à partir des axiomes.

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais. Par exemple, dans le cours nous donnerons des propriétés des ensembles et des nombres entiers, qui sont à prendre comme des axiomes.
- Les démonstrations sont là pour déduire de nouveaux résultats à partir des axiomes.
- Les règles de logique permettent de décider si une démonstration est valable pour nous.

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais. Par exemple, dans le cours nous donnerons des propriétés des ensembles et des nombres entiers, qui sont à prendre comme des axiomes.
- Les démonstrations sont là pour déduire de nouveaux résultats à partir des axiomes.
- Les règles de logique permettent de décider si une démonstration est valable pour nous. On va les décrire plus tard.

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais. Par exemple, dans le cours nous donnerons des propriétés des ensembles et des nombres entiers, qui sont à prendre comme des axiomes.
- Les démonstrations sont là pour déduire de nouveaux résultats à partir des axiomes.
- Les règles de logique permettent de décider si une démonstration est valable pour nous. On va les décrire plus tard.

Résumé

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais. Par exemple, dans le cours nous donnerons des propriétés des ensembles et des nombres entiers, qui sont à prendre comme des axiomes.
- Les démonstrations sont là pour déduire de nouveaux résultats à partir des axiomes.
- Les règles de logique permettent de décider si une démonstration est valable pour nous. On va les décrire plus tard.

Résumé

Une démonstration est un texte qui a pour but de convaincre le lecteur qu'une preuve formelle pourrait être écrite.

Schéma général

- Les axiomes sont notre point de départ. On les considère vrais. Par exemple, dans le cours nous donnerons des propriétés des ensembles et des nombres entiers, qui sont à prendre comme des axiomes.
- Les démonstrations sont là pour déduire de nouveaux résultats à partir des axiomes.
- Les règles de logique permettent de décider si une démonstration est valable pour nous. On va les décrire plus tard.

Résumé

Une démonstration est un texte qui a pour but de convaincre le lecteur qu'une preuve formelle pourrait être écrite. Une preuve formelle est un argument complet, avec chaque règle de logique bien spécifiée (c'est un texte beaucoup plus long qu'une démonstration normale !).

Encore un peu de vocabulaire

Encore un peu de vocabulaire

- corollaire = théorème qui est une conséquence facile du précédent.

Encore un peu de vocabulaire

- corollaire = théorème qui est une conséquence facile du précédent.

COROLLAIRE. Si n et m sont tous les deux impairs, alors $n + m$ est pair.
Démonstration. On écrit $n = 2k+1$ et $m = 2\ell+1$, d'où $n+m = 2(k + \ell + 1)$. $\square$

Encore un peu de vocabulaire

- corollaire $=$ théorème qui est une conséquence facile du précédent.

> **Corollaire.** Si n et m sont tous les deux impairs, alors $n+m$ est pair.
> *Démonstration.* On écrit $n = 2k+1$ et $m = 2\ell+1$, d'où $n+m = 2(k+\ell+1)$. $\square$

- postulat $=$ axiome.

Encore un peu de vocabulaire

- corollaire = théorème qui est une conséquence facile du précédent.

> COROLLAIRE. Si n et m sont tous les deux impairs, alors $n+m$ est pair.
> *Démonstration.* On écrit $n = 2k+1$ et $m = 2\ell+1$, d'où $n+m = 2(k+\ell+1)$. □

- postulat = axiome.
- hypothèse = énoncé supposé vrai, dans un contexte donné.

Encore un peu de vocabulaire

- corollaire $=$ théorème qui est une conséquence facile du précédent.

> COROLLAIRE. Si n et m sont tous les deux impairs, alors $n+m$ est pair.
> *Démonstration.* On écrit $n = 2k+1$ et $m = 2\ell+1$, d'où $n+m = 2(k+\ell+1)$. $\square$

- postulat $=$ axiome.
- hypothèse $=$ énoncé supposé vrai, dans un contexte donné.
  Exemple : dans le contexte du corollaire, « n est impair » est une hypothèse.

Encore un peu de vocabulaire

- corollaire = théorème qui est une conséquence facile du précédent.

> Corollaire. Si n et m sont tous les deux impairs, alors $n+m$ est pair.
> *Démonstration.* On écrit $n = 2k+1$ et $m = 2\ell+1$, d'où $n+m = 2(k+\ell+1)$. $\square$

- postulat = axiome.
- hypothèse = énoncé supposé vrai, dans un contexte donné. Exemple : dans le contexte du corollaire, « n est impair » est une hypothèse.
- conjecture= énoncé que l'on ne sait pas démontrer, mais qu'une personne au moins suppose vrai (peut-être par erreur !).

Encore un peu de vocabulaire

- corollaire $=$ théorème qui est une conséquence facile du précédent.

COROLLAIRE. Si n et m sont tous les deux impairs, alors $n+m$ est pair.
Démonstration. On écrit $n = 2k+1$ et $m = 2\ell+1$, d'où $n+m = 2(k+\ell+1)$. $\square$

- postulat $=$ axiome.
- hypothèse $=$ énoncé supposé vrai, dans un contexte donné. Exemple : dans le contexte du corollaire, « n est impair » est une hypothèse.
- conjecture$=$ énoncé que l'on ne sait pas démontrer, mais qu'une personne au moins suppose vrai (peut-être par erreur !). Exemple : la conjecture « des nombres premiers jumeaux » stipule qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est également premier.

Premiers éléments de logique

Tableau des connecteurs

Tableau des connecteurs

français	logique		Ocaml	Python	C
et	$\wedge$	$.$	`&&`	`and`	`&&`
ou	$\vee$	$+$	`||`	`or`	`||`
ou exclusif	$\oplus$		`<>`	`!=`	`!=`
non	$\neg$	$\bar{\cdot}$	`not`	`not`	`!`
implique	$\Longrightarrow$				
équivalent	$\Longleftrightarrow$		`=`	`==`	`==`
vrai	$\top$	1	`true`	`True`	
faux	$\bot$	0	`false`	`False`	

Tableau des connecteurs

français	logique		Ocaml	Python	C
et	$\wedge$	$.$	`&&`	`and`	`&&`
ou	$\vee$	$+$	`||`	`or`	`||`
ou exclusif	$\oplus$		`<>`	`!=`	`!=`
non	$\neg$	$\bar{\cdot}$	`not`	`not`	`!`
implique	$\Longrightarrow$				
équivalent	$\Longleftrightarrow$		`=`	`==`	`==`
vrai	$\top$	1	`true`	`True`	
faux	$\bot$	0	`false`	`False`	

Ainsi, si A et B sont des propositions, alors on peut former $A \vee B$ ou $\neg A$ ou encore $A \implies B$, qui sont de nouvelles propositions. On peut bien sûr continuer, et parler de

$$\big((A \wedge C) \vee (\neg B)\big) \implies D,$$

etc, etc.

Tables de vérité

Tables de vérité

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$	$A \iff B$
$Faux$	$Faux$	$Faux$	$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Faux$	$Vrai$	$Vrai$	$Faux$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$	$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

A	$\neg A$
$Faux$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

A	B	$A \implies B$
$Faux$	$Faux$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

A	B	$A \implies B$
$Faux$	$Faux$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

- Si A est vraie, et si $A \implies B$ est vraie, alors à l'aide de la table on déduit que B est vraie.

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

A	B	$A \implies B$
$Faux$	$Faux$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

- Si A est vraie, et si $A \implies B$ est vraie, alors à l'aide de la table on déduit que B est vraie. C'est la chose essentielle ici.

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

A	B	$A \implies B$
$Faux$	$Faux$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

- Si A est vraie, et si $A \implies B$ est vraie, alors à l'aide de la table on déduit que B est vraie. C'est la chose essentielle ici.
- Lorsque A est fausse, alors $A \implies B$ est vraie, indépendamment de B.

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

A	B	$A \implies B$
$Faux$	$Faux$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

- Si A est vraie, et si $A \implies B$ est vraie, alors à l'aide de la table on déduit que B est vraie. C'est la chose essentielle ici.
- Lorsque A est fausse, alors $A \implies B$ est vraie, indépendamment de B. *Le faux entraîne n'importe quoi.*

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

A	B	$A \implies B$
$Faux$	$Faux$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

- Si A est vraie, et si $A \implies B$ est vraie, alors à l'aide de la table on déduit que B est vraie. C'est la chose essentielle ici.
- Lorsque A est fausse, alors $A \implies B$ est vraie, indépendamment de B. *Le faux entraîne n'importe quoi.*
- On note que $A \implies B$ a la même table de vérité que $(\neg A) \vee B$.

Le cas de $A \implies B$ à la loupe

A	B	$A \implies B$
$Faux$	$Faux$	$Vrai$
$Faux$	$Vrai$	$Vrai$
$Vrai$	$Faux$	$Faux$
$Vrai$	$Vrai$	$Vrai$

- Si A est vraie, et si $A \implies B$ est vraie, alors à l'aide de la table on déduit que B est vraie. C'est la chose essentielle ici.
- Lorsque A est fausse, alors $A \implies B$ est vraie, indépendamment de B. *Le faux entraîne n'importe quoi.*
- On note que $A \implies B$ a la même table de vérité que $(\neg A) \vee B$.
- Pour donner des exemples pertinents, il faut que nous parlions du symbole $\forall$.

Premiers éléments de logique

Les variables

Les variables

On appelle les variables que l'on peut renommer en utilisant un nom nouveau (qui n'apparaissait pas avant) sans changer le sens de l'énoncé, des variables muettes ou liées. Les autres sont dites libres ou parlante.

Les variables

On appelle les variables que l'on peut renommer en utilisant un nom nouveau (qui n'apparaissait pas avant) sans changer le sens de l'énoncé, des variables muettes ou liées. Les autres sont dites libres ou parlante.
Il y a des signes qui rendent les variables liées, on les appelle des lieurs.

Les variables

On appelle les variables que l'on peut renommer en utilisant un nom nouveau (qui n'apparaissait pas avant) sans changer le sens de l'énoncé, des variables muettes ou liées. Les autres sont dites libres ou parlante.
Il y a des signes qui rendent les variables liées, on les appelle des lieurs.
Exemples :

$$x \mapsto x + 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \qquad \prod_{i=0}^{n} f(i)$$

$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$\forall x\ P(x) \qquad \exists x\ P(x)$$

Les variables

On appelle les variables que l'on peut renommer en utilisant un nom nouveau (qui n'apparaissait pas avant) sans changer le sens de l'énoncé, des variables muettes ou liées. Les autres sont dites libres ou parlante.
Il y a des signes qui rendent les variables liées, on les appelle des lieurs.
Exemples :

$$x \mapsto x + 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \qquad \prod_{i=0}^{n} f(i)$$

$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\forall x\ P(x) \qquad \exists x\ P(x)$$

Muettes : x, i. Parlantes : P, n, f.

Attention !

Attention !

Ne jamais écrire ceci :

$$i + \sum_{i=0}^{n} i^2,$$

La première occurrence de i est libre et la deuxième est liée. À éviter !

Attention !

Ne jamais écrire ceci :

$$i + \sum_{i=0}^{n} i^2,$$

La première occurrence de i est libre et la deuxième est liée. À éviter ! On aurait pu écrire :

$$i + \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Premiers éléments de logique

Les quantificateurs

Les quantificateurs

« Pour tout » et « Il existe »

Les quantificateurs

« Pour tout » et « Il existe »

Les groupes de mots « pour tout » (ou « quel que soit »), et « il existe au moins un » s'appellent des *quantificateurs*.

Les quantificateurs

≪ Pour tout ≫ et ≪ Il existe ≫

Les groupes de mots ≪ pour tout ≫ (ou ≪ quel que soit ≫), et ≪ il existe au moins un ≫ s'appellent des *quantificateurs*. Le ≪ pour tout ≫ est noté $\forall$ et s'appelle le quantificateur universel, et le ≪ il existe au moins ≫, noté $\exists$, s'appelle le quantificateur existentiel.

Règles pour $\forall$

Règles pour $\forall$

Règle d'utilisation du $\forall$

Si on a $\forall x \ P(x)$, alors on peut en déduire $P(a)$ quel que soit a (du bon type).

Règles pour $\forall$

Règle d'utilisation du $\forall$

Si on a $\forall x\ P(x)$, alors on peut en déduire $P(a)$ quel que soit a (du bon type).

Exemples :

- Si on sait que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x\ f(x) \neq 0$ signifie que f ne s'annule jamais.

Règles pour $\forall$

Règle d'utilisation du $\forall$

Si on a $\forall x\ P(x)$, alors on peut en déduire $P(a)$ quel que soit a (du bon type).

Exemples :

- Si on sait que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x\ f(x) \neq 0$ signifie que f ne s'annule jamais.
- La formule $\forall x \forall y \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ signifie que f est croissante.

Règles pour $\forall$

Règle d'utilisation du $\forall$

Si on a $\forall x\ P(x)$, alors on peut en déduire $P(a)$ quel que soit a (du bon type).

Exemples :

- Si on sait que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x\ f(x) \neq 0$ signifie que f ne s'annule jamais.
- La formule $\forall x \forall y \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ signifie que f est croissante.

Règle de construction du $\forall$

Pour démontrer $\forall x\ P(x)$, il suffit de montrer $P(x)$ sans faire d'hypothèse sur x.

Règles pour $\exists$

Règles pour $\exists$

Règle d'utilisation du $\exists$

Si on a $\exists x\ P(x)$ on peut en extraire un *nouveau* a tel que $P(a)$.

Règles pour $\exists$

Règle d'utilisation du $\exists$

Si on a $\exists x\ P(x)$ on peut en extraire un *nouveau* a tel que $P(a)$.

Règle de construction du $\exists$

Si on a exhibé un a_0 tel que $P(a_0)$ alors on a prouvé que $\exists a\ P(a)$.

Autres exemples

Autres exemples

Remarque

Autres exemples

Remarque

On écrit souvent $\forall x \in E \quad P(x)$ pour indiquer que l'on se restreint uniquement aux x qui sont dans l'ensemble E (on parle de quantificateur relativisé).

Autres exemples

Remarque

On écrit souvent $\forall x \in E \quad P(x)$ pour indiquer que l'on se restreint uniquement aux x qui sont dans l'ensemble E (on parle de quantificateur relativisé). Mais en fait, $\forall x \in E \quad P(x)$ équivaut exactement à $\forall x \quad x \in E \implies P(x)$.

Autres exemples

Remarque

On écrit souvent $\forall x \in E \quad P(x)$ pour indiquer que l'on se restreint uniquement aux x qui sont dans l'ensemble E (on parle de quantificateur relativisé). Mais en fait, $\forall x \in E \quad P(x)$ équivaut exactement à $\forall x \quad x \in E \implies P(x)$. Même chose avec $\exists x \in E \quad P(x)$

Autres exemples

Remarque

On écrit souvent $\forall x \in E \quad P(x)$ pour indiquer que l'on se restreint uniquement aux x qui sont dans l'ensemble E (on parle de quantificateur relativisé). Mais en fait, $\forall x \in E \quad P(x)$ équivaut exactement à $\forall x \quad x \in E \implies P(x)$. Même chose avec $\exists x \in E \quad P(x)$ qui équivaut à $\exists x\ (x \in E) \wedge P(x)$.

Autres exemples

Remarque

On écrit souvent $\forall x \in E \quad P(x)$ pour indiquer que l'on se restreint uniquement aux x qui sont dans l'ensemble E (on parle de quantificateur relativisé). Mais en fait, $\forall x \in E \quad P(x)$ équivaut exactement à $\forall x \quad x \in E \implies P(x)$. Même chose avec $\exists x \in E \quad P(x)$ qui équivaut à $\exists x \ (x \in E) \wedge P(x)$.

- $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad n \leq m$ est vraie.

Autres exemples

Remarque

On écrit souvent $\forall x \in E \quad P(x)$ pour indiquer que l'on se restreint uniquement aux x qui sont dans l'ensemble E (on parle de quantificateur relativisé). Mais en fait, $\forall x \in E \quad P(x)$ équivaut exactement à $\forall x \quad x \in E \implies P(x)$. Même chose avec $\exists x \in E \quad P(x)$ qui équivaut à $\exists x \ (x \in E) \wedge P(x)$.

- $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad n \leq m$ est vraie.
- De même $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 0 \implies \exists y \in \mathbb{R} \quad x = y^2$.

Autres exemples

Remarque

On écrit souvent $\forall x \in E \quad P(x)$ pour indiquer que l'on se restreint uniquement aux x qui sont dans l'ensemble E (on parle de quantificateur relativisé). Mais en fait, $\forall x \in E \quad P(x)$ équivaut exactement à $\forall x \quad x \in E \implies P(x)$. Même chose avec $\exists x \in E \quad P(x)$ qui équivaut à $\exists x \; (x \in E) \wedge P(x)$.

- $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad n \leq m$ est vraie.
- De même $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 0 \implies \exists y \in \mathbb{R} \quad x = y^2$. En français « un réel positif possède toujours une racine carrée ».

Premiers éléments de logique

Des équivalences à connaître

Des équivalences à connaître

On écrit $P \equiv Q$ pour indiquer que les formules P et Q sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont toujours la même valeur de vérité. Par exemple $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

Des équivalences à connaître

On écrit $P \equiv Q$ pour indiquer que les formules P et Q sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont toujours la même valeur de vérité. Par exemple $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

Règles de Morgan :

- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$.
- $\neg(\forall x \; P(x)) \equiv \exists x \; \neg P(x)$.
- $\neg(\exists x \; P(x)) \equiv \forall x \; \neg P(x)$.

Des équivalences à connaître

On écrit $P \equiv Q$ pour indiquer que les formules P et Q sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont toujours la même valeur de vérité. Par exemple $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

Règles de Morgan :

- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$.
- $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \neg P(x)$.
- $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x)$.

Règles de permutation des quantificateurs :

- $\forall x \forall y\ P(x, y) \equiv \forall y \forall x\ P(x, y)$.
- $\exists x \exists y\ P(x, y) \equiv \exists y \exists x\ P(x, y)$.

Des équivalences à connaître

On écrit $P \equiv Q$ pour indiquer que les formules P et Q sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont toujours la même valeur de vérité. Par exemple $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

Règles de Morgan :

- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$.
- $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \neg P(x)$.
- $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x)$.

Règles de permutation des quantificateurs :

- $\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y \forall x\ P(x,y)$.
- $\exists x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y \exists x\ P(x,y)$.

Attention, on ne peut pas permuter $\forall$ et $\exists$. Par exemple, en parlant d'élements de $\mathbb{N}$, la formule $\exists n \forall m\ n \geq m$ est fausse, mais $\forall m \exists n\ n \geq m$ est vraie.

Contraposée et réciproque

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$.

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$.

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$. L'énoncé n impair $\implies n \geq 1$ a pour contraposé $n < 1 \implies n$ pair (qui est vrai ; le seul entier avec $n < 1$ est $n = 0$).

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$. L'énoncé n impair $\implies n \geq 1$ a pour contraposé $n < 1 \implies n$ pair (qui est vrai ; le seul entier avec $n < 1$ est $n = 0$).

Par contre, la réciproque de $A \implies B$ est $B \implies A$.

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$. L'énoncé n impair $\implies n \geq 1$ a pour contraposé $n < 1 \implies n$ pair (qui est vrai ; le seul entier avec $n < 1$ est $n = 0$).

Par contre, la réciproque de $A \implies B$ est $B \implies A$. La réciproque peut très bien être fausse (même quand l'énoncé est vrai).

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$. L'énoncé n impair $\implies n \geq 1$ a pour contraposé $n < 1 \implies n$ pair (qui est vrai ; le seul entier avec $n < 1$ est $n = 0$).

Par contre, la réciproque de $A \implies B$ est $B \implies A$. La réciproque peut très bien être fausse (même quand l'énoncé est vrai).

Exemple

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$. L'énoncé n impair $\implies n \geq 1$ a pour contraposé $n < 1 \implies n$ pair (qui est vrai ; le seul entier avec $n < 1$ est $n = 0$).

Par contre, la réciproque de $A \implies B$ est $B \implies A$. La réciproque peut très bien être fausse (même quand l'énoncé est vrai).

Exemple

La réciproque de l'exemple précédent est $n \geq 1 \implies n$ impair.

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$. L'énoncé n impair $\implies n \geq 1$ a pour contraposé $n < 1 \implies n$ pair (qui est vrai ; le seul entier avec $n < 1$ est $n = 0$).

Par contre, la réciproque de $A \implies B$ est $B \implies A$. La réciproque peut très bien être fausse (même quand l'énoncé est vrai).

Exemple

La réciproque de l'exemple précédent est $n \geq 1 \implies n$ impair. C'est faux !

Contraposée et réciproque

Un expression de la forme $A \implies B$ possède une contraposée, qui est $\neg B \implies \neg A$. Les deux sont équivalentes !

Exemple

On travaille dans $\mathbb{N}$. L'énoncé n impair $\implies n \geq 1$ a pour contraposé $n < 1 \implies n$ pair (qui est vrai ; le seul entier avec $n < 1$ est $n = 0$).

Par contre, la réciproque de $A \implies B$ est $B \implies A$. La réciproque peut très bien être fausse (même quand l'énoncé est vrai).

Exemple

La réciproque de l'exemple précédent est $n \geq 1 \implies n$ impair. C'est faux !

On écrit $A \iff B$ précisément lorsque l'on a à la fois $A \implies B$ et sa réciproque $B \implies A$.

Premiers éléments de logique

1. Le discours mathématique

2. Les règles de raisonnement

Implication

Implication

Règle de construction

Pour prouver une implication de la forme $A \implies B$, il suffit de supposer que l'on a A et de prouver B.

Règle d'utilisation *(modus ponens)*

Si on sait d'une part que $A \implies B$ et d'autre part que A, alors on peut en déduire B.

Exemple

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

- On utilise la règle du $\forall$, et donc on commence par écrire $\ll$ Soit x un réel $\gg$.

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

- On utilise la règle du $\forall$, et donc on commence par écrire ≪ Soit x un réel ≫. On doit maintenant prouver $x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$.

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

- On utilise la règle du $\forall$, et donc on commence par écrire « Soit x un réel ». On doit maintenant prouver $x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$.
- On utilise la règle de construction de l'implication, et donc on écrit « Supposons que $x \geq 0$ »,

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

- On utilise la règle du $\forall$, et donc on commence par écrire « Soit x un réel ». On doit maintenant prouver $x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$.
- On utilise la règle de construction de l'implication, et donc on écrit « Supposons que $x \geq 0$ », et maintenant on cherche à démontrer $\exists y \quad x = y^2$.

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

- On utilise la règle du $\forall$, et donc on commence par écrire « Soit x un réel ». On doit maintenant prouver $x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$.
- On utilise la règle de construction de l'implication, et donc on écrit « Supposons que $x \geq 0$ », et maintenant on cherche à démontrer $\exists y \quad x = y^2$.
- On peut parler de $\sqrt{x}$ puisque $x \geq 0$, et $x = \sqrt{x}^2$,

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

- On utilise la règle du $\forall$, et donc on commence par écrire « Soit x un réel ». On doit maintenant prouver $x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$.
- On utilise la règle de construction de l'implication, et donc on écrit « Supposons que $x \geq 0$ », et maintenant on cherche à démontrer $\exists y \quad x = y^2$.
- On peut parler de $\sqrt{x}$ puisque $x \geq 0$, et $x = \sqrt{x}^2$, donc $x = y^2$ est vraie pour $y = \sqrt{x}$;

Exemple

Voyons une démonstration de $\forall x \quad x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$, où x et y sont des réels.

- On utilise la règle du $\forall$, et donc on commence par écrire « Soit x un réel ». On doit maintenant prouver $x \geq 0 \implies \exists y \quad x = y^2$.
- On utilise la règle de construction de l'implication, et donc on écrit « Supposons que $x \geq 0$ », et maintenant on cherche à démontrer $\exists y \quad x = y^2$.
- On peut parler de $\sqrt{x}$ puisque $x \geq 0$, et $x = \sqrt{x}^2$, donc $x = y^2$ est vraie pour $y = \sqrt{x}$; d'après la règle de construction de $\exists$, on a bel et bien démontré $\exists y \quad x = y^2$, donc on a fini.

Conjonction

Conjonction

Règle de construction

Pour prouver une conjonction de la forme $A \wedge B$, il suffit de prouver A d'une part et B d'autre part.

Conjonction

Règle de construction

Pour prouver une conjonction de la forme $A \wedge B$, il suffit de prouver A d'une part et B d'autre part.

Règle d'utilisation

Quand on sait que $A \wedge B$, on peut en déduire A.

Règle d'utilisation

Quand on sait que $A \wedge B$, on peut en déduire B.

Disjonction

Disjonction

Règle de construction

Pour prouver une disjonction de la forme $A \vee B$, il suffit de prouver A.

Règle de construction

Pour prouver une disjonction de la forme $A \vee B$, il suffit de prouver B.

Disjonction

Règle de construction

Pour prouver une disjonction de la forme $A \vee B$, il suffit de prouver A.

Règle de construction

Pour prouver une disjonction de la forme $A \vee B$, il suffit de prouver B.

Règle d'utilisation (*raisonnement par cas*)

Quand on sait que $A \vee B$ et que l'on veut prouver P, il suffit de prouver d'une part qu'en supposant A on peut prouver P, et d'autre part qu'en supposant B on peut prouver P.

Négations

Négations

Règle de construction d'une négation

Pour montrer $\neg A$, il suffit de supposer A et d'arriver à une contradiction.

Négations

Règle de construction d'une négation

Pour montrer $\neg A$, il suffit de supposer A et d'arriver à une contradiction.

Conséquence (*règle de raisonnement par l'absurde*) :

Négations

Règle de construction d'une négation

Pour montrer $\neg A$, il suffit de supposer A et d'arriver à une contradiction.

Conséquence (*règle de raisonnement par l'absurde*) : Pour montrer A, il suffit de supposer $\neg A$ et d'arriver à une contradiction.

Négations

Règle de construction d'une négation

Pour montrer $\neg A$, il suffit de supposer A et d'arriver à une contradiction.

Conséquence (*règle de raisonnement par l'absurde*) : Pour montrer A, il suffit de supposer $\neg A$ et d'arriver à une contradiction. En effet d'après la règle précédente, appliquée à $\neg A$, on a montré $\neg\neg A$;

Négations

Règle de construction d'une négation

Pour montrer $\neg A$, il suffit de supposer A et d'arriver à une contradiction.

Conséquence (*règle de raisonnement par l'absurde*) : Pour montrer A, il suffit de supposer $\neg A$ et d'arriver à une contradiction. En effet d'après la règle précédente, appliquée à $\neg A$, on a montré $\neg\neg A$; mais bien sûr $\neg\neg A \equiv A$.

Négations

Règle de construction d'une négation

Pour montrer $\neg A$, il suffit de supposer A et d'arriver à une contradiction.

Conséquence (*règle de raisonnement par l'absurde*) : Pour montrer A, il suffit de supposer $\neg A$ et d'arriver à une contradiction. En effet d'après la règle précédente, appliquée à $\neg A$, on a montré $\neg\neg A$; mais bien sûr $\neg\neg A \equiv A$.

Règle d'utilisation d'une négation

Pour arriver à une contradiction, il suffit de montrer P et $\neg P$.

Une preuve formelle en entier

Une preuve formelle en entier

Théorème. Soit n un entier impair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Une preuve formelle en entier

THÉORÈME. Soit n un entier impair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Démonstration. Soient q et r le quotient et le reste, respectivement, dans la division euclidienne de l'entier impair n par 2. On a donc

$$n = 2q + r$$

et $0 \leq r < 2$. Puisque r est entier, on a $r = 0$ ou $r = 1$. Voyons le cas $r = 0$: on a alors $n = 2q$, ce qui prouve que n est pair par définition ; or c'est absurde, car on a supposé le contraire. Donc le cas $r = 0$ mène à une absurdité, et l'on se tourne vers le cas $r = 1$. Alors $n = 2q + 1$. C'est précisément l'énoncé que l'on souhaite, avec $k = q$.
$\square$

Une preuve formelle en entier

Une preuve formelle en entier

Supposé connu

$$\forall ab,\ b \neq 0 \implies \exists qr,\ a = bq + r \ \wedge\ r < b \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x < 2 \implies x = 0 \vee x = 1 \tag{2}$$

Une preuve formelle en entier

Supposé connu

$$\forall ab,\ b \neq 0 \implies \exists qr,\ a = bq + r \ \wedge \ r < b \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x < 2 \implies x = 0 \vee x = 1 \tag{2}$$

A démontrer

Nous voulons montrer que :

$$\forall n, Impair(n) \Rightarrow \exists k, n = 2k + 1$$

Une preuve formelle en entier

Supposé connu

$$\forall ab,\ b \neq 0 \implies \exists qr,\ a = bq + r \ \wedge\ r < b \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x < 2 \implies x = 0 \vee x = 1 \tag{2}$$

A démontrer

Nous voulons montrer que :

$$\forall n, Impair(n) \Rightarrow \exists k, n = 2k + 1$$

Soit n, montrons que :

$$Impair(n) \Rightarrow \exists k, n = 2k + 1$$

Supposons que $Impair(n)$ montrons que :

$$\exists k, n = 2k + 1$$

Une preuve formelle en entier

Supposé connu

$$\forall ab,\ b \neq 0 \implies \exists qr,\ a = bq + r \ \wedge \ r < b \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x < 2 \implies x = 0 \vee x = 1$$

D'après 1 et la règle d'utilisation du « pour tout » :

$$\forall b,\ b \neq 0 \implies \exists qr,\ n = bq + r \ \wedge \ r < b$$

D'où d'après la règle d'utilisation du « pour tout » :

$$2 \neq 0 \implies \exists qr,\ n = 2q + r \ \wedge \ 0 \leq r < 2$$

D'où d'après la règle d'utilisation de l'implication (modus ponens) et le fait que $2 \neq 0$:

$$\exists qr,\ n = 2q + r \ \wedge \ 0 \leq r < 2$$

D'où d'après la règle d'utilisation du « existe », on a q tel que :

$$\exists r,\ n = 2q + r \ \wedge \ 0 \leq r < 2$$

Une preuve formelle en entier

D'où d'après la règle d'utilisation du « existe », on a r tel que :

$$n = 2q + r \ \wedge \ 0 \leq r < 2$$

D'où d'après la règle d'utilisation de la conjonction on a :

$$n = 2q + r \tag{3}$$

et

$$0 \leq r < 2 \tag{4}$$

D'après 2 et la règle d'utilisation du « pour tout » on a :

$$x \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq r < 2 \Rightarrow r = 0 \vee r = 1 \tag{5}$$

D'après la règle de construction de la conjonction, on a :

$$x \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq r < 2 \tag{6}$$

D'où d'après la règle d'utilisation de l'implication on a :

$$r = 0 \vee r = 1 \tag{7}$$

Une preuve formelle en entier

D'où d'après la règle d'utilisation d'un disjonction, il suffit de démontrer $\exists k, n = 2k + 1$ en supposant $r = 0$ d'une part et $r = 1$ d'autre part.

- Supposons $r = 0$. D'après la règle de substitution, et 3 on a :

  $$n = 2k$$

  Donc d'après la règle de construction du « existe » :

  $$\exists k,\, n = 2k$$

  D'où $Pair(n)$ d'après la définition de Pair. On a supposé $Impair(n)$ donc par définition d'Impair, on a $\neg Pair(n)$. D'après la règle, on a une contradiction. D'après la règle « le faux entraîne n'importe quoi », en particulier $\exists k, n = 2k + 1$.
- Supposons $r = 1$.
  D'après la règle de substitution, et 3 on a :

  $$n = 2k + 1$$

  D'après la règle de construction du « existe » on a bien ce qu'on voulait montrer :

  $$\exists k, n = 2k + 1$$

Conclusion

Conclusion

Répétons-le :

Résumé

Conclusion

Répétons-le :

Résumé

Une démonstration est un texte qui a pour but de convaincre le lecteur qu'une preuve formelle pourrait être écrite.