Chapitre 3

Catégories et foncteurs

Dans ce court chapitre nous introduisons le vocabulaire des *catégories*. C'est commode pour énoncer les propriétés de l'homologie, et d'autre part on s'en sert tout le temps en mathématiques.

Définition 3.0.8. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est constituée de :

1. une collection $ob(\mathcal{C})$ d'objets. On s'autorisera à écrire $A \in ob(\mathcal{C})$ pour dire que A est l'un des objets de $\mathcal{C}$, alors même que $ob(\mathcal{C})$ n'est pas forcément un ensemble (donc le symbole $\in$, en toute rigueur, ne devrait pas être employé...)
2. une collection d'ensembles $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, pour chaque $A \in ob(\mathcal{C}), B \in ob(\mathcal{C})$. On s'autorisera à écrire $f : A \to B$ au lieu de $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, pour des raisons qui vont apparaître très vite.

On suppose de plus qu'on a des applications

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)\,;$$

l'image de $(f, g) \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ est notée $g \circ f$. Les propriétés suivantes doivent être satisfaites :

- (associativité) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- (existence des identités) pour chaque $A \in ob(\mathcal{C})$, il existe un élément $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ tel que $f \circ id_A = f$, $id_A \circ g = g$, pour tout $f : A \to B$ et $g : B \to A$.

Les éléments de ensembles $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ seront appelés les *flèches* de $\mathcal{C}$, ou encore les *morphismes* de $\mathcal{C}$.

Exemple 3.0.9. La catégorie des ensembles. On prend $ob(\mathcal{C})$ = tous les ensembles (donc $ob(\mathcal{C})$ n'est pas un ensemble lui-même, c'est bien connu !), et $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ = l'ensemble des toutes les fonctions de A vers B. L'opération $\circ$ est la composition "normale" des fonctions.

Exemple 3.0.10. La catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné k. On prend $ob(\mathcal{C})$ = les k-espaces vectoriels, et $Hom_{\mathcal{C}}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ = l'ensembles des applications *linéaires* $E \to F$.

Exemple 3.0.11. La catégorie des groupes, $ob(\mathcal{C})$ = les groupes, $Hom_{\mathcal{C}}(G, H)$ = les homomorphismes de groupes. Variante possible : la catégorie des groupes abéliens, que l'on va noter $\mathcal{A}b$ dans la suite.

Exemple 3.0.12. La catégorie des espaces topologiques que l'on note $\mathcal{T}op$: on a sans surprise $ob(\mathcal{T}op)$ = les espaces topologiques, $Hom_{\mathcal{T}op}(X,Y)$ = les applications *continues* de X sur Y.

Exemple 3.0.13. La catégorie $\mathcal{H}o\mathcal{T}op$, pour laquelle $ob(\mathcal{H}o\mathcal{T}op) = ob(\mathcal{T}op)$ = les espaces topologiques, et $Hom_{\mathcal{H}o\mathcal{T}op}(X,Y)$ = les classes d'homotopie d'applications continues de X vers Y. La composition est induite par la composition normale des fonctions, c'est à dire $[f] \circ [g] = [f \circ g]$. D'après la proposition 1.3.7, cette opération est bien définie.

Exemple 3.0.14. Soit $\mathcal{T}op^2$ la catégorie dont les objets sont les paires (X,A), où X et A sont des espaces topologiques et $A \subset X$. Les morphismes dans $Hom_{\mathcal{T}op^2}((X,A),(Y,B))$ sont les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(A) \subset B$.

Il y a également une catégorie $\mathcal{H}o\mathcal{T}op^2$ que le lecteur pourra expliciter. Pour ceci on a besoin de la notion d'homotopie entre deux applications f et g : $(X,A) \to (Y,B)$: il s'agit d'une homotopie $F : X \times [0,1] \to Y$ telle que $F(A \times [0,1]) \subset B$, et bien sûr $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$.

Définition 3.0.15. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. Un *foncteur* F, ou *foncteur covariant*, entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, est une règle qui

- associe à $A \in ob(\mathcal{C})$ un objet $F(A) \in ob(\mathcal{D})$,
- associe à $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ un élément $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$.

On exige que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ et $F(id_A) = id_{F(A)}$. La notation est généralement $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ comme pour une fonction.

Un *foncteur contravariant* de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$ associe $F(A)$ à A comme ci-dessus, mais associe à $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ un élément $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(B),F(A))$ (noter l'inversion de A et B). On exige les mêmes compatibilités, donc ici $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ (noter l'inversion), et $F(id_A) = id_{F(A)}$. La notation est souvent $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

(Pouvez-vous deviner la signification indépendante du symbole $\mathcal{C}^{op}$?)

Exemple 3.0.16. Un premier exemple s'obtient en prenant $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ = les k-espaces vectoriels. On a alors un foncteur (covariant) défini par $F(E) = E \oplus E$ et $F(f) = f \oplus f$.

On a aussi un foncteur contravariant défini par $F(E) = E^*$, le dual de E, et $F(f) = f^*$, la transposée de f.

Exemple 3.0.17. Il y a un foncteur $F : \mathcal{T}op \to \mathcal{H}o\mathcal{T}op$ défini par $F(X) = X$ et $F(f) = [f]$.

Il y a également un foncteur $\mathcal{T}op \to \mathcal{T}op^2$ qui satisfait $X \mapsto (X, \emptyset)$.

Exemple 3.0.18. Il existe un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{T}op$ vers la catégorie des anneaux, donné par $F(X) = C^0(X)$, l'anneau des fonctions continues sur X.

Exemple 3.0.19. Pour ceux qui connaissent π_1, on peut le voir comme un foncteur de la catégorie des espaces topologiques munis d'un point-base (dont les morphismes sont les applications continues préservant les points-bases) vers la catégorie des groupes.

Exemple 3.0.20. Il existe un foncteur, noté $\mathbf{GL}_n$, de la catégorie des anneaux commutatifs vers la catégorie des groupes, tel que

$$\mathbf{GL}_n(A) = \{ \text{ les matrices } n \times n \text{ inversibles à coefficients dans } A \ \} \, .$$

De la même manière, on a $\mathbf{SL}_n$, $\mathbf{O}_n$, etc. Ces foncteurs sont des exemples de *schémas en groupes.*

Voici alors la version la plus sophistiquée de la promesse B.

***Théorème 3.0.21** (Promesse B, version foncteur)**.** *Il existe pour chaque entier $n \geq 0$ un foncteur*

$$H_n : \mathcal{H}o\mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{A}b \, .$$

De plus, lorsque $X = |\mathfrak{X}|$, on a $H_n(X) = H_n(\mathfrak{X})$. En d'autres termes, lorsque X est la réalisation d'un CW-complexe $\mathfrak{X}$, on peut calculer le groupe $H_n(X)$ à l'aide de la méthode exposée au §2.3.

Une dernière définition :

Définition 3.0.22. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, et soient F et G deux foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Une *transformation naturelle* T entre F et G est la donnée d'un morphisme $T_A : F(A) \to G(A)$ pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, de telle façon que le diagramme ci-dessous commute, pour tout $f : A \to B$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "T_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Exemple 3.0.23. Soit $F = \mathbf{GL}_n \times \mathbf{SL}_n$ et $G = \mathbf{SL}_n$. Alors on a une transformation naturelle

$$\begin{aligned} T_A : \mathbf{GL}_n(A) \times \mathbf{SL}_n(A) &\to \mathbf{SL}_n(A) \\ (P, M) &\mapsto P^{-1} M P \, . \end{aligned}$$

Chapitre 4

Les axiomes d'Eilenberg & Steenrod

4.1 Description axiomatique de l'homologie

Jusqu'à présent, nous avons vu comment calculer certains groupes $H_n(\mathfrak{X})$ où $\mathfrak{X}$ est un CW-complexe, et nous avons promis que c'était un cas particulier d'une théorie plus vaste, qui associe des groupes $H_n(X)$ à n'importe quel *espace topologique* X. Au fur et à mesure, nous avons énoncé quelques propriétés de cette théorie générale (invariance par homotopie, etc...). Dans ce chapitre, nous allons finalement lister *toutes* les propriétés fondamentales que l'on exige d'une "théorie d'homologie". Le chapitre suivant va montrer qu'il en existe !

Définition 4.1.1. Une *théorie d'homologie* $h_*(-)$ est une collection de foncteurs

$$h_n(-) : \mathcal{H}o\mathcal{T}op^2 \to \mathcal{A}b\,,$$

$$(X, A) \mapsto h_n(X, A)\,,$$

pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, qui sastisfait les axiomes suivants, dits axiomes d'Eilenberg et Steenrod. On va écrire $h_n(X)$ pour $h_n(X, \emptyset)$.

1. (Axiome d'exactitude.) Lorsque $A \subset X$, il existe une suite exacte longue

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} h_n(A) \xrightarrow{h_n(i)} h_n(X) \xrightarrow{h_n(j)} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} h_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Ici $i : A \to X$ et $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ sont les inclusions. Le morphisme ∂_* est "naturel", dans le sens où une application continue $f : (X, A) \to (Y, B)$ donne un diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} h_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "h_n(f)"'] & h_{n-1}(A) \arrow[d, "h_{n-1}(f)"'] \\ h_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"] & h_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

2. (Axiome d'excision.) Étant donnée une paire (X, A) et un ouvert U de X tel que $\bar{U} \subset int(A)$, l'inclusion $(X - U, A - U) \to (X, A)$ donne un isomorphisme pour tout n :

$$h_n(X - U, A - U) \xrightarrow{\cong} h_n(X, A)\,.$$

3. (Axiome d'additivité.) Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille (éventuellement infinie) d'espaces topologiques, et si $X = \coprod_i X_i$ (réunion disjointe), alors les inclusions $X_i \to X$ donnent un isomorphisme

$$\bigoplus_{i \in I} h_n(X_i) \xrightarrow{\cong} h_n(X)\,.$$

En toute généralité, c'est la fin de la définition. Les "homologies" que l'on va rencontrer au deuxième semestre sont de ce type. Cependant, dans ce premier cours, on va s'intéresser presque exclusivement à des homologies particulièrement simples, qui ont des propriétés supplémentaires.

Soit donc G un groupe abélien. On dit que $h_*(-)$ est une *homologie ordinaire à coefficients dans* G lorsque l'on a également les deux propriétés suivantes :

4. (Axiome de la dimension.) Écrivons pt pour l'espace réduit à un point. Alors $h_n(pt) = 0$ pour $n > 0$, et $h_0(pt) = G$.
5. Lorsque $G = k$ est un anneau, les groupes $h_n(X, A)$ sont des modules sur k, et en fait le foncteur $h_*(-)$ est à valeurs dans la catégorie des k-modules.

***Théorème 4.1.2.** *Pour chaque groupe abélien G, il existe une homologie ordinaire à coefficients dans G. Elle est essentiellement unique, et on la note $H_*(-; G)$.*

Le lecteur s'attendait peut-être à ce que cet énoncé ajoute : pour $G = \mathbf{F}_2$, et lorsque $X = |\mathfrak{X}|$ pour un CW-complexe $\mathfrak{X}$, on a un isomorphisme $H_n(X; G) = H_n(\mathfrak{X})$ (le membre de droite étant notre définition très simple du §2.3). C'est en effet le cas ! Cependant, il est remarquable que cet ajout est *redondant* : l'énoncé de 4.1.2 suffit pour démontrer l'existence d'un isomorphisme $H_n(X; \mathbf{F}_2) = H_n(\mathfrak{X})$.

En d'autres termes, si une théorie de l'homologie à coefficients dans $\mathbf{F}_2$ existe, les valeurs qu'elle prend sur les CW-complexes sont complètement déterminées. C'est cette espèce "d'unicité" que l'on va étudier dans ce chapitre (on aura également un énoncé pour G quelconque).

Nous devons commencer par quelques points un peu techniques, qui vont notamment élucider l'homologie "relative" $H_n(X, A; G)$ que nous n'avons pas encore rencontrée, ainsi que l'axiome d'excision qui peut paraître surprenant au premier abord.

4.2 Homologie réduite

Commençons par un petit lemme algébrique.

Lemme 4.2.1. *Soit A et B des groupes abéliens, avec un diagramme*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} A$$

tel que $\pi \circ i = id_A$. Alors il existe une décomposition de B de la forme $B \cong A \oplus \ker \pi$. De plus si on identifie B à $A \oplus \ker \pi$, alors i s'identifie à l'inclusion de A, et π à la projection sur A parallèlement à $\ker \pi$.

Démonstration. Il est clair que i est injective et π est surjective. Soit $p = i \circ \pi : B \to B$. On voit immédiatement que $p \circ p = p$, d'où une décomposition $B = \ker(p) \oplus \mathcal{I}m(p)$. L'image de p est isomorphe à A. □

Appliquons ceci à une situation très simple : on prend un espace X, et un point préféré $x_0 \in X$. On a des applications continues évidentes

$$\{x_0\} \longrightarrow X \longrightarrow \{x_0\},$$

dont la composition est l'identité de $\{x_0\}$. Si on se donne une homologie $h_*(-)$, on a donc un diagramme comme dans le lemme

$$h_*(\{x_0\}) \longrightarrow h_*(X) \longrightarrow h_*(\{x_0\}).$$

Par ce lemme, on a

$$h_*(X) = h_*(\{x_0\}) \oplus \tilde{h}_*(X),$$

où on a noté

$$\tilde{h}_*(X) = \ker(h_*(X) \to h_*(\{x_0\})).$$

Définition 4.2.2. Le groupe $\tilde{h}_n(X)$ s'appelle le n-ième groupe *d'homologie réduite* de X.

Remarque 4.2.3. On notera que l'on aurait pu aussi bien définir ce groupe par $\tilde{h}_n(X) = h_n(X)/h_n(\{x_0\})$, mais c'est moins canonique : pour voir $h_n(\{x_0\})$ comme un sous-groupe de $h_n(X)$, il faut choisir un point x_0 dans X, un peu au hasard ; alors que l'application $X \to \{x_0\}$, qui va de X vers l'unique espace réduit à un élément, est canonique.

Pourquoi s'embêter à définir encore une chose supplémentaire ? Tout simplement parce que la décomposition $h_*(X) = h_*(\{x_0\}) \oplus \tilde{h}_*(X)$ montre que $\tilde{h}_*(X)$ est la partie “importante” de $h_*(X)$, alors que la partie $h_*(\{x_0\})$ se retrouve dans l'homologie de *tous* les espaces, et donc ne contient pas d'information sur X.

Quoiqu'il en soit, nous sommes intéressés en premier lieu par le cas d'une homologie ordinaire $h_*(-) = H_*(-; G)$, et dans ce cas on a $H_n(\{x_0\}; G) = 0$ si $n > 0$, et $H_0(\{x_0\}; G) = G$. Donc $\tilde{H}_n(X; G) = H_n(X; G)$ sauf pour $n = 0$ où on a $H_0(X; G) = G \oplus \tilde{H}_n(X; G)$.

La différence est donc minime, et pourtant on va voir qu'il est déjà plus agréable de travailler avec l'homologie réduite, qui “fait apparaître plus de 0 dans les suites exactes”.

Proposition 4.2.4. *Soit $h_*(-)$ une homologie.*

1. *On a un isomorphisme $\tilde{h}_*(X) = h_*(X, \{x_0\})$.*
2. *Soit $A \subset X$, alors on a une suite exacte longue :*

$$\cdots \to \tilde{h}_n(A) \to \tilde{h}_n(X) \to h_n(X, A) \to \tilde{h}_{n-1}(A) \to \cdots$$

Démonstration. Le point (1) est une conséquence du point (2), en prenant $A = \{x_0\}$ (car l'homologie réduite d'un point est 0). Pour montrer le point (2), on part de la suite exacte longue en homologie non réduite, et on se sert du lemme ci-dessus. □

4.3 Homologie relative et excision

Les nouveautés les plus surprenantes dans la définition d'une "homologie" sont sans doute l'apparition de l'homologie relative $H_n(X, A; G)$ et l'axiome d'excision. Nous allons voir comment l'axiome d'excision permet, en réalité, de ramener l'homologie relative à l'homologie "normale" dans de nombreux cas (et ensuite, si l'on veut, on peut essentiellement se passer de cet axiome).

En fait on veut aboutir au résultat suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit X la réalisation d'un CW-complexe, et soit $A \subset X$ la réalisation d'un sous-complexe. Soit $h_*(-)$ une homologie. Alors on a un isomorphisme*

$$h_n(X, A) = \tilde{h}_n(X/A)\,.$$

On va montrer ça en plusieurs étapes.

Définition 4.3.2. Soit A une partie fermée de X. On dit qu'il existe une *rétraction forte* de X sur A lorsqu'il existe une application

$$F : X \times [0, 1] \longrightarrow X$$

telle que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$, et $F(a, t) = a$ pour tout $a \in A$ et $t \in [0, 1]$.

(En particulier, ceci montre que l'inclusion $A \to X$ est une équivalence d'homotopie ; mais c'est plus fort).

Proposition 4.3.3. *Soit $h_*(-)$ une homologie (pas forcément ordinaire), soit A un fermé de X, et soient U et V des ouverts de X tels que*

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset V\,.$$

On suppose qu'il existe une rétraction forte de V sur A.

Alors il existe un isomorphisme

$$h_n(X, A) = \tilde{h}_n(X/A)\,.$$

Démonstration. Considérons l'inclusion $(X, A) \to (X, V)$. Comme $A \to V$ est une équivalence d'homotopie, on a des isomorphismes $h_n(A) = h_n(V)$. Écrivons les suites exactes longues associées à (X, A) et (X, V), et les morphismes entre les deux :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & h_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & h_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & h_n(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & h_n(V) \arrow[r] & h_n(X) \arrow[r] & h_n(X, V) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On voit que $h_n(X, A) = h_n(X, V)$ grâce au lemme des 5 (pour tout n). Pratiquons enfin une excision de U : on obtient $h_n(X, A) = h_n(X - U, V - U)$.

Faisons maintenant le même raisonnement en remplaçant X par $Y = X/A$, puis A par le point $\{*\}$ de Y correspondant, et enfin U et V par leurs images ouvertes U' et V' dans Y. Il est clair qu'il y a une rétraction forte de V' sur $\{*\}$. Donc le même argument fonctionne, et montre que $h_n(Y, *) = h_n(Y, V')$, puis une excision montre $h_n(Y, *) = h_n(Y - U', V' - U')$.

Pour finir, on constate immédiatement qu'il y a un homéomorphisme entre la paire $(X - U, V - U)$ et la paire $(Y - U', V' - U')$. Donc ces paires ont la même homologie, et on conclut bien que $h_n(X, A) = h_n(Y, *)$. □

Pour montrer le théorème, il suffit donc d'établir :

Lemme 4.3.4. *Soit A un sous-complexe du CW-complexe X. Alors U et V existent, comme dans la proposition.*

Démonstration. Par récurrence sur la dimension. Laissé en exercice. □

Corollaire 4.3.5. *Soit A et X comme dans la proposition. Alors on a une suite exacte longue*

$$\cdots \to \tilde{h}_n(A) \to \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_n(X/A) \to \tilde{h}_{n-1}(A) \to \cdots$$

Il est étonnant de constater qu'on a fait suffisamment de travail pour calculer complètement l'homologie (quelconque) d'une sphère (de n'importe quelle dimension) ! Voici le résultat :

Théorème 4.3.6. *Soit $h_*(-)$ une homologie. Alors on a*

$$\tilde{h}_k(S^n) = h_{k-n}(pt)\,,$$

où pt désigne l'espace réduit à un point. En particulier pour l'homologie ordinaire à coefficients dans G on a pour $n \geq 1$:

$$H_k(S^n; G) = \begin{cases} G \text{ si } k = n \text{ ou } k = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 0$, l'espace S^0 est réduit à deux points, et en utilisant l'axiome d'additivité on trouve facilement le résultat (laissé en exercice), à savoir $\tilde{h}_*(S^0) = h_*(pt)$.

Pour procéder par récurrence, on utilise le fait que S^n est un sous-espace de la boule B^{n+1}, qui est contractile, et de plus le quotient B^{n+1}/S^n peut être identifié à S^{n+1} (cf exercices).

On peut visiblement utiliser le corollaire 4.3.5, et il vient

$$0 \longrightarrow \tilde{h}_{k+1}(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{h}_k(S^n) \longrightarrow 0\,,$$

puisque l'homologie réduite de B^{n+1} est 0. On a donc un isomorphisme $\tilde{h}_{k+1}(S^{n+1}) = \tilde{h}_k(S^n)$. □

4.4 Cohomologie

Il existe une notion plus ou moins "duale" de *cohomologie*. Commençons par en donner la définition : c'est essentiellement la même chose qu'une homologie, mais avec les flèches à l'envers !

Définition 4.4.1. Une *théorie de cohomologie* $h^*(-)$ est une collection de foncteurs *contravariants*

$$h^n(-) : \mathcal{H}o\mathcal{T}op^2 \to \mathcal{A}b\,,$$

$$(X, A) \mapsto h^n(X, A)\,,$$

pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, qui sastisfait les axiomes suivants. On va écrire $h^n(X)$ pour $h^n(X, \emptyset)$.

1. (Axiome d'exactitude.) Lorsque $A \subset X$, il existe une suite exacte longue

$$\cdots \xleftarrow{\partial_*} h^n(A) \xleftarrow{h^n(i)} h^n(X) \xleftarrow{h^n(j)} h^n(X,A) \xleftarrow{\partial_*} h^{n-1}(A) \longleftarrow \cdots$$

   Ici $i : A \to X$ et $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ sont les inclusions. Le morphisme ∂_* est "naturel", dans le sens évident.

2. (Axiome d'excision.) Étant donnée une paire (X, A) et un ouvert U de X tel que $\bar{U} \subset int(A)$, l'inclusion $(X - U, A - U) \to (X, A)$ donne un isomorphisme pour tout n :

$$h^n(X,A) \xrightarrow{\cong} h^n(X-U, A-U)\,.$$

3. (Axiome d'additivité.) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille (éventuellement infinie) d'espaces topologiques, et si $X = \coprod_i X_i$ (réunion disjointe), alors les inclusions $X_i \to X$ donnent un isomorphisme

$$h^n(X) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} h^n(X_i)\,.$$

   Soit G un groupe abélien. On dit que $h^*(-)$ est une *cohomologie ordinaire à coefficients dans* G lorsque l'on a également les deux propriétés suivantes :

4. (Axiome de la dimension.) $h^n(pt) = 0$ pour $n > 0$, et $h^0(pt) = G$.
5. Lorsque $G = k$ est un anneau, les groupes $h^n(X, A)$ sont des modules sur k, et en fait le foncteur $h^*(-)$ est à valeurs dans la catégorie des k-modules.

Exemple 4.4.2. Soit k un *corps*, et soit $H_*(-; k)$ une homologie ordinaire à coefficients dans k. Posons alors

$$H^n(X, A; k) = Hom_k(H_n(X, A; k), k)\,,$$

c'est-à-dire qu'on prend le dual. Alors $H^*(-; k)$ est une cohomologie (ceci sera prouvé dans l'exercice 19).

Ça ne marcherait pas pour $k = \mathbf{Z}$.

On peut se demander l'intérêt de considérer ces deux notions duales. En fait, la cohomologie est une chose plus précise que l'homologie, pour la raison suivante : lorsque k est un anneau, nous allons voir qu'il existe une *multiplication*

$$H^p(X; k) \times H^q(X; k) \to H^{p+q}(X; k)\,,$$

et ainsi en prenant

$$H^\bullet(X; k) = \bigoplus_{n\geq 0} H^n(X; k)$$

on obtient un *anneau*! Dans les exercices de ce chapitre on va donner une première idée de la construction, qui dépend de la topologie de $X \times X$.

Théorème 4.4.3. *Tous les résultats de ce chapitre concernant l'homologie sont vraies pour la cohomologie. Ceci inclut : existence de la cohomologie réduite*

$$\tilde{h}^n(X) = \text{ coker } (h^n(pt) \to h^n(X))\,,$$

suite exacte longue en cohomologie réduite, cohomologie relative en fonction de la cohomologie réduite du quotient, calcul de la cohomologie des sphères :

$$\tilde{h}^k(S^n) = h^{k-n}(pt)\,,$$

où pt désigne l'espace réduit à un point. En particulier pour la cohomologie ordinaire à coefficients dans G on a pour $n \geq 1$:

$$H^k(S^n; G) = \begin{cases} G \text{ si } k = n \text{ ou } k = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercices

Catégories et foncteurs

Exercice 18. Soit G un groupe quelconque. On note $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les *commutateurs*, c'est-à-dire les expressions de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$. On note $G^{ab} = G/[G, G]$.

1. Montrer que si $f : G \to A$ est un homomorphisme vers un groupe abélien A, alors on peut factoriser f en $f = \bar{f} \circ p$, où $p : G \to G^{ab}$ est l'application quotient, et $\bar{f} : G^{ab} \to A$ est un homomorphisme.
2. Montrer qu'on peut définir un foncteur $G \mapsto G^{ab}$ (c'est-à-dire : préciser les catégories, indiquer ce que fait le foncteur sur les morphismes, vérifier les axiomes pour un foncteur).

Exercice 19. Soit k un anneau, et soit Mod_k la catégorie des k-modules. Soit également M un k-module fixé.

1. Montrer que l'on définit un foncteur contravariant $Mod_k \to \mathcal{A}b$ par $A \mapsto Hom_{Mod_k}(A, M)$ (donc mêmes questions que dans l'exercice précédent).
2. Montrer que, si on a une suite exacte

   $$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0\,,$$

   alors en appliquant le foncteur prédédent on a une suite exacte

   $$0 \longrightarrow Hom(C, M) \longrightarrow Hom(B, M) \longrightarrow Hom(A, M)\,.$$

   (On dit que $Hom(-, M)$ est (semi-) exact à gauche.)
3. Lorsque k est un corps, montrer que l'on obtient une suite exacte

   $$0 \longrightarrow Hom(C, M) \longrightarrow Hom(B, M) \longrightarrow Hom(A, M) \longrightarrow 0\,.$$

   (Dans ce cas on dit que le foncteur est exact.) Est-ce toujours vrai lorsque k n'est pas un corps ?
4. (Application : cohomologie.) Soit k un corps (par exemple $k = \mathbf{F}_2$), et soit $H_*(-; k)$ l'homologie ordinaire à coefficients dans k. Posons

   $$H^n(X, A; k) = Hom_{Mod_k}(H_n(X, A; k), k)\,,$$

   c'est-à-dire que $H^n(X, A; k)$ est le dual de $H_n(X, A; k)$. Vérifier que l'on obtient une cohomologie.

Exercice 20. On reprend les mêmes questions que dans l'exercice prédédent, mais avec le foncteur qui au k-module A associe $A \otimes_k M$, pour un k-module M fixé. Donc :

1. Montrer que $- \otimes_k M$ est un foncteur (détailler).
2. Montrer que si
$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
est exacte, alors
$$A \otimes M \longrightarrow B \otimes M \longrightarrow C \otimes M \longrightarrow 0\,.$$
est exacte.
3. Lorsque k est un corps, montrer que l'on obtient une suite exacte
$$0 \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow B \otimes M \longrightarrow C \otimes M \longrightarrow 0\,.$$
4. Montrer que ceci reste vrai pour $k = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Q}$.
Indication : on peut se ramener au cas où A, B et C sont finiment engendrés, et utiliser alors la classification des groupes abéliens de type fini.
5. En déduire que l'on peut contruire une homologie ordinaire à coefficients dans $\mathbf{Q}$ si l'on en a construit une à coefficients dans $\mathbf{Z}$, en posant
$$H_n(X; \mathbf{Q}) := H_n(X; \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}\,.$$

Les axiomes de l'homologie & Mayer-Vietoris

Exercice 21. (Suite exacte longue d'un triplet.)

Considérons le diagramme commutatif de la figure 4.1, dit “diagramme en tresse” ; il devrait normalement être suffisamment parlant, mais voici quand même quelques détails. Pour chaque entier n, on suppose donc que l'on a trois groupes abéliens $A(n)$, $B(n)$ et $C(n)$, et on suppose également que l'on a des suites d'homomorphismes de la forme

$$\cdots \to A(n) \to B(n) \to C(n-1) \to C(n-2) \to B(n-2) \to A(n-3) \\ \to A(n-4) \to B(n-4) \to \cdots$$

On a quatre suites de la sorte : l'une fait intervenir un homomorphisme $A(n) \to B(n)$ pour n divisible par 4, une autre fait intervenir $A(n) \to B(n)$ pour les n de la forme $4m+1$, les deux autres pour $n = 4m+2$ et $n = 4m+3$ respectivement.

1. Montrer le lemme de Wall : supposons que trois des suites soient exactes, et que la quatrième soit un complexe de chaînes (c'est-à-dire que la composition de deux flèches est 0). Alors la quatrième est également exacte.
2. Soit $h_*(-)$ une homologie, et soient $B \subset A \subset X$. Montrer qu'il existe une suite exacte longue de la forme
$$\cdots \longrightarrow h_n(A,B) \longrightarrow h_n(X,B) \longrightarrow h_n(X,A) \longrightarrow h_{n-1}(A,B) \longrightarrow \cdots$$
Indication : écrire les suites exactes longues correspondant aux paires (A,B), (X,A) et (X,B). Ceci donne les trois premières tresse d'un diagramme, la quatrième est la suite voulue.

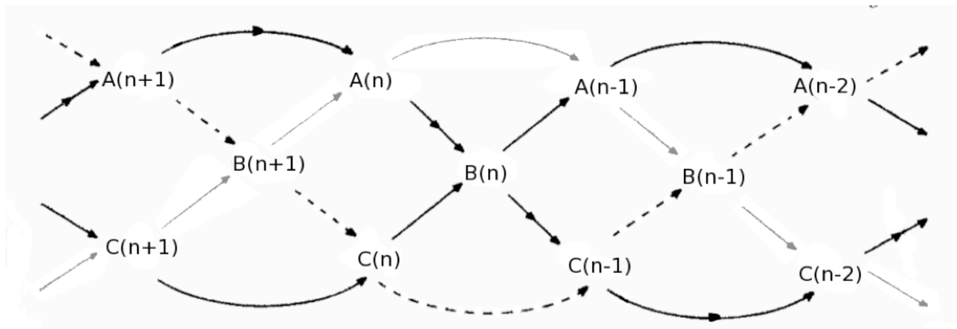

FIGURE 4.1 – *Un diagramme commutatif avec quatre suites d'homomorphismes : en trait plein, en pointillé, en grisé, et en flèches doubles.*

Exercice 22. (Suite de Mayer-Vietoris)

Soit $h_*(-)$ une homologie. Dans cet exercice on va établir la suite exacte de Mayer-Vietoris, qui existe presque à chaque fois qu'on choisit, pour un espace X donné, deux sous-espaces A et B tels que $A \cup B = X$. Elle permet dans les cas les plus faciles de retrouver $h_*(X)$ à partir de $h_*(A)$ et $h_*(B)$.

Il existe plusieurs variantes de théorèmes affirmant que cette suite exacte existe bel et bien, sous différentes hypothèses sur A et B. Ici nous prendrons l'hypothèse assez minimale suivante : on suppose que les applications

$$h_*(A, A \cap B) \longrightarrow h_*(X, B)$$

et

$$h_*(B, A \cap B) \longrightarrow h_*(X, A)\,,$$

induites par les inclusions $(A, A \cap B) \to (X, B)$ et $(B, A \cap B) \to (X, A)$, sont des isomorphismes.

1. Montrer que, lorsque X est (la réalisation d') un CW-complexe et que A et B sont des sous-complexes tels que $X = A \cup B$, alors les hypothèses ci-dessus sont satisfaites.
2. En considérant les quatre suites exactes longues associées aux paires (X, A), (X, B), $(A, A \cap B)$ et $(B, A \cap B)$, et en tenant compte des hypothèses, montrer que l'on obtient un diagramme en tresse comme sur la figure 4.2.

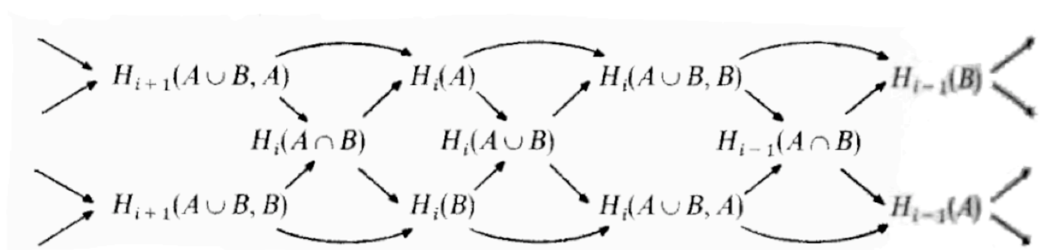

FIGURE 4.2 – *Le diagramme en tresse qui donne Mayer-Vietoris.*

3. Soit $i_A : A \cap B \to A$, $i_B : A \cap B \to B$, $j_A : A \to X$ et $j_B : B \to X$ les inclusions. En regardant la figure 4.2 suffisamment longtemps, montrer qu'on a une suite exacte

$$\cdots \to h_n(A\cap B) \xrightarrow{h_n(i_A)\oplus h_n(i_B)} h_n(A)\oplus h_n(B) \xrightarrow{h_n(j_A)-h_n(j_B)} h_n(X) \to h_{n-1}(A\cap B) \to \cdots$$

   C'est cette suite exacte qu'on appelle suite de Mayer-Vietoris. On va voir des exemples de calculs dans l'exercice suivant.

4. Supposons que l'on ait un espace X' et deux sous-espace A' et B' de X', tels qu'on ait une suite de Mayer-Vietoris ; supposons également que $f : X \to X'$ soit telle que $f(A) \subset A'$, $f(B) \subset B'$. Vérifier qu'on a un diagramme commutatif entre les deux suites de Mayer-Vietoris.

5. À l'aide de la question précédente, ou autrement, montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors on a une suite de Mayer-Vietoris en homologie *réduite*.

   Cette suite "réduite" est bien plus utile que l'autre ! C'est l'un des intérêts de l'homologie réduite.

Exercice 23. 1. Soient X et Y des espaces topologiques. Calculer l'homologie de l'union disjointe $X \coprod Y$ à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris. (*Combien vaut l'homologie de l'ensemble vide ? En fait,* 0. *Ca peut se démontrer à partir des axiomes, et ça n'a rien de très intéressant...*

2. Soient X et Y des CW-complexes, et soient $x \in X$, $y \in Y$ des 0-cellules.

   On considère maintenant l'union pointée $X \vee Y$ (cf première feuille d'exercices), et les inclusions $i : X \to X \vee Y$ et $j : Y \to X \vee Y$.

   En utilisant la suite de Mayer-Vietoris réduite, montrer que $h_*(i)$ et $h_*(j)$ donnent un isomorphisme

$$\tilde{h}_n(X \vee Y) = \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(Y)\,.$$

3. Soit X un CW-complexe et pour tout entier n, soit X_n le n-squelette. Décrire l'espace X_n/X_{n-1} et calculer son $h_*(-)$.

Exercice 24. 1. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, montrer que l'homologie réduite de la suspension SX de l'espace X est donnée par

$$\tilde{h}_n(SX) = \tilde{h}_{n-1}(X)\,.$$

2. Utiliser ce résultat pour recalculer l'homologie d'une sphère S^n par récurrence.

Cohomologie et produits

Dans cette série d'exercices on va regarder un peu l'homologie d'un produit, c'est-à-dire $H_*(X \times Y)$, connaissant $H_*(X)$ et $H_*(Y)$. On va en déduire qu'il existe une multiplication sur la cohomologie.

Il y a un frein sérieux à cette entreprise : c'est l'exercice 26, pour lequel il est difficile de rédiger une solution complète avec tous les détails. Son but est de développer l'intuition.

Plus tard dans le cours, on étudiera l'homologie de $X \times Y$, ainsi que la multiplication en cohomologie, avec des méthodes plus abstraites, mais finalement bien plus faciles à mettre en oeuvre.

Exercice 25. (Produit tensoriel de complexes.)

Lorsque (C_*, ∂_1) et (D_*, ∂_2) sont deux complexes de chaînes sur un anneau k, on définit leur produit tensoriel $C_* \otimes D_*$ par :

$$(C_* \otimes D_*)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q \,,$$

muni de $\partial(x \otimes y) = \partial_1(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes \partial_2(y)$, où $x \in C_i$ et $y \in C_j$.

Vérifier que $\partial \circ \partial = 0$, puis construire une application "naturelle"

$$H_p(C_*) \otimes H_q(D_*) \longrightarrow H_{p+q}(C_* \otimes D_*) \,.$$

Commentaire : le théorème de Künneth affirme que cette application est un isomorphisme lorsque k est un corps. Nous le montrerons plus tard.

Exercice 26. (CW-complexe produit.)

Soient donc $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ des CW-complexes (finis).

(1) Montrer qu'il existe un CW-complexe $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ tel que $|\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}| = |\mathfrak{X}| \times |\mathfrak{Y}|$.

(2) On suppose que $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont réguliers, et en plus on suppose que les 1-cellules ont des extrêmités distinctes (pas de "lacet"). Montrer que $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ est régulier et que

$$C_*(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) = C_*(\mathfrak{X}) \otimes C_*(\mathfrak{Y})$$

au sens de l'exercice précédent.

Il est déjà bien suffisant de se convaincre de ces résultats sur un dessin, par exemple avec $X = S^1$ et $Y = [0, 1]$.

Commentaire : en combinant ça avec l'exercice précédent (théorème de Künneth) on obtient :

$$H_n(X \times Y) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y)$$

avec $X = |\mathfrak{X}|$ et $Y = |\mathfrak{Y}|$. C'est la "version topologique" du théorème de Künneth, et on va la démontrer de manière bien plus simple dans le cours.

Exercice 27. (Cochaînes.)

Soit (C_*, ∂) un complexe de chaînes sur un anneau k. On définit

$$C^n = Hom_k(C_n, k) \,,$$

et $d_n : C^n \to C^{n+1}$ par $d_n(\phi) = \phi \circ \partial_{n+1}$.

Vérifier que $d \circ d = 0$.

Montrer que, si k est un corps, il y a un isomorphisme

$$\frac{\ker(d_n)}{\mathcal{I}m(d_{n-1})} = Hom_k(H_n(C_*), k) \,.$$

Commentaire : le module $\ker(d_n)/\mathcal{I}m(d_{n-1})$ est souvent appelé le n-ième groupe de *cohomologie* de C_*. On va le noter $H^n(C_*)$ (avec le n en haut). De plus, la paire (C^*, d_*) est parfois appelée un complexe de "cochaînes". Toutefois, en posant $D_n = C^{-n}$ et $\partial'_n = d_{-n}$, on obtient un complexe de chaînes (D_*, ∂'), et de plus son homologie est la cohomologie de C_*. Donc "chaînes" et "cochaînes" sont des choses équivalentes, à renumérotation près.

Exercice 28. (Structure multiplicative sur la cohomologie.)

Pour un CW-complexe $\mathfrak{X}$, définissons sa cohomologie comme

$$H^n(\mathfrak{X}) = Hom_{\mathbf{F}_2}(H_n(\mathfrak{X}), \mathbf{F}_2)\,.$$

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux CW-complexes, et soit $D_* = C_*(\mathfrak{X}) \otimes C_*(\mathfrak{Y})$ (comme dans l'exercice 25).

Construire une application

$$H^p(\mathfrak{X}) \otimes H^q(\mathfrak{Y}) \to H^{p+q}(D_*)\,.$$

Ici à droite on a la cohomologie du complexe, comme dans l'exercice 27 (qui est d'ailleurs très utile ici).

Commentaire : si l'on croit au résultat de l'exercice 26, on voit que l'on a une application

$$H^p(X) \otimes H^q(Y) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y)\,,$$

pour $X = |\mathfrak{X}|$ et $Y = |\mathfrak{Y}|$. C'est une version en cohomologie de l'exercice 25, et là encore il y a une version du théorème de Künneth qui affirme qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Mais il y a bien plus ! En effet, prenons $X = Y$. On a l'application diagonale $\Delta : X \to X \times X$ définie par $x \mapsto (x, x)$. Puisque $H^*(-)$ est un foncteur sur les espaces topologiques (nous finirons par le montrer), on peut regarder l'application induite :

$$H^n(\Delta) : H^n(X \times X) \to H^n(X)\,.$$

En combinant ceci avec l'application construite dans l'exercice, on obtient une multiplication

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)\,.$$

On l'appelle le *cup-produit*. C'est la motivation pour étudier la cohomologie et non l'homologie.