Université de Strasbourg
MPC Mathématiques L3 (S5)
P. Guillot, bureau 314, guillot@math.unistra.fr

§5 – Convergence & Normes

Introduction

Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite de vecteurs dans un espace vectoriel E, quel sens peut-on donner à l'idée de convergence de cette suite ?

On a déjà rencontré cela en dimension finie : on dit que $v_n \to v$ si les coordonnées des vecteurs v_n convergent (au sens usuel dans $\mathbb{R}$) vers les coordonnées de v. Il est facile de voir que ça ne dépend pas de la base dans laquelle on prend les coordonnées. Par exemple, on a déjà vu

$$e^A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \,.$$

Si A est une matrice $m\times m$, l'écriture ci-dessus n'est rien d'autre qu'un raccourci pour indiquer la convergence de m^2 suites de nombres réels.

En dimension infinie, les choses sont beaucoup plus compliquées. L'exemple qui nous préoccupe est celui des espaces de fonctions : quand dit-on que $f_n \to f$, où chaque f_n est une fonction ? Il y a en fait plusieurs réponses, selon le but recherché. On va voir trois définitions dans ce chapitre, et encore une dans le suivant.

Définition. Soit pour chaque $n \geq 0$ une fonction $f_n : I \to \mathbb{C}$. (Souvent I sera un intervalle, d'où la notation, mais la définition marche pour n'importe quel ensemble).

On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge *simplement* vers la fonction f si pour chaque $t \in I$ on a $f_n(t) \to f(t)$.

Retour sur la convergence dans $\mathbb{R}$

Revenons brièvement sur la définition de la convergence des nombres réels. On verra comme ça comment généraliser.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On rappelle que l'on dit que $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour $n > N$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

La valeur absolue, dans cette définition, est très importante ; l'expression $|u_n - \ell|$ représente la *distance* de u_n à ℓ.

Rappelons d'ailleurs la très importante *inégalité triangulaire* :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \,.$$

Enfin, il y a quelque chose de très pratique pour étudier la convergence des sommes. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$. Alors vous savez bien que si

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| < +\infty$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ existe}\,.$$

On dit parfois que S_n "converge absolument", et le résultat ci-dessus affirme qu'alors S_n converge au sens usuel. On dit parfois que "$\mathbb{R}$ est complet" pour exprimer cette propriétés des nombres réels.

Définitions générales

Soit maintenant E un espace vectoriel quelconque. Pour parler de convergence dans E, il nous faut simplement quelque chose pour remplacer la valeur absolue.

Définition. Une *norme* sur E est une fonction $E \to \mathbb{R}$, que l'on écrit

$$v \mapsto \|v\| \,,$$

avec les propriétés suivantes :

1. $\|v\| \geq 0$,
2. $\|v\| = 0$ seulement pour $v = 0$,
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (inégalité triangulaire).

Exemple. Sur $\mathbb{R}^d$ on a la *norme Euclidienne* :

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_d^2}\,.$$

On la note parfois $\|\cdot\|_2$. Il y en a d'autres, par exemple

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots |x_d|\,.$$

Exemple. Sur $\mathbb{C}$, le "module" usuel de $z = x + iy$ est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est bien sûr la norme Euclidienne quand on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

On peut alors poser la définition suivante :

Définition. Soit (v_n) une suite d'élements de E. On dit que (v_n) converge vers le vecteur $v \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour $n > N$ on a

$$\|v_n - v\| < \varepsilon \,.$$

Exemple. Soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$. Alors $v_n \to v$ pour la norme Euclidienne $\iff$ les coordonnées de v_n convergent vers les coordonnées de v.

Même chose avec $\|\cdot\|_1$.

Théorème 1. *En dimension finie, les notions de "norme" et de "convergence pour une norme" n'apportent rien de nouveau. Plus précisément, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur un espace E de dimension finie, on a $v_n \to v$ pour la norme $\|\cdot\| \iff$ les coordonnées de v_n convergent vers celle de v.*

C'est pourquoi on ne vous a pas parlé de normes jusqu'à présent ! L'intérêt apparaît en dimension infinie. Au passage, la démonstration de ce théorème, qu'on ne va pas faire, est assez délicate.

Premier exemple : la convergence uniforme

On va regarder l'espace $C^0 = C^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I, où $I = [a, b]$ est un intervalle *fermé et borné*.

Définition. On définit une norme sur C^0 par

$$\|f\|_\infty = \mathrm{sup}_{t\in I} |f(t)|\,.$$

Lorsque $f_n \to f$ pour cette norme, on dit que f_n converge *uniformément* vers f. Concrètement, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour $n > N$ on a

$$\forall t \in I \qquad |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon\,.$$

Remarque.
1. On sait que, si f est continue, alors $f([a, b]) = [m; M]$ est un intervalle fermé-borné. Donc $\|f\|_\infty = M$ est bien définie.
2. On pourrait tout aussi bien définir $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace de toutes les fonctions *bornées*. (On le note souvent L^∞.) On se contentera des fonctions continues, notamment grâce au théorème suivant qui est très important.

Théorème 2. *Si chaque f_n est continue, et si $f_n \to f$ uniformément, alors f est nécessairement continue.*

Démonstration (rapide). On écrit

$$f(t)-f(t_0) = (f(t)-f_n(t))+(f_n(t)-f_n(t_0))+(f_n(t_0)-f(t_0))\,.$$

Les trois termes à droite sont $< \varepsilon$, dès que n est suffisamment grand et que t est suffisamment proche de t_0. ☐

Théorème 3. *Si chaque f_k est continue, et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty < +\infty$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k$$

existe pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. En d'autres termes pour tout t on peut poser

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,,$$

la fonction f est alors bien définie et continue. Les sommes partielles

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$$

convergent uniformément vers f.

On entend parfois dire que "la série $\sum f_k$ converge normalement", et aussi que C^0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est "complet".

Démonstration. Pour chaque t on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(t)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty < +\infty\,,$$

et donc d'après le résultat que l'on a rappelé sur les nombres réels on peut poser

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,.$$

De plus

$$\|f - S_n\|_\infty \le \sum_{n}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0\,.$$

Donc (S_n) converge uniformément vers f, et f est continue car chaque S_n l'est (cf théorème précédent). ☐

Deuxième exemple : convergence en moyenne

Définition. Soit $L^1 = L^1(I, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions sur l'intervalle I telles que

$$\int_I |f(x)|dx < +\infty\,.$$

(I peut être ouvert ou fermé, borné ou non...) L'espace L^1 est muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)|dx\,.$$

Lorsque $f_n \to f$ pour cette norme, on dit que (f_n) converge *en moyenne* vers f. Concrètement, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour $n > N$ on a

$$\int_I |f(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon\,.$$

Remarque. (1) On triche un peu : *stricto senso* ça n'est pas une norme. Pourquoi ? Simplement parce que l'on devrait vérifier que $\|f\|_1 = 0$ seulement lorsque f est la fonction nulle. C'est *presque* le cas : pour une fonction f *continue* alors

$$\int_I |f(x)|dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0\,.$$

Pour les fonctions quelconques, ça n'est pas tout-à-fait vrai (penser à une fonction f nulle partout sauf en un point). Il y a une façon rigoureuse de contourner ce problème, mais c'est un peu compliqué. Une solution bien sûr serait de regarder l'espace L^1_c des fonctions qui sont à la fois continues et intégrables, mais il est moins intéressant (voir remarque suivante). Donc on va surtout ignorer la question !

(2) Il y a encore un énoncé qui dit que L^1 est "complet", ce qui veut dire essentiellement la même chose que dans le théorème précédent mais avec $\|\cdot\|_1$ au lieu de $\|\cdot\|_\infty$ (et ça ne marcherait pas avec L^1_c). Par contre il est plus difficile à démontrer et, pour nous, moins utile.

Un exemple concret

Soit $f_n(t) = t^n$, sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors pour $t < 1$, on a $f_n(t) \to 0$, alors que pour $t = 1$ on a $f_n(1) \to 1$. On peut donc dire que f_n converge *simplement* vers la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ 1 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

Comme f n'est pas continue, on est sûr que la convergence n'est *pas uniforme*.

Enfin, comme $\int_0^1 |f_n - f| = \frac{1}{n+1} \to 0$, on voit que f_n tend vers f *en moyenne*.

Exercices

Exercice 1. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante :

- Sur $[0, \frac{1}{2n^2}]$, la fonction f_n est affine, et $f_n(0) = 0$ alors que $f_n(\frac{1}{2n^2}) = n$.
- Sur $[\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{n^2}]$, la fonction f_n est affine, et $f_n(\frac{1}{2n^2}) = n$ alors que $f_n(\frac{1}{n^2}) = 0$.
- Sur $[\frac{1}{n^2}, 1]$, la fonction f_n est nulle.

1. Faire un dessin de f_n.
2. Calculer $\int_0^1 f_n$, de préférence sans faire de primitive.
3. Soit f la fonction nulle : $f(t) = 0$. Montrer que (f_n) converge vers f simplement et en moyenne, mais pas uniformément.

Exercice 2. On définit f_n sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n\,.$$

Soit f définie sur le même intervalle par $f(x) = e^{-x}$.

1. Montrer d'abord que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f (en faisant un développement limité).
2. En étudiant les variations de la fonction $f - f_n$, montrer que la convergence est uniforme.
   Indication. On pourra mettre $(f - f_n)'$ sous la forme $e^{-x}(e^{\psi(x)} - 1)$ et étudier les variations de ψ.

Exercice 3. On définit f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f_n(x) = (\cos(x))^n \sin(x)\,.$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f que l'on précisera.

Exercice 4. Soit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

1. Montrer que S_n ne converge pas absolument.
   Comparer avec une intégrale.
2. Montrer que S_n converge, néanmoins.
   Le plus habile est d'utiliser

$$\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}dx\,.$$

Problème.

1. On se place sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers f, alors elle converge également en moyenne.
   Note : sur un intervalle qui n'est pas de la forme $[a,b]$, *comme par exemple* $[0;+\infty[$, *ce résultat n'est plus vrai.*
2. (a) Soit E un espace vectoriel avec une norme $\|\cdot\|$. Montrer que pour $x, y \in E$ on a toujours

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|\,.$$

   (b) En déduire que si (x_n) converge vers x pour la norme $\|\cdot\|$, alors $\|x_n\| \to \|x\|$.

   (c) Cas particulier : en déduire que si (f_n) est une suite de fonctions sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f, alors

$$\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty\,,$$

   alors que si la convergence est en moyenne on a

$$\int_a^b |f_n(t)|dt \to \int_a^b |f(t)|dt\,.$$

   (d) Montrer qu'on a en réalité le résultat plus précis suivant : si (f_n) converge en moyenne vers f, alors

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt\,.$$

3. Soit (f_n) une suite de fonctions sur un intervalle $[a,b]$ telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_\infty < +\infty .$$

Montrer que

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t) dt .$$

C'est essentiellement un résumé des deux questions précédentes...

4. Soit (c_n) une suite de nombres complexes tels que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| < +\infty .$$

(a) Montrer que si l'on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{kit} ,$$

alors $f(t)$ a un sens pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Montrer de plus que f est continue.

(c) Soit m un entier. Combien vaut

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-mit} dt \qquad ?$$