Exo7

Exercices de mathématiques

Les exercices suivants sont tous tirés du site exo7, voir

`http://exo7.emath.fr/search.php`

Ils accompagnent le « Cours concis de mathématiques » de Pierre Guillot, disponible sur la page web de l'auteur. Les énoncés apparaissent ci-dessous dans l'ordre où ils sont référencés dans le cours. Sur le site on trouvera beaucoup d'autres exercices, dont certains sont corrigés, et parfois même en vidéo.

On utilise une double numérotation des exercices. La première n'est pas surprenante puisqu'elle part de 1, enchaîne avec 2 puis 3, et ainsi de suite. Les indications et les corrections, données plus loin, ont dû se faire avec cette numérotation-là. Le deuxième numéro donné, entre parenthèses avec l'auteur de l'exercice, est le même que sur le site exo7 et c'est aussi le numéro utilisé dans le cours ; c'est un absolu et il ne devrait pas changer à l'avenir. Si de nouveaux exercices sont ajoutés sur exo7, ou dans une version ultérieure du livre, on pourra toujours faire référence à ce numéro.

Ci-dessous on dresse une table donnant la correspondance entre les deux numérotations, à toutes fins utiles. Le plus rapide pour trouver un énoncé reste de se rendre sur exo7 et d'utiliser le « cadre de saisie ».

pg

Table des matières

Voici la table des correspondances entre la numérotation du cours, qui est aussi celle d'exo7, et l'ordre d'apparition dans ce document :

exo7	n^o	exo7	n^o	exo7	n^o	exo7	n^o	exo7	n^o	exo7	n^o
1	27	375	35	677	68	954	150	1794	73	3401	166
27	29	379	39	698	79	956	146	2090	165	3404	167
31	30	380	40	699	80	959	151	2095	164	4019	120
42	93	387	41	700	81	970	139	2098	156	4054	178
43	94	401	36	701	82	974	140	2099	158	4055	179
44	95	412	37	703	83	979	112	2100	153	4064	180
45	96	423	38	705	84	980	116	2433	143	5127	28
110	10	456	25	709	85	981	113	2467	170	5164	102
112	11	461	26	715	88	984	109	2468	173	5165	103
124	21	470	23	717	89	997	110	2580	174	5188	134
125	9	472	24	718	90	1013	111	2621	53	5259	145
126	3	477	22	721	91	1040	54	2740	141	5426	121
127	4	505	44	808	159	1041	55	2741	142	5427	122
130	2	507	46	809	160	1042	56	2750	61	5429	123
132	12	519	43	810	161	1043	57	2762	171	5430	124
133	5	524	45	812	155	1045	58	2763	172	5432	125
135	6	563	47	824	162	1134	74	2764	175	5433	126
138	7	568	48	824	162	1136	76	2765	176	5434	127
141	8	569	49	886	99	1144	77	2766	177	5437	128
143	1	570	52	888	100	1148	75	2773	63	5438	129
185	16	572	50	893	101	1171	59	2775	62	5439	130
186	17	574	51	900	104	1173	60	2781	107	5440	131
187	13	639	70	908	105	1221	86	2939	97	5441	132
190	14	642	64	914	106	1223	87	2945	31	5446	154
193	18	645	67	920	136	1237	117	3151	32	5524	92
194	19	646	71	923	137	1239	118	3152	33	5565	138
199	20	649	65	929	133	1240	119	3317	114	5567	108
201	15	670	72	934	147	1605	169	3318	115	5627	168
364	34	671	66	941	148	1716	98	3351	152	6865	157
370	42	675	69	943	149	1763	78	3400	144	6871	135

Les énoncés

1.1 Ensembles

Exercice 1 (143, ridde, 1999/11/01).
Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 2 (130, cousquer, 2003/10/01).
Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ?

Exercice 3 (126, cousquer, 2003/10/01).
Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 4 (127, cousquer, 2003/10/01).
Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \complement F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset).$$

Exercice 5 (133, cousquer, 2003/10/01).
Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$.

Exercice 6 (135, cousquer, 2003/10/01).
On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ x + y < 1\right\} \\
A_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ |x + y| < 1\right\} \\
A_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ |x| + |y| < 1\right\} \\
A_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ x + y > -1\right\} \\
A_5 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ |x - y| < 1\right\}
\end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x+y|<1 \;\text{ et }\; |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

Exercice 7 (138, ridde, 1999/11/01).
Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 8 (141, ridde, 1999/11/01).
Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 9 (125, cousquer, 2003/10/01).
A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$$\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B).$$

Exercice 10 (110, gourio, 2001/09/01).
Nier la proposition : "tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

Exercice 11 (112, bodin, 1998/09/01).
Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$.

Exercice 12 (132, cousquer, 2003/10/01).
Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$.
2. fg.
3. $f + g - fg$.

Exercice 13 (187, gourio, 2001/09/01).
Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) injective et non surjective, puis surjective et non injective.

Exercice 14 (190, ridde, 1999/11/01).
Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 15 (201, bodin, 1998/09/01).
On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres complexes z tels que $\operatorname{Im} z > 0$, et *disque unité* l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres complexes z tels que $|z| < 1$. Démontrer que $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 16 (185, bodin, 1998/09/01).
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 17 (186, cousquer, 2003/10/01).
Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 18 (193, bodin, 1998/09/01).

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 19 (194, ridde, 1999/11/01).
Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X \ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X \ f(\complement A) = \complement f(A)$.

Exercice 20 (199, bodin, 1998/09/01).
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Exercice 21 (124, bodin, 1998/09/01).

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

1.2 Nombres

Exercice 22 (477, bodin, 1998/09/01).
Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A + B)$.

Exercice 23 (470, cousquer, 2003/10/01).
Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A,
2. m est un minorant de A,
3. P n'est pas un majorant de A,
4. A est majoré,
5. A n'est pas minoré,
6. A est borné,
7. A n'est pas borné.

Exercice 24 (472, cousquer, 2003/10/01).
Soit $E = \{\frac{1}{n} \cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 25 (456, ridde, 1999/11/01).
Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 26 (461, gourio, 2001/09/01).
Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 27 (1, bodin, 1998/09/01).

Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 28 (5127, rouget, 2010/06/30). ***I*
Déterminer les complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Exercice 29 (27, bodin, 1998/09/01).
Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 30 (31, bodin, 1998/09/01).
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 31 (2945, quercia, 2010/03/08). *Position des racines carrées*
Soit $z\in\mathbb{C}$ et p,q ses racines carrées. A quelle condition z,p,q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Exercice 32 (3151, quercia, 2010/03/08). *Équations linéaires*
Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

1. $$\begin{cases} \dot{3}x+\dot{7}y=\dot{3} \\ \dot{6}x-\dot{7}y=\dot{0}. \end{cases}$$
2. $x^2-\dot{\overline{31}}x+\dot{\overline{18}}=\dot{0}$.

Exercice 33 (3152, quercia, 2010/03/08). *Équation algébrique*

1. Dresser la liste des cubes dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Soient $x,y,z\in\mathbb{Z}$ tels que $5x^3+11y^3+13z^3=0$. Montrer que 13 divise x,y,z.
3. L'équation : $5x^3+11y^3+13z^3=0$ a-t-elle des solutions entières ?

1.3 Polynômes

Exercice 34 (364, bodin, 1998/09/01).

Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$,
$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
$X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.

Exercice 35 (375, ridde, 1999/11/01).
Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$.

Exercice 36 (401, bodin, 1998/09/01).
Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 37 (412, cousquer, 2003/10/01).
Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

Exercice 38 (423, ridde, 1999/11/01).
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 + 1$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 39 (379, bodin, 1998/09/01).
Calculer pgcd(P, Q) lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 40 (380, bodin, 1998/09/01).
Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$,
$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$,
$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Exercice 41 (387, cousquer, 2003/10/01).
Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

1. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
2. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 42 (370, cousquer, 2003/10/01).
Trouver les polynômes P tels que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ par $(X+1)^4$:

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé P'.

Combien y a-t-il de solutions de degré ≤ 7 ?

1.4 Suites

Exercice 43 (519, ridde, 1999/11/01).
Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 44 (505, bodin, 1998/09/01).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 45 (524, monthub, 2001/11/01).
Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\dfrac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 46 (507, bodin, 1998/09/01).
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Exercice 47 (563, monthub, 2001/11/01).
Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n\geq 3$,

$$u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 48 (568, cousquer, 2003/10/01).
Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dots\ ;\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\ ;\ \dots$
2. $2/1\,;\,4/3\,;\,6/5\,;\,\dots;\,2n/(2n-1)\,;\,\dots$
3. $0{,}23\ ;\ 0{,}233\ ;\ \dots\ ;\ 0{,}233\cdots3\ ;\ \dots$
4. $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$
5. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$
7. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$ puis $\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2\sqrt{2}}\ ;\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ ;\ \dots$
10. $\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Exercice 49 (569, bodin, 2001/11/01)**.**
Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0>0$ et par la relation

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2-a=\frac{(u_n{}^2-a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n\geq 1$ alors $u_n\geq\sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2-a=(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1}-\sqrt{a}$ en fonction de $u_n-\sqrt{a}$.
5. Si $u_1-\sqrt{a}\leq k$ et pour $n\geq 1$ montrer que
$$u_n-\sqrt{a}\leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 50 (572, bodin, 1998/09/01).

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 51 (574, ridde, 1999/11/01).
Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution, notée a_n, dans $[0, 1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 52 (570, bodin, 1998/09/01).
On considère les deux suites :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},$$
$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$
Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice 53 (2621, debievre, 2009/05/19).
Pour chacune des suites $(u_n)_n$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, placer quelques-uns des points u_n dans le plan et décrire qualitativement le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini. Étudier ensuite la convergence de chacune des suites et déterminer la limite le cas échéant.

1. $u_n = (\frac{4n^2}{n^2+4n+3}, \cos\frac{1}{n})$
2. $u_n = (\frac{n^2 \arctan n}{n^2+1}, \sin(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n})))$
3. $u_n = (\sinh n, \frac{\ln n}{n})$
4. $u_n = (a^n \cos(n\alpha), a^n \sin(n\alpha))$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.5 Matrices

Exercice 54 (1040, liousse, 2003/10/01).
Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 55 (1041, liousse, 2003/10/01).
On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5.

Exercice 56 (1042, liousse, 2003/10/01).
On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis $(AB)C$.
2. Calculer BC puid $A(BC)$.
3. Que remarque-t-on ?

Exercice 57 (1043, liousse, 2003/10/01).
On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB.
2. Calculer BA.
3. Que remarque-t-on ?

Exercice 58 (1045, liousse, 2003/10/01).
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 59 (1171, liousse, 2003/10/01).
Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 3 \\ 3x-y-2z & = & 0 \\ x+y-z & = & -2 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ x-y+2z-3t & = & 2 \\ 2x+4z+4t & = & 3 \\ 2x+2y+3z+8t & = & 2 \\ 5x+3y+9z+19t & = & 6 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 1 \\ x+2y+3z+4t & = & 2 \\ 3x-y-3z+2t & = & 5 \\ 5y+9z-t & = & -6 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t & = & 5 \\ 2x+3y+4z+5t & = & 8 \\ 3x+y-z+t & = & 7 \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ 2x+3y-z & = & 0 \\ 3x+y+2z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 60 (1173, cousquer, 2003/10/01).
Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 & = & b_1 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 & = & b_2 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 & = & b_3 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 & = & b_4 \end{array}\right.$$

Exercice 61 (2750, tumpach, 2009/10/25).
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 62 (2775, tumpach, 2009/10/25).
Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 63 (2773, tumpach, 2009/10/25).
Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

1.6 Continuité

Exercice 64 (642, bodin, 1998/09/01).
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 65 (649, gourio, 2001/09/01).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 66 (671, vignal, 2001/09/01).
Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 67 (645, ridde, 1999/11/01).
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 68 (677, bodin, 1998/09/01).
Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}\ ; \quad b)\ g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

$$c)\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 69 (675, cousquer, 2003/10/01).
Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$;
4. $f_4(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 70 (639, bodin, 1998/09/01).
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$
2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur I.

Exercice 71 (646, ridde, 1999/11/01).
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 72 (670, vignal, 2001/09/01).
Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer δ tel que, $(x \neq 1/3$ et $|x| \leq \delta) \Rightarrow |f(x)+3| \leq \varepsilon$.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 73 (1794, drutu, 2003/10/01).
Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

5.
$$f(x,y)=\begin{cases}y^2\sin\frac{x}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

6.
$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{\arctan\frac{y}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1.7 Déterminants

Exercice 74 (1134, barraud, 2003/09/01)**.**
Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 7\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1 & 0 & 6\\ 3 & 4 & 15\\ 5 & 6 & 21\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

Exercice 75 (1148, barraud, 2003/09/01)**.**
Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64\\ 1 & 5 & 25 & 125\end{vmatrix}$$

Exercice 76 (1136, barraud, 2003/09/01)**.**
Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant $\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 8 & 9\end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 77 (1144, barraud, 2003/09/01)**.**
Soit $(a_1,a_2,a_3)\in(\mathbb{K})^3$. On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_1\end{pmatrix}\qquad\text{et } V=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j & j^2\\ 1 & j^2 & j\end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, et en déduire $\det(A)$.

1.8 Compacité

Exercice 78 (1763, maillot, 2001/09/01).
Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?
– $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \|(x, y)\| \leq 2 \text{ et } xy = 1\}$.
– $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \|(x, y)\| \leq 2 \text{ et } xy = 1\}$.
– $C = \{(x, \cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 18 \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.

1.9 Dérivées

Exercice 79 (698, bodin, 1998/09/01).
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 80 (699, bodin, 1998/09/01).
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 81 (700, bodin, 1998/09/01).
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 82 (701, bodin, 1998/09/01).
Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 83 (703, bodin, 1998/09/01). *Formule de Leibnitz*
Étant données u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I, montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1 + x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 84 (705, cousquer, 2003/10/01).
Calculer les dérivées des fonctions :

1. $x \mapsto \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}$, $\qquad x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$.
2. $x \mapsto \log(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})$, $\qquad x \mapsto (x(x-2))^{1/3}$.

Exercice 85 (709, ridde, 1999/11/01).
Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est C^∞ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 86 (1221, legall, 1998/09/01).
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$.

Exercice 87 (1223, legall, 1998/09/01).
Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin\,(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $g : x \mapsto x\sin\,(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $h : x \mapsto x^2\sin\,(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 88 (715, bodin, 1998/09/01).
Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples, et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 89 (717, legall, 1998/09/01).
Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 90 (718, legall, 1998/09/01).
Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a, b[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]a, b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 91 (721, bodin, 1998/09/01).
Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre "c" de $]a, b[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 92 (5524, rouget, 2010/07/15).
Construire les courbes de paramétrisations :

1. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \frac{t^2}{t^2-1} \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x = (t+2)e^{1/t} \\ y = (t-2)e^{1/t} \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t}{t^2-1} \\ y = \frac{t+2}{(t-1)^2} \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{array}\right.$
7. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{array}\right.$
8. $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{array}\right.$

1.10 L'exponentielle

Exercice 93 (42, cousquer, 2003/10/01).

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Exercice 94 (43, cousquer, 2003/10/01).
Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 95 (44, cousquer, 2003/10/01).

Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

Exercice 96 (45, cousquer, 2003/10/01).
Trouver les racines quatrièmes de 81 et de -81.

Exercice 97 (2939, quercia, 2010/03/08). *Racines de l'unité*
Résoudre :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.

2. $(z+1)^n = z^n = 1$.
3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
4. $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.
5. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$.
6. $\overline{x} = x^{n-1}$.
7. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Exercice 98 (1716, bodin, 1999/11/01)**.**
Calculer les puissances et l'exponentielle ($e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$) des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.11 Espaces vectoriels

Exercice 99 (886, legall, 1998/09/01)**.**
Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ 3x - 7y = z\}$
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2 - z^2 = 0\}$
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x + y - z = x + y + z = 0\}$
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z(x^2 + y^2) = 0\}$

Exercice 100 (888, legall, 1998/09/01)**.**
Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.
$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\right\}$
$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
$E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}$

Exercice 101 (893, legall, 1998/09/01)**.**
Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que

$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

Exercice 102 (5164, rouget, 2010/06/30). **T*
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de $f+g$ et $\lambda.f$ usuels) (ne pas hésiter à redémontrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel). Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1) $f(0)+f(1)=0$	2) $f(0)=0$	3) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$	4) $\forall x\in[0,1],\ f(x)+f(1-x)=0$
5) $\forall x\in[0,1],\ f(x)\geq 0$	6) $2f(0)=f(1)+3$		

Dans quel cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 103 (5165, rouget, 2010/06/30). ***T*
On munit $\mathbb{R}^n$ des lois produit usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=0\}$	2) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=1\}$
3) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=x_2\}$	4) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1+...+x_n=0\}$
5) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1.x_2=0\}$	

Exercice 104 (900, liousse, 2003/10/01).
Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1=(1,2,3,4)$ et $v_2=(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1)\in\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y)\in\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$?

Exercice 105 (908, legall, 1998/09/01).
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1=(2,3,-1)$ et $v_2=(1,-1,-2)$ et F celui engendré par $w_1=(3,7,0)$ et $w_2=(5,0,-7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 106 (914, legall, 1998/09/01).
Peut-on déterminer des réels x,y pour que le vecteur $v=(-2,x,y,3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1,e_2) où $e_1=(1,-1,1,2)$ et $e_2=(-1,2,3,1)$?

Exercice 107 (2781, tumpach, 2009/10/25).
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1}=(1,0,1)$, $\vec{v_2}=(0,2,2)$ et $\vec{v_3}=(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1}=(1,0,0)$, $\vec{v_2}=(0,1,1)$ et $\vec{v_3}=(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1}=(1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2}=(2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3}=(1,0,1,1,0)$ et $\vec{v_4}=(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1}=(2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2}=(1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v_3}=(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1}=(2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2}=(-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v_3}=(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 108 (5567, rouget, 2010/10/16). ***
Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 109 (984, cousquer, 2003/10/01).
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 110 (997, legall, 1998/09/01).
Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 111 (1013, ridde, 1999/11/01).
Déterminer une base de $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y = 0, x-y+z = 0\big\}$.

Exercice 112 (979, legall, 1998/09/01).
Montrer que les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 113 (981, liousse, 2003/10/01).

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $w = (1, 2, -3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 114 (3317, quercia, 2010/03/09). *Essai de bases*
Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1, 2)$ et $\vec{c} = (-2, 1, -2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{x} = (x, y, z)$.

Exercice 115 (3318, quercia, 2010/03/09). *Rang de vecteurs*
Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{a} = (3,2,1,0), \quad \vec{b} = (2,3,4,5), \quad \vec{c} = (0,1,2,3), \quad \vec{d} = (1,2,1,2), \quad \vec{e} = (0,-1,2,1).$$

Exercice 116 (980, liousse, 2003/10/01).
Soient $\vec{v_1}(1,2,3,4), \vec{v_2}(2,2,2,6), \vec{v_3}(0,2,4,4), \vec{v_4}(1,0,-1,2), \vec{v_5}(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = Vect\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ et $G = Vect\{\vec{v_4}, \vec{v_5}\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F + G$.

1.12 Formules de Taylor

Exercice 117 (1237, legall, 1998/09/01).
Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 7).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 7).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 118 (1239, ridde, 1999/11/01).
Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

Exercice 119 (1240, ridde, 1999/11/01).
Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\ln\cos x$ $n = 6$ $a = 0$.
2. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $n = 2$ $a = 0$.
3. $\ln\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ $n = 3$ $a = 0$.
4. $\ln\sin x$ $n = 3$ $a = \frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}$ $n = 4$ $a = +\infty$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ $a = 0$.
7. $x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$ $n = 2$ $a = +\infty$.

Exercice 120 (4019, quercia, 2010/03/11). *EIT 1999*
Calculer le développement limité de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 121 (5426, exo7, 2010/07/06). *IT*
Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}$

2. $\lim_{x\to\pi/2} |\tan x|^{\cos x}$
3. $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos(\frac{n\pi}{3n+1}) + \sin(\frac{n\pi}{6n+1})\right)^n$
4. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\ln|x|}$
5. $\lim_{x\to\pi/2} \cos x . e^{1/(1-\sin x)}$
6. $\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$
7. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\sin x}$
8. $\lim_{x\to e,\, x<e} (\ln x)^{\ln(e-x)}$
9. $\lim_{x\to 1,\, x>1} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(\operatorname{ch} x-1)}{x^2+1}$
11. $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$
12. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$
13. $\lim_{x\to 1/\sqrt{2}} \frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$
14. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cos(a+\frac{1}{x})}{\cos a}\right)^x$ (où $\cos a \neq 0$)

Exercice 122 (5427, exo7, 2010/07/06). *IT*
Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1. $\frac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0)
2. $\frac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0)
3. $\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0)
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)
5. $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0)
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$ (ordre 8 en 0)
7. $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1)
8. $\operatorname{Arctan}(\cos x)$ (ordre 5 en 0)
9. $\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0)
10. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$ (ordre 5 en 0)
11. $\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$ (ordre 10 en 0)
12. $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)
13. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π)

Exercice 123 (5429, exo7, 2010/07/06). ****
Etude au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{x^2-3}-\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1}$.

Exercice 124 (5430, exo7, 2010/07/06). ****
Soit $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 10 secondes puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x|\neq 1$ en à peine plus de temps).

Exercice 125 (5432, exo7, 2010/07/06). ***IT*
Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$.

Exercice 126 (5433, exo7, 2010/07/06). ***IT*

1. Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}$.
2. Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$.

Exercice 127 (5434, exo7, 2010/07/06). ****
Soient $a>0$ et $b>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

1. Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)$.
2. Même question pour $e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n}$.

Exercice 128 (5437, rouget, 2010/07/06). ****I*

1. Montrer que l'équation $\tan x=x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.
2. Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 129 (5438, rouget, 2010/07/06).

1. Montrer que l'équation $x+\ln x=k$ admet, pour k réel donné, une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée x_k.
2. Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, on a : $x_k=ak+b\ln k+c\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ où a, b et c sont des constantes à déterminer.

Exercice 130 (5439, rouget, 2010/07/10). ****
Soit $f(x)=1+x+x^2+x^3\sin\frac{1}{x^2}$ si $x\neq 0$ et 1 si $x=0$.

1. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Exercice 131 (5440, rouget, 2010/07/10). ***IT*
Etude au voisinage de 0 de $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{Arcsin}x}$ (existence d'une tangente ?)

Exercice 132 (5441, rouget, 2010/07/10). ***I*

1. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
2. Equivalent simple de $\operatorname{Arccos} x$ en 1.

1.13 Applications linéaires

Exercice 133 (929, legall, 1998/09/01).
Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Exercice 134 (5188, rouget, 2010/06/30). ***
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.
Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 135 (6871, chataur, 2012/05/13).
Par des considérations géométriques répondez aux questions suivantes :

1. Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?
2. Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
3. A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 136 (920, cousquer, 2003/10/01).
On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\operatorname{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. $\operatorname{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\operatorname{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\operatorname{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\operatorname{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 137 (923, ridde, 1999/11/01).
Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 138 (5565, rouget, 2010/10/16). *** I*
$E = \mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Soient $F = \{(x_1, ..., x_n) \in E/\ x_1 + ... + x_n = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1, ..., 1))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Préciser le projeté d'un vecteur x de E sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F.

Exercice 139 (970, ridde, 1999/11/01).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y)$. Montrer que f est la bîîîîp par rapport à bîîîîp parallèlement à bîîîîp.

Exercice 140 (974, gourio, 2001/09/01).
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Exercice 141 (2740, tumpach, 2009/10/25).

1. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
3. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
4. Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
5. Quelle est la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport k dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
6. Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
7. Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

Exercice 142 (2741, tumpach, 2009/10/25).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z + t, x + y + z + t, 2x + 2y + 2z + 2t)\,.$$

1. Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Vérifier que les vecteurs $\vec{a} = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1, 0)$ et $\vec{c} = (0, 0, 1, -1)$ appartiennent à $\ker f$.
3. Vérifier que le vecteur $\vec{d} = (5, 5, 5, 10)$ appartient à $\mathrm{Im} f$.

Exercice 143 (2433, matexo1, 2002/02/01).
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 144 (3400, quercia, 2010/03/10). *Changement de base*

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{L}\,)$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$ est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
On définit deux nouvelles bases : $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, 4\vec{I} + \vec{J} - 3\vec{L}, -7\vec{I} + \vec{K} + 5\vec{L}\,)$ et $\mathcal{B}' = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{k}\,)$.
Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?

Exercice 145 (5259, rouget, 2010/07/04). ****T*
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour n entier relatif.

Exercice 146 (956, legall, 1998/09/01).
Pour les applications linéaires suivantes, déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im} f_i$. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x, y) = (2x + y, x - y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_3(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_4(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Exercice 147 (934, cousquer, 2003/10/01).
Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Exercice 148 (941, legall, 1998/09/01).
Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\text{Ker }(\varphi) \cap \text{Im }(\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \text{Ker }(\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N} : \varphi^n(x) \neq 0$.

Exercice 149 (943, legall, 1998/09/01).
Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\ker f = \operatorname{Im} f$

(ii) $f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \cdot \operatorname{rg}(f)$

Exercice 150 (954, cousquer, 2003/10/01).
Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\begin{cases} \phi(e_1) &= e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) &= e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) &= e_1 + te_3 \end{cases}$ définit une application linéaire ϕ de E dans E. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 151 (959, legall, 1998/09/01).
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A et B deux polynômes à coefficients réels de degré $n+1$. On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \iff A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

Exercice 152 (3351, quercia, 2010/03/09). *Rang de $f \mapsto u \circ f \circ v$*

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $f \mapsto u \circ f \circ v$.

1.14 Intégrale de Riemann

Exercice 153 (2100, bodin, 2008/02/04).
Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$
2. $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 154 (5446, rouget, 2010/07/10). ****IT*
Limites de

1) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n}$ 2) $(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k))^{1/n}$ ($a>0$ donné) 3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ 4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$
5) $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}E(\sqrt{k})$ 6) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$ 7) $\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ 8) $n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n/k}}{k^2}$

Exercice 155 (812, bodin, 1998/09/01).
Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$$

Effectuer le changement de variables $u=\sqrt{e^x-1}$ et calculer I.

Résultat : $I = 2-\pi/2$.

Exercice 156 (2098, bodin, 2008/02/04).
Calculer $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$ (on posera $\theta = \arcsin\frac{x}{R}$) et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.

Exercice 157 (6865, bodin, 2012/04/13).
Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx$
2. $\int\frac{1}{x\ln x}\,dx$
3. $\int\frac{1}{3+\exp(-x)}dx$
4. $\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

Exercice 158 (2099, bodin, 2008/02/04).
Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y=\dfrac{x^2}{2}$ et $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 159 (808, cousquer, 2003/10/01).
On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant

dans plan fixe. Montrer que dans un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$ Représenter la cycloïde et calculer : la longueur L d'une arche, l'aire A de la surface S comprise entre cette arche et la droite fixe (Ox), les volumes V_1 et V_2 obtenus par révolution de S autour de Ox et Oy respectivement, les aires A_1 et A_2 obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de Ox et Oy respectivement.

Exercice 160 (809, cousquer, 2003/10/01)**.**
On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon R en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose $n = R/r$. Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= r\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y &= r\big((n+1)\sin t - \sin(n+1)t\big) \end{cases}$$

Représenter la courbe pour $n = 1, 2, 3$. En supposant n entier, calculer la longueur L de la courbe et l'aire A limitée par celle-ci. Dans le cas $n = 1$ (*cardioïde*), calculer de plus l'aire S de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume V limitée par cette surface.

Exercice 161 (810, cousquer, 2003/10/01)**.**
Soit C un cercle fixe de rayon R. Un cercle C' de même rayon roule sans glisser sur C en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de C. Un point M lié au cercle C' décrit une courbe Γ. Montrer que suivant un repère convenablement choisi, Γ admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= R(\cos t + \sin^2 t) \\ y &= R \sin t(1 - \cos t) \\ z &= R(1 - \cos t) \end{cases}$. En déduire la longueur L de Γ. Représenter les projections de Γ sur chacun des trois plans de coordonnées.

1.15 Fractions rationnelles

Exercice 162 (824, cousquer, 2003/10/01)**.**
Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.

5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Exercice 163 (824, cousquer, 2003/10/01)**.**
Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.

9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Exercice 164 (2095, bodin, 2008/02/04)**.**
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

Exercice 165 (2090, bodin, 2008/02/04)**.**
Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\displaystyle\int \sin^8 x \cos^3 x dx$ **b)** $\displaystyle\int \cos^4 x dx$ **c)** $\displaystyle\int \cos^{2003} x \sin x dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx$
e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{7+\tan x}dx$

1.16 Diagonalisation

Exercice 166 (3401, quercia, 2010/03/10)**.** *Matrices semblables*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.
(On cherchera P inversible telle que $PB = AP$)

Exercice 167 (3404, quercia, 2010/03/10)**.** *Matrices non semblables*

Soient $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A-I)^2$ et $(B-I)^2$).

Exercice 168 (5627, rouget, 2010/10/16). ***I

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 169 (1605, barraud, 2003/09/01).

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&-1&0&1\\-2&0&0&2\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&1&3\\-1&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\-1&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible,

1. montrer que $\{0\}\subset \mathrm{Ker}A\subset \mathrm{Ker}A^2\subset \mathrm{Ker}A^3=\mathbb{R}^4$
et déterminer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^2$,
2. déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}A^2\oplus \mathrm{Vect}(e_1)$,
3. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre,
4. montrer que $Ae_1\in \mathrm{Ker}A^2$, et que $\mathrm{Ker}A^2=\mathrm{Ker}A\oplus \mathrm{Vect}(Ae_1)$,
5. montrer que $A^2e_1\in \mathrm{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Vect}(A^2e_1)\oplus \mathrm{Vect}(e_2)$,
6. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Caluler $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C

Exercice 170 (2467, matexo1, 2002/02/01).

Donner les valeurs propres, vecteurs propres et matrice de diagonalisation éventuelle des matrices suivantes dans $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix}4&4\\1&4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}2&5\\4&3\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}5&3\\-8&6\end{pmatrix}.$$

Exercice 171 (2762, tumpach, 2009/10/25).

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 172 (2763, tumpach, 2009/10/25).
Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

Exercice 173 (2468, matexo1, 2002/02/01).
Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes, et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ ayant pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étudier, dans les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si u est diagonalisable. En donner une forme diagonalisée dans une base dont on donnera la matrice de passage par rapport à la base canonique.

Exercice 174 (2580, delaunay, 2009/05/19).
Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Exercice 175 (2764, tumpach, 2009/10/25).
Trouver une matrice carrée inversible P telle que $B = PAP^{-1}$ soit diagonale, et écrire la matrice B obtenue, pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 176 (2765, tumpach, 2009/10/25). *DS mai 2008*
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.
   (b) En déduire que l'on peut diagonaliser A.
2. (a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vecteurs propres tels que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$
   (b) Préciser la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$; quelle relation lie les matrices A, P, P^{-1} et D ?
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Après avoir donné D^n, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 177 (2766, tumpach, 2009/10/25)**.** *DS mai 2008*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. (a) Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A.
   (b) A est diagonalisable ; justifier cette affirmation et diagonaliser A.

1.17 Équations différentielles

Exercice 178 (4054, quercia, 2010/03/11)**.** *Équations linéaires d'ordre 1*

Intégrer les équations suivantes :

1. $(2 + x)y' = 2 - y$.
2. $xy' + y = \cos x$.
3. $(1 + x)y' + y = (1 + x)\sin x$.
4. $x^3y' - x^2y = 1$.
5. $3xy' - 4y = x$.
6. $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$.
7. $2x(1 - x)y' + (1 - 2x)y = 1$.
8. $x(x + 1)y' + y = \arctan x$.
9. $x(x^2 - 1)y' + 2y = x\ln x - x^2$.
   pour 8 : Étudier les problèmes de raccordement.

Exercice 179 (4055, quercia, 2010/03/11)**.** *Équations d'ordre 2 à coefficients constants*

Intégrer :

1. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.
3. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.
4. $y'' + y = \mathrm{cotan} x$.
5. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
6. $y'' + y = P(x)$ où P est un polynôme.
7. $y'^2 + y^2 = 1$ (dériver).

Exercice 180 (4064, quercia, 2010/03/11)**.** *Systèmes différentiels à coefficients constants*

x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 2x + z + \mathrm{sh}\, t \\ y' = x - y - z + \mathrm{ch}\, t \\ z' = -x + 2y + 2z - \mathrm{ch}\, t. \end{cases}$

Quelques indications

Indications 14.
1. f est injective mais pas surjective.
2. g est bijective.
3. h aussi.
4. k est injective mais par surjective.

Indications 16. Prouver que l'égalité est fausse.

Indications 18. Pour la première assertion le début du raisonnement est : "supposons que $g \circ f$ est injective, soient $a, a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$",... à vous de travailler, cela se termine par "...donc $a = a'$, donc f est injective."

Indications 20. id est l'application identité définie par $id(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Donc $f \circ f = id$ signifie $f \circ f(c) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Indications 22. Deux propositions sont fausses...

Indications 26. Raisonner par l'absurde !

Indications 27. Pour se "débarrasser" d'un dénominateur écrivez $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Indications 29. Pour $z = a + ib$ on cherche $\omega = \alpha + i\beta$ tel que $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$. Développez et indentifiez. Utilisez aussi que $|\omega|^2 = |z|$.

Indications 30. Pour les équation du type $az^4 + bz^2 + c = 0$, poser $Z = z^2$.

Indications 32.
1.
2. $\dot{6}^2 = -\dot{1}$.

Indications 43. Écrire la convergence de la suite et fixer $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Une suite est *stationnaire* si, à partir d'un certain rang, elle est constante.

Indications 44. Dans l'ordre c'est vrai, faux et vrai. Lorsque c'est faux chercher un contre-exemple, lorsque c'est vrai il faut le prouver.

Indications 45. Pour la deuxième question, raisonner par l'absurde et trouver deux sous-suites ayant des limites distinctes.

Indications 46. On prendra garde à ne pas parler de limite d'une suite sans savoir au préalable qu'elle converge !
Vous pouvez utiliser le résultat du cours suivant : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ alors toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.

Indications 47. Remarquer que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. Puis simplifier l'écriture de u_n.

Indications 49. 1. C'est un calcul de réduction au même dénominateur.

2. Pour montrer la décroisance, montrer $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
3. Montrer d'abord que la suite converge, montrer ensuite que la limite est $\sqrt{a}$.
4. Penser à écrire $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$.
5. Raisonner par récurrence.
6. Pour $u_0 = 3$ on a $u_1 = 3,166\ldots$, donc $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ et on peut prendre $k = 0.17$ par exemple et $n = 4$ suffit pour la précision demandée.

Indications 50. 1. Regarder ce que donne l'inégalité en élevant au carré de chaque coté.

2. Petites manipulations des inégalités.
3. (a) Utiliser 1.
   (b) Utiliser 2.
   (c) Une suite croissante et majorée converge ; une suite décroissante et minorée aussi.

Indications 51. On notera $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \quad - 1$.

1. C'est une étude de la fonction f_n.
2. On sait que $f_n(a_n) = 0$. Montrer par un calcul que $f_n(a_{n-1}) > 0$, en déduire la décroissance de (a_n). En calculant $f_n(\frac{1}{2})$ montrer que la suite (a_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Une fois établie la convergence de (a_n) vers une limite ℓ, composer l'inégalité $\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n$ par f_n. Conclure.

Indications 52. 1. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

2. Montrer que (u_n) est majorée et (v_n) minorée. Montrer que ces suites ont la même limite.
3. Raisonner par l'absurde : si la limite $\ell = \frac{p}{q}$ alors multiplier l'inégalité $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ par $q!$ et raisonner avec des entiers.

Indications 53. Pour établir ou réfuter l'existences d'une limite particulière dans le plan et pour ensuite déterminer une limite pourvu qu'elle existe, utiliser le fait que pour que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ existe dans le plan $\mathbb{R}^2$ il faut et il suffit que chacune des limites $\lim_{n\to\infty} x_n$ et $\lim_{n\to\infty} y_n$ existe en tant que limite finie.

Indications 66. Distinguer trois intervalles pour la formule définissant f^{-1}.

Indications 67. Ce n'est pas très dur mais il y a quand même quelque chose à démontrer : ce n'est pas parce que $f(x)$ vaut $+1$ ou -1 que la fonction est constante. Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Indications 68. Oui pour le deux premières en posant $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, non pour la troisième.

Indications 70.
1. On pourra utiliser la variante de l'inégalité triangulaire $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.
2. Utiliser la première question pour montrer que $|f - g|$ est continue.

Indications 71. Il faut raisonner en deux temps : d'abord écrire la définition de la limite en $+\infty$, en fixant par exemple $\varepsilon = 1$, cela donne une borne sur $[A, +\infty]$. Puis travailler sur $[0, A]$.

Indications 72. Le "ε" vous est donné, il ne faut pas y toucher. Par contre c'est à vous de trouver le "δ".

Indications 79. Les problèmes sont seulement en 0 ou 1. f_1 est dérivable en 0 mais pas f_2. f_3 n'est dérivable ni en 0, ni en 1.

Indications 80. Vous avez deux conditions : il faut que la fonction soit continue (car on veut qu'elle soit dérivable donc elle doit être continue) et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.

Indications 81. f est continue en 0 en la prolongeant par $f(0) = 0$. f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Indications 82. On ne cherchera pas à utiliser la formule de Leibniz mais à linéariser les expressions trigonométriques.

Indications 88. Il faut appliquer le théorème de Rolle une fois au polynôme $(1 - t^2)^n$, puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde,...

Indications 89. On peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.

Indications 90. C'est encore Rolle de nombreuses fois

Indications 99.
1. E_1 est un sous-espace vectoriel.
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. E_3 est un sous-espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Indications 100.
1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.

Indications 101.

1. Pour le sens $\Rightarrow$: raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
2. Raisonner par double inclusion, revenir aux vecteurs.

Indications 104. On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

Indications 105. Montrer la double inclusion. Utiliser le fait que de manière générale pour $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ alors :

$$E \subset F \iff \forall i = 1, \ldots, n \quad v_i \in F.$$

Indications 113. Être une base, c'est être libre et génératrice. Chacune de ces conditions se vérifie par un système linéaire.

Indications 133. Une seule application n'est pas linéaire.

Indications 135.

1. Jamais.
2. Jamais.
3. Considérer un vecteur directeur de la droite.

Indications 136.

1. Non.
2. Oui.
3. Non.
4. Non.

Indications 137. Soit

$$G = \left\{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E.

Indications 140. Pour une fonction f on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui vérifie $\pi(f) \in P$, $\pi \circ \pi = \pi$ et $\ker \pi = I$.

Indications 147. Faire un dessin de l'image et du noyau pour $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que le noyau est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

Indications 149. Pour chacune des implications utiliser la formule du rang.

Indications 150. $t = 0$ est un cas à part.

Indications 151. Résultats utiles d'arithmétique des polynômes : la division euclidienne, le théorème de Bézout, le lemme de Gauss.

Indications 153. On pourra essayer de reconnaître des sommes de Riemann, puis calculer des intégrales. Pour le produit composer par la fonction ln, afin de transformer le produit en une somme.

Indications 157.

1. $\int \cos^{1234} x \sin x \, dx = -\frac{1}{1235}\cos^{1235} x + c$ (changement de variable $u = \cos x$)
2. $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln|\ln x| + c$ (changement de variable $u = \ln x$)
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$ (changement de variable $u = \exp x$)
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$ (changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$)

Indications 158. Un dessin ne fait pas de mal ! Il faut ensuite résoudre l'équation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$ puis calculer deux intégrales.

Indications 164. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = 1$ (changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (utiliser la précédente).

Quelques corrections

Je n'ai pas vérifié ces corrections. Visiblement pour certaines il manque des images, et certaines formules ont été mal saisies.

pg

Correction 10. "Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction 11.

1. "Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit." Bien sûr cette dernière phrase est fausse !
2. "Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire."
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit
$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \ \exists y \in \mathbb{Z} \ \ \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Rightarrow z < x + 1),$$
la négation est
$$\exists x \in \mathbb{Z} \ \ \forall y \in \mathbb{Z} \ \ \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geq x + 1).$$
4. $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geq \varepsilon)$.

Correction 14.

1. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$ (si ce n existait ce serait $n = -1$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$). Par contre f est injective : soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$ alors $n+1 = n'+1$ donc $n = n'$. Bilan f est injective, non surjective et donc non bijective.
2. Pour montrer que g est bijective deux méthodes sont possibles. Première méthode : montrer que g est à la fois injective et surjective. En effet soient $n, n' \in \mathbb{Z}$ tels que $g(n) = g(n')$ alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$, alors g est injective. Et g est surjective car chaque $m \in \mathbb{Z}$ admet un antécédent par g : en posant $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ on trouve bien $g(n) = m$. Deuxième méthode : expliciter directement la bijection réciproque. Soit la fonction $g' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g'(m) = m - 1$ alors $g' \circ g(n) = n$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$) et $g \circ g'(m) = m$ (pour tout $m \in \mathbb{Z}$). Alors g' est la bijection réciproque de g et donc g est bijective.
3. Montrons que h est injective. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(x, y) = h(x', y')$. Alors $(x + y, x - y) = (x' + y', x' - y')$ donc
$$\begin{cases} x + y & = x' + y' \\ x - y & = x' - y' \end{cases}$$
En faisant la somme des lignes de ce système on trouve $2x = 2x'$ donc $x = x'$ et avec la différence on obtient $y = y'$. Donc les couples (x, y) et (x', y') sont égaux. Donc h est injective.

Montrons que h est surjective. Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons lui un antécédent (x,y) par h. Un tel antécédent vérifie $h(x,y) = (X,Y)$, donc $(x+y, x-y) = (X,Y)$ ou encore :

$$\begin{cases} x+y &= X \\ x-y &= Y \end{cases}$$

Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient $x = \frac{X+Y}{2}$ et avec la différence $y = \frac{X-Y}{2}$, donc $(x,y) = (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. La partie "analyse" de notre raisonnement en finie passons à la "synthèse" : il suffit de juste de vérifier que le couple (x,y) que l'on a obtenu est bien solution (on a tout fait pour !). Bilan pour (X,Y) donné, son antécédent par h existe et est $(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Donc h est surjective.

En fait on pourrait montrer directement que h est bijective en exhibant sa bijection réciproque $(X,Y) \mapsto (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Mais vous devriez vous convaincre qu'il s'agit là d'une différence de rédaction, mais pas vraiment d'un raisonnement différent.

4. Montrons d'abord que k est injective : soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $k(x) = k(x')$ alors $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$ donc $(x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1)$. En développant nous obtenons $xx'+x'-x = xx'-x'+x$, soit $2x = 2x'$ donc $x = x'$.

   Au brouillon essayons de montrer que k est surjective : soit $y \in \mathbb{R}$ et cherchons $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $f(x) = y$. Si un tel x existe alors il vérifie $\frac{x+1}{x-1} = y$ donc $x+1 = y(x-1)$, autrement dit $x(y-1) = y+1$. Si l'on veut exprimer x en fonction de y cela se fait par la formule $x = \frac{y+1}{y-1}$. Mais attention, il y a un piège ! Pour $y = 1$ on ne peut pas trouver d'antécédent x (cela revient à diviser par 0 dans la fraction précédente). Donc k n'est pas surjective car $y = 1$ n'a pas d'antécédent.

   Par contre on vient de montrer que s'il l'on considérait la restriction $k_| : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est définie aussi par $k_|(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (seul l'espace d'arrivée change par rapport à k) alors cette fonction $k_|$ est injective et surjective, donc bijective (en fait sa bijection réciproque est elle même).

Correction 16. Si $f \circ g = g \circ f$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x = 0$. Alors $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g \circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$.

Correction 18. 1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soient $a,\ a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

c'est la définition de f injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.

3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.

   Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après la question 2. g est surjective.

   Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.

   Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction 20. Soit $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f \circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1 - x$ donc $f \circ f(x) = f(1-x)$, mais $1 - x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ (vérifiez-le !) donc $f \circ f(x) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$. Donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $f \circ f(x) = x$. Et donc $f \circ f = id$.

Correction 21. Montrons quelques assertions.
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \\
&\Leftrightarrow f(x) \notin A \\
&\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \qquad \text{car } f^{-1}(A) = \{x \in E \;/\; f(x) \in A\} \\
&\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A)
\end{aligned}$$

Correction 22.
1. Vrai.
2. Faux. C'est vrai avec l'hypothèse $B \subset A$ et non $A \subset B$.
3. Vrai.
4. Faux. Il y a égalité.

5. Vrai.
6. Vrai.

Correction 26. Par l'absurde supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel. Il s'écrit alors $\frac{p}{q}$ avec $p \geqslant 0, q > 0$ des entiers. On obtient $q \ln 3 = p \ln 2$. En prenant l'exponentielle nous obtenons : $\exp(q \ln 3) = \exp(p \ln 2)$ soit $3^q = 2^p$. Si $p \geq 1$ alors 2 divise 3^q donc 2 divise 3, ce qui est absurde. Donc $p = 0$. Ceci nous conduit à l'égalité $3^q = 1$, donc $q = 0$. La seule solution possible est $p = 0$, $q = 0$. Ce qui contredit $q \neq 0$. Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Correction 27. Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$$

Calculons
$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$
et
$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i.$$
Donc
$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z + \overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$ et donc $z + \overline{z} = -3$.

Correction 28. Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1,$$

et

$$|z| = |z-1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \mathrm{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2.$$

Correction 29. Racines carrées. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Écrivons $\omega = \alpha + i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Par somme et différence des deux premières lignes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α, β) de solutions et donc deux racines carrées (opposées) $\omega = \alpha + i\beta$ de z.
En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z =$

$8-6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ \text{ou} \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de $z = 8-6i$ sont donc $\omega_1 = 3-i$ et $\omega_2 = -\omega_1 = -3+i$.
Pour les autres :
- Les racines carrées de 1 sont : $+1$ et -1.
- Les racines carrées de i sont : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- Les racines carrées de $3+4i$ sont : $2+i$ et $-2-i$.
- Les racines carrées de $7+24i$ sont : $4+3i$ et $-4-3i$.

Correction 30. Équations du second degré. La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2+bz+c=0$ (avec $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2-\sqrt{3}z-i=0$, $\Delta = 3+4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2+i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Les solutions des autres équations sont :

– L'équation $z^2+z+1=0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.
– L'équation $z^2-(1+2i)z+i-1=0$ a pour solutions : $1+i$, i.
– L'équation $z^2-\sqrt{3}z-i=0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}+i)$, $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}-i)$
– L'équation $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$ a pour solutions : $5-12i$, $-2i$.
– L'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$ a pour solutions : $2+3i$, $1+i$.
– L'équation $4z^2-2z+1=0$ a pour solutions : $\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$.
– L'équation $z^4+10z^2+169=0$ a pour solutions : $2+3i$, $-2-3i$, $2-3i$, $-2+3i$.
– L'équation $z^4+2z^2+4=0$ a pour solutions : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

Correction 31. Cercle circonscrit $\Rightarrow$ ssi $|z|=1$.

Correction 32. 1. $x=\dot{\overline{25}}$, $y=\dot{\overline{32}}$.
2. $x=\dot{\overline{15}}$ ou $\dot{\overline{16}}$.

Correction 33. 1. $\dot{0}$, $\pm\dot{1}$, $\pm\dot{5}$.
2.
3.

Correction 34. 1. $A=3X^5+4X^2+1$, $B=X^2+2X+3$, le quotient de A par B est $3X^3-6X^2+3X+16$ et le reste $-47-41X$.
2. $A=3X^5+2X^4-X^2+1$, $B=X^3+X+2$ le quotient de A par B est $3X^2+2X-3$ et le reste est $7-9X^2-X$.
3. $A=X^4-X^3-X-2$, $B=X^2-2X+4$, le quotient de A par B est X^2+X-2 de reste $6-9X$.

Correction 35. Soient $A=X^5-7X^4-X^2-9X+9$, $B=X^2-5X+4$, le quotient de A par B est $X^3-2\,X^2-14\,X-63$, le reste étant $261-268\,X$.

Correction 36.
$$\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

Correction 37. 1. $\left\{\begin{array}{rcl} X^3-3 & = & (X-\sqrt[3]{3})(X^2+\sqrt[3]{3}\,X+\sqrt[3]{9}) \\ & = & (X-\sqrt[3]{3})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{array}\right.$

2. $$\left\{\begin{array}{rcl} X^{12}-1 & = & (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)\times \\ & & \quad (X^2-\sqrt{3}\,X+1)(X^2+\sqrt{3}\,X+1) \\ & = & (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\times \\ & & \quad \left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\times \\ & & \quad \left(X-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right). \end{array}\right.$$

Correction 38. 1. $X^6+1=-\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.

2. $X^9+X^6+X^3+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Correction 39. 1. $\mathrm{pgcd}(X^3-X^2-X-2, X^5-2X^4+X^2-X-2) = X-2$.

2. $\mathrm{pgcd}(X^4+X^3-2X+1, X^3+X+1) = 1$.

Correction 40. 1. $\mathrm{pgcd}(X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1, X^4+2X^3+X+2) = X^3+1$.

2. $\mathrm{pgcd}(X^4+X^3-3X^2-4X-1, X^3+X^2-X-1) = X+1$

3. $\mathrm{pgcd}(X^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+1, X^4+2X^3+2X^2+X+1) = 1$.

Correction 41. 1. $D = X^2+3X+2 = A(\frac{1}{18}X-\frac{1}{6})+B(-\frac{1}{18}X^2+\frac{1}{9}X+\frac{5}{18})$.

2. $D = 1 = A(-X^3)+B(X^5+X^3+X+1)$.

Correction 42. Les solutions sont les polynômes de la forme

$$P = \frac{1}{16}(5X^7-21X^5+35X^3-35X)+A(X-1)^4(X+1)^4$$

où A est un polynôme quelconque ; une seule solution de degré ≤ 7.

Correction 43. Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Dans l'intervalle $I =]\ell-\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.
La convergence de (u_n) s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons un N correspondant. Et pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$. Mais de plus u_n est un entier, donc

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite (u_n) est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction 44. 1. Vrai. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite (c'est un résultat du cours).

2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

3. Vrai. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\text{ tel que }\; (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel

$$2p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que

$$2p+1 \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Correction 45. 1. $u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n$.

2. $u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = u_1$. Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ. Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers ℓ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pour tout n alors $\ell = 1$. D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers ℓ, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos\frac{2\pi}{q}$. Nous obtenons une contradiction car pour $q \geq 2$, nous avons $\cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Correction 46. Il est facile de se convaincre que (u_n) n'a pas de limite, mais plus délicat d'en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite (u_n) converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite u_n est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant

Théorème : Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers deux limites ℓ et ℓ'. Alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = \ell + \ell'$.

De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doit forcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante.

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite (u_n) n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que u_n converge).
Rappel. Une *sous-suite* de (u_n) (on dit aussi *suite extraite* de (u_n)) est une suite (v_n) de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Cette fonction ϕ correspond “au choix des indices qu'on veut garder” dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite (u_n) que les termes pour lesquels n est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n). On a que $v_n = 1 + 1/2n \to 1$ et que $w_n = -1 + 1/(2n+1) \to -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :
Théorème : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ (le théorème est encore vrai si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$). Alors, toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.
Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = \ell$ et $\lim w_n = \ell$ donc $\ell = 1$ et $\ell = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que (u_n) était convergente est donc fausse. Donc (u_n) ne converge pas.

Correction 47. Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2}\frac{(3-1)(3+1)}{3.3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Donc (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction 48.
1. 0.
2. 1.
3. 7/30.
4. 1/2.
5. 1.

6. $-3/2$.
7. 1.
8. 3.
9. 1 ; 2.
10. $3/4$.
11. 0.
12. 0.
13. $1/3$.

Correction 49. 1.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2+a}{u_n}\right)^2 - a \\
&= \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\
&= \frac{1}{4}\frac{(u_n^2-a)^2}{u_n^2}
\end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n \geqslant 0$ on a $u_n > 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a \geqslant 0$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. Soit $n \geqslant 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$ car $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$
quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$
La seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$$
s'écrit aussi
$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-\sqrt{a} &= (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(u_{n+1}+\sqrt{a})}\left(\frac{u_n+\sqrt{a}}{u_n}\right)^2\\
&\leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2\\
&\leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

5. Par récurrence pour $n=1$, $u_1-\sqrt{a}\leqslant k$. Si la proposition est vraie rang n, alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-\sqrt{a} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2\\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2\\
&\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}
\end{aligned}$$

6. Soit $u_0=3$, alors $u_1=\frac{1}{2}(3+\frac{10}{3})=3,166\ldots$. Comme $3\leqslant\sqrt{10}\leqslant u_1$ donc $u_1-\sqrt{10}\leq 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k=0,17$. Pour que l'erreur $u_n-\sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53\times10^{-10}$. Nous obtenons $u_4=3,16227766\ldots$ Bilan $\sqrt{10}=3,16227766\ldots$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule. Le nombre de chiffres exacts double à chaque itération, avec u_5 nous aurions (au moins) 16 chiffres exacts, et avec u_6 au moins 32...

Correction 50. 1. Soient $a,b>0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$. De plus,

$$\begin{aligned}
ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow 4ab\leqslant a^2+2ab+b\\
&\Leftrightarrow 0\leqslant a^2-2ab+b^2
\end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai car $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.

2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a\leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités

$$a/2\leqslant a/2\leqslant b/2$$

$$a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$

on obtient

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$

De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$

on obtient

$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Il faut avant tout remarquer que pour tout n, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (qui est u_{n+1}) et arithmétique (qui est v_{n+1}) sont strictement positives.
   (a) On veut montrer que pour chaque n, $u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.
   (b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.
   (c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite ℓ. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite ℓ'. Nous savons maintenant que $u_n \to \ell$, donc aussi $u_{n+1} \to \ell$, et $v_n \to \ell'$; la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ s'écrit à la limite :

$$\ell = \sqrt{\ell\ell'}.$$

   De même la relation $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ donnerait à la limite :

$$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}.$$

   Un petit calcul avec l'une ou l'autre de ces égalités implique $\ell = \ell'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.

Définition Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,

3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.

Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que (u_n) et (v_n) vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geqslant 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leqslant w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

Correction 51. Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \quad - 1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n, admet un zéro dans l'intervalle $[0,1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0,1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned}
f_n(a_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 \\
&= a_{n-1}^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\
&= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\
&= a_{n-1}^n \quad \text{(car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}\text{).}
\end{aligned}$$

   Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

   Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc $a_n < a_{n-1}$. Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.

   Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2.$$

Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.
Pour résumer, nous avons montré que la suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f_n(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geqslant 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des "gendarmes"). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1-\ell^{n+1}}{1-\ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$

Correction 52. 1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(\frac{2}{n} - 1).$$

Donc à partir de $n \geq 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. Comme $u_n \leq v_n \leq v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geq u_n \geq u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.

3. Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous obtenons pour $n \geq 2$:
$$u_n \leq \frac{p}{q} \leq v_n.$$
Ecrivons cette égalité pour $n = q$: $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!v_q$. Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc :
$$q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!u_q + 1.$$
Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$ ou à $q!u_q+1 = q!v_q$. Nous obtenons que $\ell = \frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q. Supposons par exemple que $\ell = u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors $u_q < u_{q+1} < \cdots < \ell$, ce qui aboutit à une contradiction. Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell = v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante. Pour conclure nous avons montré que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

En fait ℓ est le nombre $e = \exp(1)$.

Correction 53. Des calculs élémentaires donnent

1. $u_1 = (\frac{1}{2}, \cos 1),\ u_2 = (\frac{16}{15}, \cos\frac{1}{2}),\ \ldots\ , u_{10} = (\frac{400}{143}, \cos\frac{1}{10}),\ \ldots$
2. $u_1 = (\frac{1}{2}\arctan 1, \sin(\frac{\pi}{4e})),\ u_2 = (\frac{4}{5}\arctan 2, \sin(\frac{\pi}{4e^{1/2}})),$
$u_3 = (\frac{9}{10}\arctan 3, \sin(\frac{\pi}{4e^{1/3}})),\ \ldots\ , u_{10} = (\frac{100}{101}\arctan(10), \sin(\frac{\pi}{4e^{1/10}})),\ \ldots$
3. $u_1 = (\sinh 1, 0),\ u_2 = (\sinh 2, \frac{\ln 2}{2}),\ u_3 = (\sinh 3, \frac{\ln 3}{3}),\ \ldots\ ,$
$u_{10} = (\sinh 10, \frac{\ln 10}{10}),\ \ldots$
4. $u_1 = a^n(\cos(\alpha), \sin(\alpha)),\ u_2 = a^2(\cos(2\alpha), \sin(2\alpha)),$
$u_3 = a^3(\cos(3\alpha), \sin(3\alpha)),\ \ldots\ , u_{10} = a^{10}(\cos(10\alpha), \sin(10\alpha)),\ \ldots$

Les limites pouvu qu'elles existent se calculent ainsi :

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2+4n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} = 4$, $\lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = \cos(0) = 1$ d'où
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2}{n^2+4n+3}, \cos\frac{1}{n}\right) = (4, 0).$$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \arctan n = \pi/2,$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \arctan n}{n^2+1} = \pi/2$ mais $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n}))$ n'existe pas d'où
$$\lim_{n\to\infty} u_n$$
n'existe pas.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ tandis que $\lim_{n\to\infty} \sinh n$ n'existe pas en tant que limite finie car
$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$$

d'où

$$\lim u_n = \lim \left(\sinh n, \frac{\ln n}{n}\right)$$

n'existe pas.

4. $\lim_{n\to\infty}(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$ n'existe pas tandis que pour que $\lim_{n\to\infty} a^n$ existe il faut et il suffit que $a \leq 1$ et, s'il en est ainsi, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ si $a < 1$ et $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$ si $a = 1$. Par conséquent : Pour que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a^n(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$$

existe il faut et il suffit que $a < 1$, et la limite vaut alors zéro.

Correction 54. Si $C = A \times B$ alors on obtient le coefficient c_{ij} (situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne de C) en effectuant le produit scalaire du i-ème vecteur-ligne de A avec le j-éme vecteur colonne de B.
On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Correction 64. 1. $g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2})$. Comme $f(a) = f(b)$ alors nous obtenons que $g(a) = -g(\frac{a+b}{2})$. Donc ou bien $g(a) \leq 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \geq 0$ ou bien $g(a) \geq 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.

2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t. Nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue. Soit $f(t) = d(t) - 4t$. Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$. Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$. Il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$. Donc $d(c + \frac{1}{2}) - d(c) = 4(c + \frac{1}{2}) - 4c = 2$. Donc entre c et $c + \frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Correction 66. 1. Le graphe est composé d'une portion de droite au dessus des $x \in]-\infty, 1[$; d'une portion de parabole pour les $x \in [1, 4]$, d'une portion d'une autre parabole pour les $x \in]4, +\infty$. (Cette dernière branche est bien une parabole, mais elle n'est pas dans le sens "habituel", en effet si $y = 8\sqrt{x}$ alors $y^2 = 64x$ et c'est bien l'équation d'une parabole.)

On "voit" immédiatemment sur le graphe que la fonction est continue (les portions se recollent !). On "voit" aussi que la fonction est bijective.

2. La fonction est continue sur $]-\infty, 1[$, $]1, 4[$ et $]4, +\infty[$ car sur chacun des ces intervalles elle y est définie par une fonction continue. Il faut examiner ce qui se passe en $x = 1$ et $x = 4$. Pour $x < 1$, $f(x) = x$, donc la limite à gauche (c'est-à-dire $x \to 1$ avec $x < 1$) est donc $+1$. Pour $x \geq 1$, $f(x) = x^2$ donc la limite à droite vaut aussi $+1$. Comme on a $f(1) = +1$ alors les limites à gauche, à droite et la valeur en 1 coïncident donc f est continue en $x = 1$.

   Même travail en $x = 4$. Pour $x \in [1, 4]$, $f(x) = x^2$ donc la limite à gauche en $x = 4$ est $+16$. On a aussi $f(4) = +16$. Enfin pour $x > 4$, $f(x) = 8\sqrt{x}$, donc la limite à droite en $x = 4$ est aussi $+16$. Ainsi f est continue en $x = 4$.

   Conclusion : f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Le graphe devrait vous aider : tout d'abord il vous aide à se convaincre que f est bien bijective et que la formule pour la bijection réciproque dépend d'intervalles. Petit rappel : le graphe de la bijection réciproque f^{-1} s'obtient comme symétrique du graphe de f par rapport à la bissectrice d'équation $(y = x)$ (dans un repère orthonormal).

   Ici on se contente de donner directement la formule de f^{-1}. Pour $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = x$. Donc la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in]-\infty, 1[$. Pour $x \in [1, 4]$, $f(x) = x^2$. L'image de l'intervalle $[1, 4]$ est l'intervalle $[1, 16]$. Donc pour chaque $y \in [1, 16]$, la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Enfin pour $x \in]4, +\infty[$, $f(x) = 8\sqrt{x}$. L'image de l'intervalle $]4, +\infty[$ est donc $]16, +\infty[$ et f^{-1} est définie par $f^{-1}(y) = \frac{1}{64}y^2$ pour chaque $y \in]16, +\infty[$.
   Nous avons définie $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de telle sorte que f^{-1} soit la bijection réciproque de f.

   C'est un bon exercice de montrer que f est bijective sans calculer f^{-1} : vous pouvez par exemple montrer que f est injective et surjective. Un autre argument est d'utiliser un résultat du cours : f est continue, strictement croissante avec une limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et on sait même que la bijection réciproque est continue).

Correction 67. Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$. Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1. Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$. Donc f est constante égale à $+1$.

Correction 68.

1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ t elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.
$$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leq |\sin x|.$$
Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.
2. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. Il faut remarquer que g est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $k(x) = \ln \frac{e^x+e^{-x}}{2}$: en effet $g(x) = \frac{k(x)-k(0)}{x-0}$. Donc si k est dérivable en 0 alors la limite de g en 0 est égale à la valeur de k' en 0.
Or la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ donc $k'(0) = 0$. Bilan : en posant $g(0) = 0$ nous obtenons une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. h est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
$$h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$
Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En -1 la fonction h ne peut être prolongée continuement, car en -1, h n'admet de limite finie.

Correction 70.

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x \in I$:$\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leq |f(x) - f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f + g$ et $f - g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f - g|$ est continue sur I, et finalement on peut conclure :
La fonction $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ est continue sur I.

Correction 71. Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad x > A \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon.$$
Fixons $\varepsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > A$, $\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$. Nous venons de montrer que f est bornée "à l'infini". La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, donc f est

bornée sur cet intervalle : il existe m, M tels que pour tout $x \in [0, A]$, $m \le f(x) \le M$. En prenant $M' = \max(M, \ell + 1)$, et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m' \le f(x) \le M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Correction 72. Commençons par la fin, trouver un tel δ montrera que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-3)| < \varepsilon$$

autrement dit la limite de f en $x_0 = 0$ est -3. Comme $f(0) = -3$ alors cela montre aussi que f est continue en $x_0 = 0$.

On nous donne un $\varepsilon > 0$, à nous de trouver ce fameux δ. Tout d'abord

$$|f(x) + 3| = \left| \frac{2x + 3}{3x - 1} + 3 \right| = \frac{11|x|}{|3x - 1|}.$$

Donc notre condition devient :

$$|f(x) + 3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11|x|}{|3x - 1|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \varepsilon \frac{|3x - 1|}{11}.$$

Comme nous voulons éviter les problèmes en $x = \frac{1}{3}$ pour lequel la fonction f n'est pas définie, nous allons nous placer "loin" de $\frac{1}{3}$. Considérons seulement les $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \frac{1}{6}$. Nous avons :

$$|x| < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < x < +\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} < 3x - 1 < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < |3x - 1|.$$

Et maintenant explicitons δ : prenons $\delta < \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11}$. Alors pour $|x| < \delta$ nous avons

$$|x| < \delta = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} < \varepsilon \cdot |3x - 1| \cdot \frac{1}{11}$$

ce qui implique par les équivalences précédentes que $|f(x) + 3| < \varepsilon$.
Il y a juste une petite correction à apporter à notre δ : au cours de nos calculs nous avons supposé que $|x| < \frac{1}{6}$, mais rien ne garantie que $\delta \le \frac{1}{6}$ (car δ dépend de ε qui pourrait bien être très grand, même si habituellement ce sont les ε petits qui nous intéressent). Au final le δ qui convient est donc :

$$\delta = \min(\frac{1}{6}, \frac{\varepsilon}{22}).$$

Remarque finale : bien sûr on savait dès le début que f est continue en $x_0 = 0$. En effet f est le quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas en x_0. Donc nous savons dès le départ qu'un tel δ existe, mais ici nous avons fait plus, nous avons trouvé une formule explicite pour ce δ.

Correction 79. 1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x = 0$. En effet $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis par multiplication par la fonction dérivable $x \mapsto x^2$, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme "f est dérivable sur I comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur I".

Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}.$$

Mais $x \cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos(1/x)| \leq 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$.

2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction f_3 s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

- Donc pour $x \geq 1$ on a $f_3(x) = x$; pour $0 \leq x < 1$ on a $f_3(x) = -x$; pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.
- La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Attention ! La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x \to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x \to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
- La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x < 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction 80. La fonction f est continue et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Le seul problème est en $x = 1$.

Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x\to 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc $a + b + 1 = 1$. Autrement dit $b = -a$.
Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales. Comme la fonction f restreinte à $]0, 1]$ est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ alors elle est dérivable à gauche et la dérivée à gauche s'obtient en évaluant la fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x = 1$. Donc $f'_g(1) = \frac{1}{2}$.
Pour la dérivée à droite il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, lorsque $x \to 1$ avec $x > 1$. Or

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{ax^2 + bx + 1 - 1}{x - 1} = \frac{ax^2 - ax}{x - 1} = \frac{ax(x - 1)}{x - 1} = ax.$$

Donc f est dérivable à droite et $f'_d(1) = a$. Afin que f soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales, donc ici la condition est $a = \frac{1}{2}$.
Le seul couple (a, b) que rend f dérivable sur $]0, +\infty[$ est $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$.

Correction 81. f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Comme $|\sin(1/x)| \leq 1$ alors f tend vers 0 quand $x \to 0$. Donc en prolongeant f par $f(0) = 0$, la fonction f prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Le taux d'accroissement est
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$
Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.

Correction 82.
1. Selon que $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x$.
2. La dérivée de $\sin^2 x$ est $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2 \cos 2x, -4 \sin 2x, -8 \cos 2x, 16 \sin 2x$,... Et selon que $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1} \sin 2x$, $2^{n-1} \cos 2x$, $-2^{n-1} \sin 2x$, $-2^{n-1} \cos 2x$.
3. $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$ et on dérive...

Correction 85. La limite de f en 0 est 0, donc f est continue en 0. De même le taux d'accroissement de f en 0 est $f(x)/x$ qui tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En dehors de 0, on a $f'(x) = 2e^{-x^{-2}} x^{-3}$ donc f' est continue en 0.

On continue de la même façon en remarquant que si $f^{(n)}(x) = P(1/x)\exp(-1/x^2)$ où P est un polynôme et $f^{(n)}(0) = 0$. Donc $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 si x tend vers 0. Donc $f^{(n)}$ est continue. De plus $f^{(n)}$ est dérivable en 0 car son taux d'accroissement vaut $1/xP(1/x)\exp(-1/x^2)$ qui tend vers 0, donc $f^{(n+1)}(0) = 0$. En dehors de 0 on $f^{(n+1)}(x) = Q(1/x)\exp(-1/x^2)$ où Q est un polynôme. Et on recommence...

Correction 88. $Q_n(t) = (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. Les valeurs -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$. Même chose en -1. Enfin $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1, 1[$ telle que $Q'_n(c) = 0$.
Donc $Q'_n(-1) = 0$, $Q'_n(c) = 0$, $Q'_n(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1, c]$ et sur $[c, +1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q''_n, qui s'ajoutent aux racines -1 et $+1$.
On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines. Par constructions ces racines sont réelles distinctes, donc simples.

Correction 89.

1. Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3,...) il existe $x'_1 < x'_2 < x'_3$ des racines de P'_n. On applique deux fois le théorème Rolle entre x'_1 et x'_2 et entre x'_2 et x'_3. On obtient deux racines distinctes pour P''_n. Or $P''_n = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.
2. *Autre méthode :* Le résultat est évident si $n \leq 3$. On suppose donc $n \geq 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Alors $P'_n(X) = nX^{n-1} + a$ s'annule en au plus deux valeurs. Donc P_n est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc P_n s'annule au plus trois fois.

Correction 90. Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annule $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annule (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction 91. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a, b]$. Le théorème des accroissement finis assure l'existence d'un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
Mais pour la fonction particulière de cet exercice nous pouvons expliciter ce c. En effet $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ implique $\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (2\alpha c + \beta)(b-a)$. Donc $c = \frac{a+b}{2}$.

Géométriquement, le graphe $\mathcal{P}$ de f est une parabole. Si l'on prend deux points $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$ appartenant à cette parabole, alors la droite (AB) est parallèle à la tangente en $\mathcal{P}$ qui passe en $M=(\frac{a+b}{2},f(\frac{a+b}{2}))$. L'abscisse de M étant le milieu des abscisses de A et B.

Correction 92. 1. **Domaine d'étude.** $M(t)$ existe si et seulement si $t\notin\{-1,1\}$. Sinon, il n'y a pas de symétrie particulière (la fonction y est effectivement paire, mais x n'est ni paire ni impaire).

Dérivée. Pour $t\in]-1,1[\backslash\{0\}$,

$$x'(t)=x(t)(3\ln|t|-2\ln|t+1|-\ln|t-1|)'=\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}(\frac{3}{t}-\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t-1})$$
$$=\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}\frac{3(t^2-1)-2(t^2-t)-(t^2+t)}{t(t+1)(t-1)}=\frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2},$$

et

$$y'(t)=\frac{2t(t^2-1)-2t(t^2)}{(t^2-1)^2}=\frac{-2t}{(t^2-1)^2},$$

ce qui reste vrai par continuité de x et y en 0.

Etude des points singuliers. Pour $t\in]-1,1[$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)=\vec{0}\Leftrightarrow t=0$. $M(0)=(0,0)$ est l'unique point singulier. Pour $t\in]-1,1[\backslash\{0\}$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=\frac{t^2}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{t^3}=\frac{t+1}{t}.$$

Par suite, $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et vers $-\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs inférieures. La tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{j}$ et d'autre part, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Etude quand t tend vers $\pm\infty$. Quand t tend vers $\pm\infty$, $M(t)$ tend vers le point $(1,1)$. On prolonge la courbe en posant $M(\infty)=1,1)$. On a alors

$$\frac{y(t)-y(\infty)}{x(t)-x(\infty)}=(\frac{t^2}{t^2-1}-1)(\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}-1)^{-1}=\frac{1}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{-t^2+t+1}=\frac{t+1}{-t^2+t+1}\sim-\frac{1}{t}.$$

Cette expression tend donc vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$ et la tangente en $M(\infty)$ est dirigée par $\vec{i}$.

Etude quand t tend vers 1. Quand t tend vers 1, $x(t)\sim 14(t-1)$ et $y(t)\sim\frac{1}{2(t-1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)}\sim 2$. Puis,

$$y(t)-2x(t)=\frac{t^2}{t^2-1}-2\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}=\frac{t^2(t+1)-2t^3}{(t+1)^2(t-1)}=-\frac{t^2}{(t+1)^2}.$$

Cette dernière expression tend vers $-\frac{1}{4}$ et la droite (Δ) d'équation $y=2x-\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe.

Etude quand t tend vers -1. Quand t tend vers 1, $x(t)\sim 12(t+1)^2$ et $y(t)\sim\frac{-1}{2(t+1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)}\sim-(t+1)$. Par suite, $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers -1. La courbe admet une barnche parabolique de direction (Ox).

Variations conjointes de x et y. On rappelle que pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $x'(t)=\frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2}$ et $y'(t)=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}$. On en déduit le tableau suivant :

On peut noter que la tangente en $M(3)$ est dirigée par le vecteur $\vec{j}$. Voir graphique page suivante.

Dans la suite de cet exercice, je ne détaillerai que très peu ou pas du tout l'étude de la courbe.

2.

3.

4. $\begin{cases} x=\frac{2t}{1+t^2} \\ y=\frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$

5.

6. $\begin{cases} x=\frac{t^3}{t^2-9} \\ y=\frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\frac{t^3}{1+3t} \\ y=\frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$

Correction 93. $\frac{1}{4}(-1+i) = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} e^{\frac{3i\pi}{4}} = (\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}})^3$. Les solutions sont les complexes $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{2ik\pi}{3}}$ pour $0 \leq k \leq 2$. Et seul $z_0 = \frac{1}{2}(1+i)$ a une puissance quatrième réelle.

Correction 94.

1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603 - 0{,}36603i$, $-0{,}36603 + 1{,}36603i$ et $-1-i$.
2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$ où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction 95. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.
Les racines de $z^{24} = 1$ sont données par $z_k = e^{2ki\pi/24}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 23$. Ce sont donc 1, $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, etc.

Correction 96.

1. 3, $3i$, -3 et $-3i$.
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ et $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Correction 97.

1. $z = -i\mathrm{cotan}\frac{k\pi}{n}$.
2. $6 \mid n \Rightarrow z = j$ ou j^2. Sinon, pas de solution.
3. $z = \exp\frac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k = 0, 1, 3, 4$.
4. $z = -1$ ou $z = \exp\frac{2ik\pi}{n}$, $1 \leq k < n$.
5. $x = \tan\left(\frac{a+2k\pi}{n}\right)$.
6.
7. $z = \pm i$, $\pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

Correction 99.

1. (a) $(0,0,0) \in E_1$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_1. On a donc $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$. Donc $3(x+x') - 7(y+y') = (z+z')$, d'où $(x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_1.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in E_1$. Alors la relation $3x - 7y = z$ implique que $3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z$ donc que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_1.
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $(1,0,-1)$ et $(1,0,1)$ appartiennent à E_2 mais $(1,0,-1) + (1,0,1) = (2,0,0)$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   (a) $(0,0,0) \in E_3$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_3. On a donc $x+y-z = x+y+z = 0$ et $x'+y'-z' = x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z') = (x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$ et $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_3.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in E_3$. Alors la relation $x+y-z = x+y+z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_3.
4. Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1,0,0)+(0,0,1) = (1,0,1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction 100.
1. E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
4. E_4 : non, en fait E_4 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0) \in E_4$ mais $-(2,0) = (-2,0) \notin E_4$.

Correction 101.
1. Sens $\Leftarrow$. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$.

   Sens $\Rightarrow$. On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Mais alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc $x+y \in F \cup G$ (car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel). Comme $x+y \in F \cup G$ alors $x+y \in F$ ou $x+y \in G$.
   – Si $x+y \in F$ alors, comme $x \in F$, $(x+y)+(-x) \in F$ donc $y \in F$, ce qui est absurde.
   – Si $x+y \in G$ alors, comme $y \in G$, $(x+y)+(-y) \in G$ donc $x \in G$, ce qui est absurde.

   Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc F est inclus dans G ou G est inclus dans F.
2. Supposons $G \subset F$.
   – Inclusion $\supset$. Soit $x \in G + (F \cap H)$. Alors il existe $a \in G$, $b \in F \cap H$ tels que $x = a+b$. Comme $G \subset F$ alors $a \in F$, de plus $b \in F$ donc $x = a+b \in F$. D'autre part $a \in G$, $b \in H$, donc $x = a+b \in G+H$. Donc $x \in F \cap (G+H)$.
   – Inclusion $\subset$. Soit $x \in F \cap (G+H)$. $x \in G+H$ alors il existe $a \in G$, $b \in H$ tel que $x = a+b$. Maintenant $b = x-a$ avec $x \in F$ et $a \in G \subset F$, donc $b \in F$, donc $b \in F \cap H$. Donc $x = a+b \in G+(F \cap H)$.

Correction 102. 1. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = 0.$$

Par suite, $\lambda f + \mu g$ est dans F. On a montré que :

$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall (f, g) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in F.$$

F est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. Même démarche et même conclusion .
3. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
4. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   Pour x élément de $[0, 1]$,
   $$(\lambda f+\mu g)(x)+(\lambda f+\mu g)(1-x) = \lambda(f(x)+f(1-x))+\mu(g(x)+g(1-x)) = 0$$
   et $\lambda f + \mu g$ est dans F. F est un sous-espace vectoriel de E.
   Remarque. Les graphes des fonctions considérés sont symétriques par rapport au point $(\frac{1}{2}, 0)$.
5. F contient la fonction constante 1 mais pas son opposé la fonction constante -1 et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
6. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

Correction 103. Dans les cas où F est un sous-espace, on a à chaque fois trois démarches possibles pour le vérifier :
- Utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
- Obtenir F comme noyau d'une forme linéaire ou plus généralement, comme noyau d'une application linéaire.
- Obtenir F comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Je vous détaille une seule fois les trois démarches.

1. **1ère démarche.** F contient le vecteur nul $(0, ..., 0)$ et donc $F \neq \varnothing$. Soient alors $((x_1, ..., x_n), (x'_1, ..., x'_n)) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
   $$\lambda(x_1, ..., x_n) + \mu(x'_1, ..., x'_n) = (\lambda x_1 + \mu x'_1, ..., \lambda x_n + \mu x'_n)$$
   avec $\lambda x_1 + \mu x'_1 = 0$. Donc, $\lambda(x_1, ..., x_n) + \mu(x'_1, ..., x'_n) \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   2ème démarche. L'application $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est lenoyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3ème démarche.

$$F = \{(0, x_2, ..., x_n),\ (x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} = \{x_2(0,1,0,...,0) + ... + x_n(0,...,0,1),\ (x_2, ..., x_n) \in$$
$$= \mathrm{Vect}((0,1,0,...,0), ..., (0,...,0,1)).$$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. F ne contient pas le vecteur nul et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. (Ici, $n \geq 2$). L'application $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 - x_2$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. L'application $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 + ... + x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
5. (Ici, $n \geq 2$). Les vecteurs $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0..., 0)$ sont dans F mais $e_1 + e_2 = (1, 1, 0...0)$ n'y est pas. F n'est donc pas un sous espace vectoriel de E.

   Remarque. F est la réunion des sous-espaces $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = 0\}$ et $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_2 = 0\}$.

Correction 104. 1.

$$\begin{aligned}
& (x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \\
\iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4) \\
\iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda) + (\mu, -2\mu, 3\mu, -4\mu) \\
\iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
\implies & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad 1 = 2(\lambda-\mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda-\mu) \\
\implies & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x, y). Donc on ne peut pas trouver de tels x, y.

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
&(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} \\
iff\ \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad &(x,1,1,y) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad &\begin{cases} x &= \lambda+\mu \\ 1 &= 2\lambda-2\mu \\ 1 &= 3\lambda+3\mu \\ y &= 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad &\begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x,1,1,y)$ qui convienne est $(\frac{1}{3},1,1,2)$.

Correction 105. Montrons d'abord que $E \subset F$. On va d'abord montrer que $v_1 \in F$ et $v_2 \in F$.
Tout d'abord $v_1 \in F \iff v_1 \in \mathrm{Vect}\{w_1,w_2\} \iff \exists \lambda,\mu \quad v_1 = \lambda w_1 + \mu w_2$. Il s'agit donc de trouver ces λ,μ. Cela se fait en résolvant un système (ici on peut même le faire de tête) on trouve la relation $7(2,3,-1) = 3(3,7,0) - (5,0,-7)$ ce qui donne la relation $v_1 = \frac{3}{7}w_1 - \frac{1}{7}w_2$ et donc $v_1 \in F$.
De même $7v_2 = -w_1 + 2w_2$ donc $v_2 \in F$.
Maintenant v_1 et v_2 sont dans l'espace vectoriel F, donc toute combinaison linéaire de v_1 et v_2 aussi, c'est-à-dire : pour tout λ,μ, on a $\lambda v_1 + \mu v_2 \in F$. Ce qui implique $E \subset F$.

Il reste à montrer $F \subset E$. Il s'agit donc d'écrire w_1 (puis w_2) en fonction de v_1 et v_2. On trouve $w_1 = 2v_1 - v_2$ et $w_2 = v_1 + 3v_2$. Encore une fois cela entraîne $w_1 \in E$ et $w_2 \in E$ donc $\mathrm{Vect}\{w_1,w_2\} \subset E$ d'où $F \subset E$.
Par double inclusion on a montré $E = F$.

Correction 106. $v \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ,μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.
Alors $(-2,x,y,3) = \lambda(1,-1,1,2) + \mu(-1,2,3,1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 &= \lambda-\mu \\ x &= -\lambda+2\mu \\ y &= \lambda+3\mu \\ 3 &= 2\lambda+\mu \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda &= 1/3 \\ \mu &= 7/3 \\ x &= 13/3 \\ y &= 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x,y) = (13/3, 22/3)$.

Correction 108. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$.

$$a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2 \Rightarrow 2ab\sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $ab = 0$.
Si $b = 0$, puisque $a + c = 0$ et que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on en déduit que $c = 0$ (sinon $\sqrt{3}$ serait rationnel) puis $a = 0$ et finalement $a = b = c = 0$.
Si $a = 0$, il reste $2b^2 = 3c^2$. Mais $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est irrationnel (dans le cas contraire, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $3q^2 = 2p^2$ et par exemple l'exposant du nombre premier 2 n'a pas la même parité dans les deux membres de l'égalité ce qui est impossible) et donc $b = c = 0$ puis encore une fois $a = b = c = 0$.
On a montré que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$, $(a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$. Donc la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille de réels $\mathbb{Q}$-libre.

Correction 112. $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Correction 113.
1. Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.
   (a) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0,0,0)$

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

(b) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\
\iff & \begin{cases} b+c=x \\ a+c=y \quad (L_2) \\ a+b=z \quad (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x \quad (L_1') \\ a+c=y \\ b-c=z-y \quad (L_3')=(L_3-L_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2b = x+z-y \quad (L_1'+L_3') \\ a+c=y \\ 2c = x-(z-y) \quad (L_1'-L_3') \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x, y, z) = v$. Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice.

(c) La famille est libre et génératrice donc c'est une base.

(d) Pour écrire $w = (1, 1, 1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x, y, z), en particulier pour le vecteur $(1, 1, 1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3) sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Pour montrer que la famille est libre et génératrice les calculs sont similaires à ceux de la question précédente. Notons $\mathcal{B}$ la base (v_1, v_2, v_3).

Exprimons ensuite e_1 dans cette base, les calculs donnent : $e_1 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
$e_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
$e_3 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.
Les calculs sont ensuite terminés, on remarque que $w = (1, 2, -3)$ vaut en fait $w = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ donc par nos calculs précédents $w = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + 2(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3) - 3(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3) = 2v_2 + 3v_3$. Les coordonnées de w dans $\mathcal{B}$ sont $(0, 2, 3)$.

3. Par exemple la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.
4. La famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Correction 114.

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} x' & = & & & 2y & + & z \\ 3y' & = & -x & & & + & z \\ 3z' & = & -x & + & 3y & + & z. \end{array}\right.$$

Correction 115. $r = 3, \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}, \quad \vec{b} - 2\vec{d} - \vec{e} = \vec{0}.$

Correction 117.

1. $\ln(\cos x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right)$.
2. $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$.
3. $\sin(\tan x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{40}x^5 - \dfrac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right)$.
4. $(\ln(1 + x))^2 = x^2 - x^3 + \dfrac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right)$.
5. $\exp(\sin x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.
6. $\sin^6 x = x^6 + o\left(x^6\right)$.

Correction 118.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)} = -1.$$

Correction 119.

1. $\ln\cos x = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.
2. $\dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2 - \dfrac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.
3. $\ln(\tan(1/2\,x + 1/4\,\pi)) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.
4. $\ln\sin x = \ln(1/2\,\sqrt{2}) + x - \dfrac{\pi}{4} - \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

5. $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x} = 2/3\,\dfrac{1}{x} + o(\dfrac{1}{x^4})$.

6. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \dfrac{11}{24}\,ex^2 - \dfrac{7}{16}\,ex^3 + o\left(x^3\right)$.

7. $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right) = 1/8\,\dfrac{\sqrt{2}}{x^2} + o(x^{-5})$.

Correction 120. $e^{1/3}\left(1+\frac{7}{90}x^2+o(x^3)\right)$.

Correction 121. 1. Si $x \in]0,\pi[$, $\sin x > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ auquel on a enlevé le point $\frac{\pi}{2}$) et de plus $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\sin x) \sim \sin x - 1 = -\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 = -\frac{(2x-\pi)^2}{8}.$$

Donc, $\frac{\ln(\sin x)}{2x-\pi} \sim -\frac{2x-\pi}{8} \to 0$ et enfin $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1/(2x-\pi)} = 1.}$$

2. Si $x \in]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $|\tan x| > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ et de plus $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln(|\tan x|)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \sim -\ln|\cos x|,$$

puis $\cos x \ln|\tan x| \sim -\cos x \ln|\cos x| \to 0$ (car, quand u tend vers 0, $u\ln u \to 0$). Donc, $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\cos x} = 1.}$$

3. Quand n tend vers $+\infty$, $\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1} \to \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} = 1$ (et on est en présence d'une indétermination du type $1^{+\infty}$). Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{n\pi}{3n+1} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{9n} + o\right. \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

De même,

$$\sin\frac{n\pi}{6n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puis,

$$n\ln\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\right) = n\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} + o($$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n = e^{\sqrt{3}\pi/24}.}$$

4. Quand x tend vers 0, $\ln(\cos x) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$. Puis, $\ln|x|\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2}\ln|x| \to 0$. Donc, $(\cos x)^{\ln|x|} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|} = 1.}$$

5. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1-\sin x}$ tend vers $+\infty$. Posons $h = x - \frac{\pi}{2}$ puis $\varepsilon = \mathrm{sgn}(h)$, de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)} = -\varepsilon|\sin h|e^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon e^{\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or, quand h tend vers 0,

$$\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} = \frac{(1-\cos h)\ln|\sin h| + 1}{1-\cos h} = \frac{(-\frac{h^2}{2} + o(h^2))(\ln|h| + o(\ln|h|)) + 1}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \frac{1+o}{\frac{h^2}{2}+o}$$

et donc, quand h tend vers 0, $\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} \sim \frac{2}{h^2} \to +\infty$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2,\ x<\pi/2}\cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to\pi/2,\ x>\pi/2}\cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = -\infty.}$$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = (2\cos x - 1)(\cos x - 1)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Pour $x \notin \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2\cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

et donc, $\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3$.

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1} = -3.}$$

7. Quand x tend vers 0,

$$\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x} = \frac{1+x+o(x)}{1+x+o(x)} = (1+x+o(x)(1-x+o(x)) = 1+o(x).$$

Puis, quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right) = \frac{\ln(1+o(x))}{x+o(x)} = \frac{o(x)}{x+o(x)} = \frac{o(1)}{1+o(1)} \to 0.$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\sin x} = 1.}$$

8. Quand x tend vers e par valeurs inférieures, $\ln(x)$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\ln x) \sim \ln x - 1 = \ln\left(\frac{x}{e}\right) \sim \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e-x),$$

puis,

$$\ln(e-x)\ln(\ln x) \sim -\frac{1}{e}(e-x)\ln(e-x) \to 0,$$

et donc $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x)\ln(\ln x)} \to 1$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to e\\ x<e}} (\ln x)^{\ln(e-x)} = 1.}$$

9. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $x\ln x \to 0$, et donc

$$x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \sim x\ln x \sim 1\times(x-1) = x-1.$$

Ensuite, $\sqrt{x^2-1}$ tend vers 0 et donc

$$\ln(1-\sqrt{x^2-1}) \sim -\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \sim -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} \sim \frac{x-1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>e}} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} = 0.}$$

10. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) \sim \ln(\operatorname{ch} x) \sim \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = x - \ln 2 \sim x,$$

et donc

$$\frac{x\ln(\operatorname{ch} x-1)}{x^2+1} \sim \frac{x\times x}{x^2} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(\operatorname{ch} x-1)}{x^2+1} = 1.}$$

11. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\ln(x-x^2)+x-\ln x = x+\ln(1-x) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)} = e^{x\ln(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))} = e^{x\ln x}e^{x\ln(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))} = x^xe^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+\right.$$

et,

$$x^{\sin x} = e^{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\ln x} = e^{x\ln x}e^{-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)} = x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right).$$

Donc,

$$(\sin x)^x - x^{\sin x} = x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right) = x^x\left(\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x\right.$$

et enfin

$$\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x - x2^{)} + x - \ln x} \sim \frac{x^3 \ln x/6}{-x^2/2} = -\frac{x \ln x}{3} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x - x2^{)} + x - \ln x} = 0.}$$

12. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

Ensuite,

$$x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)\right) = \frac{1}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right) \to 0.$$

Donc, $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \to e^0 = 1.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1.}$$

13. Quand x tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2} \times \frac{\operatorname{Arcsin} x + \frac{\pi}{4}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$\to \frac{\pi}{4\sqrt{2}} (\operatorname{Arcsin})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1/\sqrt{2}} \frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} = \frac{\pi}{4}.}$$

14. Quand x tend vers $+\infty$,

$$x \ln\left(\frac{\cos\left(a + \frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right) = x \ln\left(\cos\frac{1}{x} - \tan a \sin\frac{1}{x}\right) = x \ln\left(1 - \frac{\tan a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(-\frac{\tan a}{x} + o\right.$$

$$= -\tan a + o(1),$$

et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = e^{-\tan a}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = e^{-\tan a}.}$$

Correction 122. 1.

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+(x^2+x^3)+(x^2+x^3)^2+(x^2+x^3)^3+o(x^7) = 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).}$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)\right)^{-1} = 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3$$
$$= 1+\frac{x^2}{2}+x^4\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+o(x^7) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+$$

2. $$\boxed{\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).}$$

3. **Remarques.**

   (a) Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, on a $0<\frac{x}{\tan x}<1$ et donc la fonction $x\mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ (qui est un voisinage pointé de 0).

   (b) Quand x tend vers 0, $\frac{x}{\tan x}\to 1$ et donc $\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0).

   (c) La fonction $x\mapsto \operatorname{Arccos} x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (donc à priori, c'est mal parti).

   (d) La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

• Recherche d'un équivalent simple de $\operatorname{Arccos} x$ en 1 à gauche. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\operatorname{Arccos} x\to 0$ et donc,

$$\operatorname{Arccos} x \sim \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

• Déterminons un équivalent simple de $\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ en 0. D'après ce qui précède,

$$\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \sim \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} =$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus). • Déterminons un équivalent simple de $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} &\sim \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos\Bigg(\operatorname{Arccos}\Bigg(\sqrt{\frac{x}{\tan x}} \\
&= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x)
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &= \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Bigg(\Bigg(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\Bigg)\Bigg(\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{45} + o(x^5)\right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x^2}{15} + o(x^2)\right)^{1/2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3),
\end{aligned}$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) &= \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{-1/2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{18\sqrt{3}} + o(x^3)\right) = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\Bigg(\frac{x}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3),
\end{aligned}$$

et finalement,

$$g(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{9\sqrt{3}} + o(x^3)\right) = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3) \sim \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).$$

f étant paire, on en déduit que

$$\boxed{\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{4|x|^3}{45\sqrt{3}} + o(x^3).}$$

(Ce n'est pas un développement limité).

4. La fonction $x \mapsto \tan x$ est trois fois dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et admet donc en $\frac{\pi}{4}$ un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de TAYLOR-YOUNG. $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ puis $(\tan)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\frac{\pi}{4} = 2$. Ensuite, $(\tan)''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$ et $(\tan)''(\frac{\pi}{4}) = 4$. Enfin,

$$(\tan)^{(3)}(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1 + \tan^2 x),$$

et $(\tan)^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = 16$. Finalement,

$$\boxed{\tan x \underset{x\to\pi/4}{=} 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).}$$

$$\frac{1}{x^2}\ln(\text{ch}\, x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} +$$

et donc

$$(\text{ch}\, x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} = e^{1/2}e^{-\frac{x^2}{12} + o(x^2)} = \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12}x^2 + o(x^2).$$

5. $$\boxed{(\text{ch}\, x)^{1/x^2} = \underset{x\to 0}{=} \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12}x^2 + o(x^2).}$$

6. $\tan^3 x(\cos(x^2) - 1) = \tan x \times \tan^2 x(\cos(x^2) - 1)$ et un équivalent de $\tan^2 x(\cos(x^2) - 1)$ en 0 est $-\frac{x^6}{2}$. On écrit donc $\tan x$ à l'ordre 2. De même, un équivalent de $\tan^3 x$ est x^3 et on écrit donc $\cos(x^2) - 1$ à l'ordre 5.

$$\tan^3 x(\cos(x^2) - 1) \underset{x\to 0}{=} (x + o(x^2))^3\left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = (x^3 + o(x^4))\left(-\frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = -\frac{x^7}{2} + o(x^8$$

$$\boxed{\tan^3 x(\cos(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^7}{2}+o(x^8).}$$

7. On pose $h = x-1$ ou encore $x = 1+h$, de sorte que x tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2}\\ &\underset{h\to 0}{=} \left(\ln 2+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)\left(1-2h+\frac{(-2)(-3)}{2}h^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3+o(h^3)\right)\\ &= \left(\ln 2+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{24}+o(h^3)\right)(1-2h+3h^2-4h^3+o(h^3))\\ &= \ln 2+\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)h+\left(3\ln 2-\frac{9}{8}\right)h^2+\left(-4\ln 2+\frac{43}{24}\right)h^3+o(h^3).\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 1}{=} \ln 2+\left(\tfrac{1}{2}-2\ln 2\right)(x-1)+\left(3\ln 2-\tfrac{9}{8}\right)(x-1)^2+\left(-4\ln 2+\tfrac{43}{24}\right)(x-1)^3+o((x-}$$

8. Pour x réel, posons $f(x) = \text{Arctan}(\cos x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour x réel, $f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Puis,

$$\begin{aligned}f'(x) &\underset{x\to 0}{=} -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2\right)^{-1}\\ &= -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(2-x^2+o(x^3)\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).\end{aligned}$$

Donc, f' admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que f admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\text{Arctan}(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \text{Arctan}(\cos 0)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5) = \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).$$

$$\boxed{\text{Arctan}(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).}$$

9. Pour $x > -1$, posons $f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x > -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}}$$
$$= \frac{1}{2\times 3\times \sqrt{2}}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-1}(1+x)^{-1/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{2x}{3}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(\right.$$
$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x+o(x)\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{17x}{12}+o(x)\right).$$

Ainsi, f' admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\boxed{\text{Arctan}\sqrt{\tfrac{x+1}{x+2}} \underset{x\to 0}{=} \text{Arctan}\,\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{6\sqrt{2}}x - \tfrac{17}{144\sqrt{2}}x^2 + o(x^2).}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}(-x^2)^3$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+o(x^7).$$

Donc, $\text{Arcsin}\,x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+o(x^8)$. Ensuite,

$$\frac{1}{\text{Arcsin}^2 x} = (\text{Arcsin}\,x)^{-2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}+o(x^7)\right)^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1-2\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}\right)+3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}\right)^2-4\left(\frac{x^2}{6}\right)^3+o(x^7)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{20}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(-\frac{5}{56}+\frac{3}{40}-\frac{1}{54}\right)x^4+o(x^5)$$
$$= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{15}-\frac{31x^4}{945}+o(x^5).$$

Finalement,

10. $$\boxed{\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{1}{\text{Arcsin}^2 x} \underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{3}+\tfrac{x^2}{15}+\tfrac{31x^4}{945}+o(x^5).}$$

11. Pour x réel, posons $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 puis, pour x réel, soit $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel $g(x)=F(x^2)-F(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$g'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Puis,

$$g'(x) \underset{x\to 0}{=} 2x\left(1 - \frac{1}{2}x^8 + o(x^8)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^9)\right) = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o(x^9).$$

Ainsi g' admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que g admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de $g(0) = 0$, on obtient

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \tfrac{x^5}{10} - \tfrac{x^9}{24} - \tfrac{x^{10}}{10} + o(x^{10}).}$$

12.

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 - e^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})\right)\right)\\ &= x + \ln\left(1 - (1+o(1))\left(\frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100})\right)\right) = x + \ln\left(1 - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100})\right) =\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\textstyle\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}).}$$

13. Posons $h = x - \pi$ ou encore $x = \pi + h$ de sorte que x tend vers π si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)} = \sqrt[3]{4(\pi^3 + (\pi+h)^3)} &= \sqrt[3]{8\pi^3 + 12\pi^2 h + 12\pi h^2 + 4h^3}\\ &\underset{h\to 0}{=} 2\pi\left(1 + \frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3}\right)^{1/3}\\ &= 2\pi\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2} + \frac{h^3}{2\pi^3}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{3h}{2\pi} + \frac{3h^2}{2\pi^2}\right)^2 + \frac{5}{81}\left(\frac{3h}{2\pi}\right)^3 + o(h^3)\right)\\ &= 2\pi + h + h^2\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\right) + h^3\left(\frac{1}{3\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{5}{12\pi^2}\right) + o(h^3)\\ &= 2\pi + h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3).\end{aligned}$$

Puis,

$$\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) = \tan\left(h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2} + o(h^3)\right)$$
$$= \left(h + \frac{h^2}{2\pi} - \frac{h^3}{4\pi^2}\right) + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3) = h + \frac{h^2}{2\pi} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2}\right)h^3 + o(h^3).$$

Finalement,

$$\boxed{\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) \underset{x\to\pi}{=} (x-1) + \tfrac{1}{2\pi}(x-1)^2 + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4\pi^2}\right)(x-1)^3 + o((x-1)^3).}$$

Correction 123. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{x^2-3} = x\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{1/2} = x\left(1 - \frac{3}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) = x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1} = 2x\left(1 + \frac{7}{8x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} = 2x\left(1 + \frac{7}{24x} - \frac{49}{576x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x + \frac{7}{12} - \frac{49}{288x}$$

Donc,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x - \frac{7}{12} - \frac{383}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f admet donc en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$. De plus, le signe de $f(x) - \left(-x - \frac{7}{12}\right)$ est, au voisinage de $+\infty$, le signe de $-\frac{383}{288x}$. Donc la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction 124. f est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en tant que fraction rationelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout entier naturel n, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^3 + ... + x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité et d'après la formule de Taylor-Young, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!.}$$

Ensuite, pour $x \notin \{-1, 1\}$, et n entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

Correction 125. Pour $n \geq 5$, on a

$$u_n = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)...(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0 \leq n^3\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)...(k+1)} \leq n^3(n-4)\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc, $\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)...(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et de même $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il reste

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).}$$

Correction 126. 1.

$$\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right.\right.$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\right.$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)+x^3\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+x^4\left(-\frac{1}{120}+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{24}\right)-\right.\right.$$
$$= -\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).$$

$$\boxed{\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to0}{=} -\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).}$$

$$x\ln(x+1)-(x+1)\ln x = x\left(\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln x + x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\right.$$
$$= -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

2.
$$\boxed{x\ln(x+1)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln x + 1 - \tfrac{1}{2x} + \tfrac{1}{3x^2} - \tfrac{1}{4x^3} + o\left(\tfrac{1}{x^3}\right).}$$

Correction 127. 1.

$$f_n(a) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(a-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

En remplaçant a par b ou $a+b$, on obtient

$$f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b) \underset{n\to+\infty}{=} e^{a+b}\left(1-\frac{(a+b)^2}{2n}\right)-e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1-\frac{b^2}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= e^{a+b}\frac{-(a+b)^2+a^2+b^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{ab\,e^{a+b}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc, si $ab \neq 0$, $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{ab\,e^{a+b}}{n}$. Si $ab=0$, il est clair que $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)=0$.

2. $e^{-a}f_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-a+\left(a-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1+\left(-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc

$$e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Correction 128. Pour n entier naturel donné, posons $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in I_n$, posons $f(x) = \tan x - x$. f est dérivable sur I_n et pour x dans I_n, $f'(x) = \tan^2 x$. Ainsi, f est dérivable sur I_n et f' est strictement positive sur $I_n \setminus \{n\pi\}$. Donc f est strictement croissante sur I_n.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue et strictement croissante sur I_n et réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n) = \mathbb{R}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! x_n \in I_n / \ f(x_n) = 0$ (ou encore tel que $\tan x_n = x_n$. • On a $x_0 = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$. En particulier,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).}$$

• Posons alors $y_n = x_n - n\pi$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\tan(y_n) = \tan(x_n) = n\pi + y_n$ et donc, puisque $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\pi}{2} > y_n = \text{Arctan}(y_n + n\pi) \geq \text{Arctan}(n\pi).$$

Puisque $\text{Arctan}(n\pi)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on a $y_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$ ou encore

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).}$$

• Posons maintenant $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et d'autre part $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Ensuite, $\tan\left(z_n + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$ et donc $-\text{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. Puisque z_n tend vers 0, on en déduit que

$$-\frac{1}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\text{cotan}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi,$$

ou encore $z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

• Posons enfin $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. On sait que $t_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que

$$-\text{cotan}\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = -\text{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

Par suite,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $t_n = \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Correction 129. 1. Pour $x>0$, posons $f(x)=x+\ln x$. f est continue sur $]0,+\infty[$, strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $]0,+\infty[$. f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f\left(]0,+\infty[\right)=]\lim_{x\to 0,\ x>0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$. En particulier,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{R},\ \exists! x_k\in]0,+\infty[/\ f(x_k)=k.}$$

2. $f\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{k}{2}+\ln\frac{k}{2}<k$ pour k suffisament grand (car $k-(\frac{k}{2}+\ln\frac{k}{2})=\frac{k}{2}-\ln\frac{k}{2}\underset{k\to+\infty}{\to}+\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées). Donc, pour k suffisament grand, $f\left(\frac{k}{2}\right)<f(x_k)$. Puisque f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $x_k>\frac{k}{2}$ pour k suffisament grand et donc que $\lim_{k\to+\infty} x_k=+\infty$. Mais alors, $k=x_k+\ln x_k\sim x_k$ et donc, quand k tend vers $+\infty$,

$$\boxed{x_k\underset{k\to+\infty}{=}k+o(k).}$$

Posons $y_k=x_k-k$. On a $y_k=o(k)$ et de plus $y_k+\ln(y_k+k)=0$ ce qui s'écrit :

$$y_k=-\ln(k+y_k)=-\ln(k+o(k))=-\ln k+\ln(1+o(1))=-\ln k+o(1).$$

Donc,

$$\boxed{x_k\underset{k\to+\infty}{=}k-\ln k+o(1).}$$

Posons $z_k=y_k+\ln k=x_k-k+\ln k$. Alors, $z_k=o(1)$ et $-\ln k+z_k=-\ln(k-\ln k+z_k)$. Par suite,

$$z_k=\ln k-\ln(k-\ln k+o(1))=-\ln\left(1-\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right)=\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{x_k\underset{k\to+\infty}{=}k-\ln k+\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right).}$$

Correction 130. 1. $x^3\sin\frac{1}{x^2}\underset{x\to 0}{=}O(x^3)$ et en particulier $x^3\sin\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{=}o(x^2)$. Donc, en tenant compte de $f(0)=1$,

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}1+x+x^2+o(x^2).$$

f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

2. $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$. Donc, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 1$. f est d'autre part dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2}$.
3. f' est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de limite en 0. f' n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Correction 131. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$, et donc

$$\operatorname{Arcsin} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Puis,

$$\frac{1}{\operatorname{Arcsin} x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + o(x^3$$

et donc,

$$\boxed{\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{Arcsin} x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6} + \frac{17x^3}{360} + o(x^3).}$$

La fonction f proposée se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Le prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$. La courbe représentative de f admet à l'origine une tangente d'équation $y = \frac{x}{6}$. Le signe de la différence $f(x) - \frac{x}{6}$ est, au voisinage de 0, le signe de $\frac{17x^3}{360}$. La courbe représentative de f admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation $y = \frac{x}{6}$.

Correction 132. 1. $\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1^-}{=} o(1)$ (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développemement limité d'ordre 1.

2) Puisque $\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1^-}{=} o(1)$,

$$\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

$$\boxed{\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.}$$

Correction 133. 1. f_1 est linéaire. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x', y+y'\big) \\ &= \big(2(x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')\big) \\ &= \big(2x+y+2x'+y', x-y+x'-y'\big) \\ &= \big(2x+y, x-y\big)+\big(2x'+y', x'-y'\big) \\ &= f_1(x,y)+f_1(x',y') \end{aligned}$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big) = f_1\big(\lambda x, \lambda y\big) = \big(2\lambda x+\lambda y, \lambda x-\lambda y\big) = \lambda\cdot\big(2x+y, x-y\big) = \lambda\cdot f_1(x,y).$$

2. f_2 n'est pas linéaire, en effet par exemple $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ n'est pas égal à $f_2(2,2,0)$.
3. f_3 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y,z) et (x',y',z') alors $f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$. Et ensuite que pour tout (x,y,z) et λ on a $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big) = \lambda\cdot f_3(x,y,z)$.
4. f_4 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y) et (x',y') alors $f_4\big((x,y)+(x',y')\big) = f_4(x,y)+f_4(x',y')$. Et ensuite que pour tout (x,y) et λ on a $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big) = \lambda\cdot f_4(x,y)$.
5. f_5 est linéaire : soient $P, P' \in \mathbb{R}_3[X]$ alors

$$\begin{aligned} f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1), (P+P')(0), (P+P')(1)\big) \\ &= \big(P(-1)+P'(-1), P(0)+P'(0), P(1)+P'(1)\big) \\ &= \big(P(-1), P(0), P(1)\big)+\big(P'(-1), P'(0), P'(1)\big) \\ &= f_5(P)+f_5(P') \end{aligned}$$

Et si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_5\big(\lambda\cdot P\big) &= \big((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1)\big) \\ &= \big(\lambda\times P(-1), \lambda\times P(0), \lambda\times P(1)\big) \\ &= \lambda\cdot\big(P(-1), P(0), P(1)\big) \\ &= \lambda\cdot f_5(P) \end{aligned}$$

Correction 134. Soient $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z+\mu z') = (\lambda z+\mu z')+a(\overline{\lambda z+\mu z'}) = \lambda(z+a\bar{z})+\mu(z'+a\overline{z'}) = \lambda f(z)+\mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, Ker $f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, Im $f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha+\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, Ker f = Vect$(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, Im f est une droite vectorielle et pour déterminer Im f, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, Im f = Vect$(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im }(z)$ et Im $f = i\mathbb{R}$.

Correction 135. 1. Si les deux droites vectorielles sont distinctes alors elles engendrent un plan vectoriel et donc pas $\mathbb{R}^3$ tout entier. Si elles sont confondues c'est pire : elles n'engendrent qu'une droite. Dans tout les cas elles n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$ et ne sont donc pas supplémentaires.

2. Si P et P' sont deux plans vectoriels alors $P \cap P'$ est une droite vectorielle si $P \neq P'$ ou le plan P tout entier si $P = P'$. Attention, tous les plans vectoriels ont une équation du type $ax + by + cz = 0$ et doivent passer par l'origine, il n'existe donc pas deux plans parallèles par exemple. Donc l'intersection $P \cap P'$ n'est jamais réduite au vecteur nul. Ainsi P et P' ne sont pas supplémentaires.

3. Soit D une droite et P un plan, u un vecteur directeur de D. Si le vecteur u appartient au plan P alors $D \subset P$ et les espaces ne sont pas supplémentaires (ils n'engendrent pas tout $\mathbb{R}^3$). Si $u \notin P$ alors d'une part $D \cap P$ est juste le vecteur nul d'autre part D et P engendrent tout $\mathbb{R}^3$; D et P sont supplémentaires.

   Détaillons un exemple : si P est le plan d'équation $z = 0$ alors il est engendré par les deux vecteurs $v = (1, 0, 0)$ et $w = (0, 1, 0)$. Soit D une droite de vecteur directeur $u = (a, b, c)$.

   Alors $u \notin P \iff u \notin \text{Vect}\{v, w\} \iff c \neq 0$. Dans ce cas on bien que d'une part que $D = \text{Vect}\{u\}$ intersecté avec P est réduit au vecteur nul. Ainsi $D \cap P = \{(0, 0, 0)\}$. Et d'autre part tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $D+P = \text{Vect}\{u, v, w\}$. Il suffit de remarquer que $(x, y, z) - \frac{z}{c}(a, b, c) = (x - \frac{za}{c}, y - \frac{zb}{c}, 0) = (x - \frac{za}{c})(1, 0, 0) + (y - \frac{zb}{c})(0, 1, 0)$. Et ainsi $(a, b, c) = \frac{z}{c}u + (x - \frac{za}{c})v + (y - \frac{zb}{c})w$. Donc $D + P = \mathbb{R}^3$.

   Bilan on a bien $D \oplus P = \mathbb{R}^3$: D et P sont en somme directe.

Correction 136. 1. Non. Tout d'abord par définition $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, Nous allons trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0, 0, 0, 1)$.

$u \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α, β, γ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α, β, γ tels que :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à trouver α, β, γ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.

2. Oui. Notons $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$. Pour montrer $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ il faut montrer $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et $F + G = \mathbb{R}^4$.

   (a) Montrons $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0\}$. Soit $u \in F \cap G$, d'une part $u \in F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$. D'autre part $u \in G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ donc il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \gamma v_4 + \delta v_5$. On a écrit u de deux façons donc on a l'égalité $\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_4 + \delta v_5$. En écrivant les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela donne

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = \delta \\ \beta = 0 \\ \alpha = \gamma + \delta \end{cases}$$

Cela implique $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et donc $u = (0, 0, 0, 0)$. Ainsi le seul vecteur de $F \cap G$ est le vecteur nul.

(b) Montrons $F + G = \mathbb{R}^4$. $F + G = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Il faut donc montrer que n'importe quel vecteur $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme une combinaison linéaire de v_1, v_2, v_4, v_5. Fixons u et cherchons $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$. Après avoir considéré les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela revient à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha = x_0 \\ \delta = y_0 \\ \beta = z_0 \\ \alpha + \gamma + \delta = t_0 \end{cases}$$

Nous étant donné un vecteur $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ on a calculé qu'en choisissant $\alpha = x_0$, $\beta = z_0$, $\gamma = t_0 - x_0 - y_0$, $\delta = y_0$ on obtient bien $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$. Ainsi tout vecteur est engendré par $F + G$.

Ainsi $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et $F + G = \mathbb{R}^4$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

3. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.
4. Non. Il y a bien quatre vecteurs mais il existe des relations entre eux. On peut montrer $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ ne sont pas supplémentaires de deux façons. Première méthode : leur intersection est non nulle, par exemple $v_4 = v_5 - v_3$ est dans l'intersection. Deuxième méthode : les deux espaces n'engendrent pas tout, en effet il est facile de voir que $(0, 0, 1, 0) \notin \mathrm{Vect}\{v_1, v_4\} + \mathrm{Vect}\{v_3, v_5\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_4, v_3, v_5\}$.

Correction 137. Analysons d'abord les fonctions de E qui ne sont pas dans F : ce sont les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ **ou** $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R}^*)$ ou les homothéties $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R}^*)$ n'appartiennent pas à F.
Cela nous donne l'idée de poser

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
Soit $f \in F \cap G$, alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.
Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.
En conclusion nous avons montré que $E = F \oplus G$.

Correction 138. 1ère solution. F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E et est donc un hyperplan de E.
Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un élément de $F \cap G$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = (\lambda, ..., \lambda)$ et $n\lambda = 0$ et donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$. De plus $\dim(F) + \dim(G) = n - 1 + 1 = n = \dim(E) < +\infty$ et donc $F \oplus G = E$.
Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $x - (\lambda, ..., \lambda) \in F \Leftrightarrow (x_1 - \lambda) + ... + (x_n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Le projeté de x sur G parallèlement à F est donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i(1, ..., 1)$ et le projeté de x sur F parallèlement à G est $x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i(1, ..., 1)$.
2ème solution (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Posons $\overrightarrow{u} = (1, \dots, 1)$.
On a $F = \overrightarrow{u}^\perp = G^\perp$. Par suite, F est le supplémentaire orthogonal de F.
Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de x sur G est $\frac{x.u}{\|u\|^2}u = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}(1, \dots, 1)$.

Correction 140.
1. La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire. Donc $P + I = E$. Bilan : $E = P \oplus I$.
2. Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui à f associe la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, c'est-à-dire à f on associe la partie paire de f. Nous avons bien
   – $\pi(f) \in P$. Par définition de π, $\pi(f)$ est bien une fonction paire.

- $\pi\circ\pi = \pi$. Si g est une fonction paire alors $\pi(g) = g$. Appliquons ceci avec $g = \pi(f)$ (qui est bien est une fonction paire) donc $\pi(\pi(f)) = \pi(f)$.
- $\ker\pi = I$. Si $\pi(f) = 0$ alors cela signifie exactement que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est la fonction nulle. Donc pour tout x : $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$ donc $f(x) = -f(-x)$; cela implique que f est une fonction impaire. Réciproquement si $f \in I$ est une fonction impaire, sa partie paire est nulle donc $f \in \ker f$.

Correction 143. Notons l'ancienne base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et ce qui sera la nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit P la matrice de passage qui contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que P est inversible (on va même calculer son inverse) donc $\mathcal{B}'$ est bien une base. De plus

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on calcule } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -12 & 30 & -6 \\ 12 & -24 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

B est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Correction 144. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction 145.

1. $\mathrm{rg} u = \mathrm{rg}(u(i), u(j), u(k)) = rg(u(j), u(k), u(i))$. La matrice de cette dernière famille dans la base (i, j, k) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   Cette dernière famille est de rang 3. Donc, $\mathrm{rg} u = 3$ et u est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Posons $e_1 = u(i)$, $e_2 = u(j)$ et $e_3 = u(k)$.

   $$\begin{cases} e_1 = k \\ e_2 = i - 3k \\ e_3 = j + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_1 \\ i = 3e_1 + e_2 \\ j = -3e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^{-1}(k) = i \\ u^{-1}(i) = 3i + j \\ u^{-1}(j) = -3i + k \end{cases}$$

   et

   $$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (Questions 2) et 3)). Posons $e_1 = xi + yj + zk$ (e_1, e_2 et e_3 désignent d'autres vecteurs que ceux du 1)).

$$u(e_1) = e_1 \Leftrightarrow (u-Id)(e_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

On prend $e_1 = i + j + k$.
Posons $e_2 = xi + yj + zk$.

$$u(e_2) = e_1 + e_2 \Leftrightarrow (u-Id)(e_2) = e_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = x+1 \text{ et } z = x+2.$$

On prend $e_2 = j + 2k$.
Posons $e_3 = xi + yj + zk$.

$$u(e_3) = e_2 + e_3 \Leftrightarrow (u-Id)(e_3) = e_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = x \text{ et } z = x+1.$$

On prend $e_3 = k$.
La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base (i, j, k) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et est donc inversible. Par suite (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin,

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = i + j + k \\ e_2 = j + 2k \\ e_3 = k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = e_3 \\ j = e_2 - 2e_3 \\ i = e_1 - e_2 + e_3 \end{array} \right. ,$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Voir question précédente.
4. Soit T est la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3). $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Les formules de changement de bases s'écrivent $T = P^{-1}AP$ ou encore $A = PTP^{-1}$. Par suite, pour tout relatif n, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Posons $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ puis $N^3=0$.
Donc, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, puisque I et N commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$T^n=(I+N)^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Cette formule reste claire pour $n=0$ et $n=1$. Pour $n=-1$, $(I+N)(I-N+N^2)=I+N^3=I$ et donc

$$T^{-1}=(I+N)^{-1}=I-N+N^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{(-1)(-1-1)}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

et la formule reste vraie pour $n=-1$. Enfin, pour n entier naturel non nul donné, $T^{-n}=(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)^{-1}$ mais $(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)(I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2)=I$ et donc $T^{-n}=I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ T^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned}A^n=PT^nP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\1&n+1&n(n+1)/2\\1&n+2&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(n-1)(n-2)/2&-n(n-2)&n(n-1)/2\\n(n-1)/2&-(n-1)(n+1)&n(n+1)/2\\n(n+1)/2&-n(n+2)&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui fournit $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$.

Correction 146. Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire "à la main".
Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang : $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$ pour $f : E \to F$. Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1. f_1 est injective, surjective (et donc bijective).
   (a) Faisons tout à la main. Calculons le noyau :
   $$\begin{aligned}(x,y) \in \ker f_1 &\iff f_1(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0\\ x-y=0\end{cases} \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$
   Ainsi $\ker f_1 = \{(0,0)\}$ et donc f_1 est injective.
   (b) Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f_1(x,y)$?
   $$\begin{aligned}f_1(x,y) = (X,Y) &\iff (2x+y, x-y) = (X,Y)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y=X\\ x-y=Y\end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{X+Y}{3}\\ y = \frac{X-2Y}{3}\end{cases}\\ &\iff (x,y) = \left(\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3}\right)\end{aligned}$$
   Donc pour n'importe quel $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y) = (\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3})$ qui vérifie donc $f_1(x,y) = (X,Y)$. Donc $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^2$. Ainsi f_1 est surjective.
   (c) Conclusion : f_1 est injective et surjective donc bijective.
2. Pour f_2 on pourrait raisonner similairement, mais on va simplifier le travail pour l'image de f_2.
   (a) Calculons d'abord le noyau :
   $$\begin{aligned}(x,y,z) \in \ker f_2 &\iff f_1(x,y,z) = (0,0,0)\\ &\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y+z=0\\ y-z=0\\ x+y=0\end{cases}\\ &\iff \cdots\\ &\iff (x,y,z) = (0,0,0)\end{aligned}$$
   Ainsi $\ker f_2 = \{(0,0,0)\}$ et donc f_2 est injective.

(b) Maintenant nous allons utiliser que $\ker f_2 = \{(0,0,0)\}$, autrement dit $\dim \ker f_2 = 0$. La formule du rang, appliquée à $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \ker f_2 + \dim \operatorname{Im} f_2 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_2 = 3$. Ainsi $\operatorname{Im} f_2$ est un espace vectoriel de dimension 3 inclus dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc $\operatorname{Im} f_2 = \mathbb{R}^3$. Ainsi f_2 est surjective.

(c) f_2 est injective, surjective donc bijective.

3. Sans aucun calcul on sait $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.

(a) Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \ker f_3 &\iff f_3(x,y) = (0,0,0,0) \\
&\iff (y, 0, x-7y, x+y) = (0,0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \cdots \\
&\iff (x,y) = (0,0)
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_3 = \{(0,0)\}$ et donc f_3 est injective.

(b) La formule du rang, appliquée à $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \ker f_3 + \dim \operatorname{Im} f_3 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$. Ainsi $\operatorname{Im} f_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f_3 n'est pas surjective.

Par décrire $\operatorname{Im} f_3$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im} f_3$. Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$. Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1. Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$. Par construction $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f_3$.

Ainsi $\operatorname{Im} f_3 = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2\} = \big\{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$.

4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc f_4 ne peut être injective.

(a) Calculons le noyau. Écrivons un polynôme P de degré ≤ 3 sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors $P(0) = d$, $P(1) =$

$a+b+c+d$, $P(-1) = -a+b-c+d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \ker f_4 &\iff \big(P(-1), P(0), P(1)\big) = (0,0,0)\\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0\\ d = 0 \\ a+b+c+d = 0\end{cases}\\
&\iff \cdots\\
&\iff \begin{cases} a = -c\\ b = 0\\ d = 0\end{cases}\\
&\iff (a,b,c,d) = (t,0,-t,0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi le noyau $\ker f_4 = \big\{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\{X^3 - X\}$. f_4 n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

(b) La formule du rang pour $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker f_4 + \dim\operatorname{Im} f_4 = \dim \mathbb{R}_3[4]$. Autrement dit $1 + \dim\operatorname{Im} f_4 = 4$. Donc $\dim\operatorname{Im} f_4 = 3$. Ainsi $\operatorname{Im} f_4$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Im} f_4 = \mathbb{R}^3$. Conclusion f_4 est surjective.

Correction 147. 1. Aucun problème...

2. Par définition de f et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\operatorname{Im} f = \{f(x_1,x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = \{x_1+x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = E_1+E_2.$$

Pour le noyau :

$$\ker f = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2) = 0\} = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1,x_2) \in \ker f$, vérifie $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in E_2$. Donc $x_1 \in E_1 \cap E_2$. Réciproquement si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $(x,-x) \in \ker f$. Donc

$$\ker f = \{(x,-x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}.$$

De plus l'application $x \mapsto (x,-x)$ montre que $\ker f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

3. Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim(E_1 \times E_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre $\ker f$ et $E_1 \cap E_2$ on obtient :

$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$

Mais $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Correction 148. Montrons ceci par récurence : Pour $n = 1$, l'assertion est triviale : $x \notin \ker \varphi \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$. Supposons que si $x \notin \ker \varphi$ alors $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, $(n \geqslant 2)$. Fixons $x \notin \ker \varphi$, Alors par hypothèses de récurrence $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, mais $\varphi^{n-1}(x) = \varphi(\varphi^{n-2}(x)) \in \operatorname{Im} \varphi$ donc $\varphi^{n-1}(x) \notin \ker \varphi$ grâce à l'hypothèse sur φ. Ainsi $\varphi(\varphi^{n-1}(x)) \neq 0$, soit $\varphi^n(x) \neq 0$. Ce qui termine la récurrence.

Correction 149. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\ker f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \ker f$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim \ker f + \operatorname{rg}(f) = n$, mais $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2\operatorname{rg}(f) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\operatorname{rg}(f) = n$ alors la formule du rang donne $\dim \ker f = \operatorname{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\ker f$ mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Correction 150.

1. Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in E$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule
$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$
Soit ici :
$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$
Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).
2. On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$
Si $t \neq 0$ alors en résolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et ϕ est injective.
Si $t = 0$, alors ϕ n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.

3. Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. ϕ est surjective si et seulement si la dimension de $\operatorname{Im}\phi$ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici E de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \operatorname{Im}\phi$:
$$\dim\ker\phi + \dim\operatorname{Im}\phi = \dim E.$$
Si $t \neq 0$, ϕ est injective donc $\ker\phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim\operatorname{Im}\phi = 3$ et ϕ est surjective.
Si $t = 0$ alors ϕ n'est pas injective donc $\ker\phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim\operatorname{Im}\phi \leqslant 2$. Donc ϕ n'est pas surjective.
On remarque que ϕ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

Correction 151. 1. Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la division euclidienne de AP par B s'écrit $AP = Q\cdot B+R$, donc en multipliant par λ on obtient : $A\cdot(\lambda P) = (\lambda Q)B + \lambda R$. ce qui est la division euclidienne de $A\cdot(\lambda P)$ par B, donc si $f(P) = R$ alors $f(\lambda P) = \lambda R$. Donc $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.
Soient $P, P' \in E$. On écrit les divisions euclidiennes :
$$AP = Q\cdot B + R, \quad AP' = Q'\cdot B + R'.$$
En additionnant :
$$A(P+P') = (Q+Q')B + (R+R')$$
qui est la division euclidienne de $A(P+P')$ par B. Donc si $f(P) = R$, $f(P') = R'$ alors $f(P+P') = R+R' = f(P)+f(P')$.
Donc f est linéaire.

2. Sens $\Rightarrow$. Supposons f est bijective, donc en particulier f est surjective, en particulier il existe $P \in E$ tel que $f(P) = 1$ (1 est le polynôme constant égale à 1). La division euclidienne est donc $AP = BQ + 1$, autrement dit $AP - BQ = 1$. Par le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux.
3. Sens $\Leftarrow$. Supposons A, B premiers entre eux. Montrons que f est injective. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$. Donc la division euclidienne s'écrit : $AP = BQ+0$. Donc B divise AP. Comme A et B sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, alors B divise P. Or B est de degré $n+1$ et P de degré moins que n, donc la seule solution est $P = 0$. Donc f est injective. Comme $f : E \longrightarrow E$ est injective et E est de dimension finie, alors f est bijective.

Correction 152. $(\mathrm{rg}u)(\mathrm{rg}v)$.

Correction 153. 1. Soit

$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \big[\arctan x\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $I = \int_0^1 g(x)dx$.
Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= \big[x\ln(1+x^2)\big]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\big[x - \arctan x\big]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Correction 154. 1. Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = x^2 \sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\int_0^1 x^2 \sin(\pi x)\, dx = \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\, dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi})$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.$$

2. On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k) - \ln k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{a}{k}).$$

La suite de nombres a, $\frac{a}{2}$,..., $\frac{a}{n}$ « est une subdivision (à pas non constant) de $[0,a]$ » mais malheureusement son pas $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans le même type de problèmes.
Rappel. (exo classique) Soit v une suite strictement positive telle que la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tend vers un réel positif ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ.
Posons $v_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ puis $u_n = \sqrt[n]{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \to 1,$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Encore une fois, ce n'est pas une somme de RIEMANN. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leq \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

4. Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.
Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $1 \leq k \leq n-2$, on a $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, et pour $1 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{0}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin}(1-\frac{1}{n}),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \operatorname{Arcsin}(1-\frac{1}{n}) - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\frac{\pi}{2}$.

5. Pour $1 \leq k \leq n$, $\sqrt{k}-1 \leq E(\sqrt{k}) \leq \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de Riemann $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ tend vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

6. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1}\,dx = \left[\frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

7. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{2+x}\ dx = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \ln 2$.
8. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ si $x > 0$ et 0 si $x = 0$. f est continue sur $[0,1]$ (théorèmes de croissances comparées). Donc, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f(x)\ dx$. Pour $x \in [0,1]$, posons $F(x) = \int_x^1 f(t)\ dt$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, F l'est et

$$\int_0^1 f(x)\ dx = F(0) = \lim_{x\to 0,\ x>0} F(x) = \lim_{x\to 0,\ x>0} \left[e^{-1/t}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0,\ x>0}(e^{-1}-e^{-1/x}) = \frac{1}{e}.$$

Donc, u_n tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction 156. $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx = \frac{\pi}{2}R^2$.

Correction 157. 1. $\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx$

En posant le changement de variable $u = \cos x$ on a $x = \arccos u$ et $du = -\sin x\,dx$ et on obtient

$$\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx = \int u^{1234}(-du) = -\frac{1}{1235}u^{1235}+c = -\frac{1}{1235}(\cos x)^{1235}+c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

En posant le changement de variable $u = \ln x$ on a $x = \exp u$ et $du = \frac{dx}{x}$ on écrit :

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

Cette primitive est définie sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ (la constante peut être différente pour chacun des intervalles).

3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$

Soit le changement de variable $u = \exp x$. Alors $x = \ln u$ et $du = \exp x\,dx$ ce qui s'écrit aussi $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1}du = \frac{1}{3}\ln|3u+1|+c = \frac{1}{3}\ln(3\exp x+1)+c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin u + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$ c'est $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On va donc essayer de s'y ramener. Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x - x^2$ sous la forme $1 - t^2$: $4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2\right)$. Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$ pour lequel $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ et $dx = 2du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}}2du = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$$

La fonction $\arcsin u$ est définie et dérivable pour $u \in]-1,1[$ alors cette primitive est définie sur $x \in]0,4[$.

Correction 158. La courbe d'équation $y = x^2/2$ est une parabole, la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$ est une courbe en cloche. Dessinez les deux graphes. Ces deux courbes délimitent une région dont nous allons calculer l'aire. Tout d'abord ces deux courbes s'intersectent aux points d'abscisses $x = +1$ et $x = -1$: cela se devine sur le graphique puis se vérifie en résolvant l'équation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.
Nous allons calculer deux aires :

– L'aire $\mathcal{A}_1$ de la région sous la parabole, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors
$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$
– L'aire $\mathcal{A}_2$ de la région sous la cloche, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors
$$\mathcal{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$
– L'aire $\mathcal{A}$ sous la cloche et au-dessus de la parabole vaut maintenant
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Correction 159. $L = 8R, \quad A = 3\pi R^2, \quad V_1 = 5\pi^2R^3, \quad V_2 = 6\pi^3R^3, \quad A_1 = \dfrac{64\pi R^2}{3}, \quad A_2 = 16\pi^2R^2.$

Correction 160. $L = 8(n+1)r = 8\dfrac{n+1}{n}R, \quad A = \pi(n+1)(n+2)r^2 = \pi\dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2}R^2, \quad S = \dfrac{128\pi R^2}{5}, \quad V = \dfrac{64\pi R^3}{3}.$

Correction 161. $L = 4R\big(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\big)$.

Correction 162. Résultats valables sur chaque intervalle du domaine de définition.

1. $\frac{1}{x^2+a^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+k$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+k$.
3. $\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-4)^2+k$.
4. $\frac{4x}{(x-2)^2}=\frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}$. Primitives : $4\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+k$.
5. $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+k$.
6. $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2}=\frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})}+\frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2}+\frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
   Primitives : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)}+\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right|+k$.
7. $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple.
   Primitives : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}+\frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)}+\frac{2}{27}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.
8. $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10)+\frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.
9. $\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{3(t+1)}-\frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitives : $\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})+k$.
10. $\frac{x^3+2}{(x+1)^2}=x-2+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+k$.
11. $\frac{x+1}{x(x-2)^2}=\frac{1}{4x}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{3}{2(x-2)^2}$. Primitives : $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{2(x-2)}+k$.
12. $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}=\frac{1}{2}(x^3-x^2+3)-\frac{3}{2x}$. Primitives : $\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}\ln|x|+k$.
13. $\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}=\frac{1}{4^3(x+1)}+\frac{1-x}{4^3(x^2+3)}+\frac{1-x}{4^2(x^2+3)^2}-\frac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
    Primitives : $-\frac{x+3}{4^2(x^2+3)^2}-\frac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)}-\frac{1}{2^7}\ln(x^2+3)-\frac{1}{3\sqrt{3}\,2^6}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})+\frac{1}{4^3}\ln|x+1|+k$.
14. $\frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}=x^2-2-\frac{1}{x}+\frac{x+4}{x^2+1}+\frac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
    Primitives : $\frac{x^3}{3}-2x-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\arctan x-\frac{6x+1}{2(x^2+1)}+k$.
15. $\frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2+1}$.
    Primitives : $-\frac{1/2}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+3\ln|x-1|-\arctan x+k$.

Correction 163. Résultats valables sur chaque intervalle du domaine de définition.

1. $\frac{1}{x^2+a^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+k$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+k$.
3. $\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-4)^2+k$.

4. $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. Primitives : $4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k$.

5. $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + k$.

6. $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2} = \frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2} + \frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
Primitives : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)} + \frac{\sqrt{2}}{16} \ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right| + k$.

7. $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple.
Primitives : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)} + \frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)} + \frac{2}{27} \arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.

8. $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10)+\frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.

9. $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitives : $\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}) + k$.

10. $\frac{x^3+2}{(x+1)^2} = x-2+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+k$.

11. $\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{3}{2(x-2)^2}$. Primitives : $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{2(x-2)} + k$.

12. $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2} = \frac{1}{2}(x^3-x^2+3)-\frac{3}{2x}$. Primitives : $\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}\ln|x|+k$.

13. $\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)} = \frac{1}{4^3(x+1)} + \frac{1-x}{4^3(x^2+3)} + \frac{1-x}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
Primitives : $-\frac{x+3}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)} - \frac{1}{2^7}\ln(x^2+3) - \frac{1}{3\sqrt{3}\,2^6}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{4^3}\ln|x+1| + k$.

14. $\frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2} = x^2 - 2 - \frac{1}{x} + \frac{x+4}{x^2+1} + \frac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
Primitives : $\frac{x^3}{3} - 2x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x - \frac{6x+1}{2(x^2+1)} + k$.

15. $\frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$.
Primitives : $-\frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\ln|x-1| - \arctan x + k$.

Correction 164. 1. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx$. Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en t (que l'on sait résoudre !).
En posant $t = \tan\frac{x}{2}$ on a $x = \arctan\frac{t}{2}$ ainsi que les formules suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ici, on a seulement à remplacer $\sin x$. Comme x varie de $x=0$ à $x=\frac{\pi}{2}$ alors $t = \tan\frac{x}{2}$ varie de $t=0$ à $t=1$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt \\
&= \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

2. Notons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$. Alors

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Correction 165. a-$\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$ sur $\mathbb{R}$.
b-$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$ sur $\mathbb{R}$.
c-$\int \cos^{2003} x \sin x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$ sur $\mathbb{R}$.
d-$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ (changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$).
e-$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (changement de variable $u = \sin x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$).
f-$\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x} dx = -\frac{1}{5}\ln(2-\sin x) + \frac{7}{10}\ln|1+2\sin x| + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}[2\pi], -\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$ (changement de variable $u = \sin x$).
g-$\int \frac{1}{7+\tan x} dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x + 7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k \in Z\right\}$ (changement de variable $u = \tan x$).
h-$\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}}\right) + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\}$ (changement de variable $u = \tan(x/2)$).

Correction 166. $P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 0 & 4a & 12a+4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a \end{pmatrix}$ est inversible pour $a \neq 0$.

Correction 168. Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe P élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$ (bien plus manipulable que $B = P^{-1}AP$).
Posons $P = Q + iR$ où Q et R sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $QB = AQ$ et $RB = AR$ mais cet exercice n'en est pas pour autant achevé car Q ou R n'ont aucune raison d'être inversibles.

On a $QB = AQ$ et $RB = AR$ et donc plus généralement pour tout réel x, $(Q + xR)B = A(Q + xR)$.
Maintenant, $\det(Q+xR)$ est un polynôme à coefficients réels en x mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i (tel que $i^2 = -1$) est $\det P$ qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x, éventuellement nul, tels que $\det(Q + xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x_0 tel que la matrice $P_0 = Q + x_0R$ soit inversible. P_0 est une matrice réelle inversible telle que $P_0A = BP_0$ et A et B sont bien semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction 174. *Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
   Les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M - \lambda I) = 0$.

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4-13\lambda^2+36 = (\lambda^2-4)(\lambda^2-9) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3$$

   Les valeurs propres de M sont donc $2, -2, 3$ et -3. Notons E_2, E_{-2}, E_3 et E_{-3} les sous-espaces propres associés.

$$\begin{aligned} E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x - z = 2y, 7y + 6t = 2z, 3z = 2t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 2y \\ 7y + 6t = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 4x \\ 14x + 9z = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ t = -3x \end{cases}$$

   ainsi, E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 2, -2, -3)$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = 4x \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{cases}$$

ainsi, E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = (1, -2, -2, 3)$.

$$\begin{aligned} E_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or} \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 9x \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{cases}$$

ainsi, E_3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 3, -7, -7)$.

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or} \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}$$

ainsi, E_{-3} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_4 = (1, -3, -7, 7)$.

2. Montrons que M est diagonalisable.

   La matrice M admet quatre valeurs propres distinctes, ce qui prouve que les quatres vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants. En effet, les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminés en 1) forment une base de $\mathbb{R}^4$. L'endomorphisme dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est représenté par une matrice diagonale dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) puisque $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2$, $Mu_3 = 3u_3$ et $Mu_4 = -3u_4$.

3. Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

   Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes. C'est la base (u_1, u_2, u_3, u_4) et la matrice de passage est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.
   On a
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ donc } D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$
   Mais, $M = PDP^{-1}$, d'où, pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$.
   Pour calculer M^k, il faut donc déterminer la matrice P^{-1} qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).
   On résout le système, et on a :
$$\begin{aligned} u_1 &= i + 2j - 2k - 3l \\ u_2 &= i - 2j - 2k + 3l \\ u_3 &= i + 3j - 7k - 7t \\ u_4 &= i - 3j - 7k + 7l \end{aligned} \iff \begin{cases} i = \frac{1}{10}(7u_1 + 7u_2 - 2u_3 - 2u_4) \\ j = \frac{1}{10}(7u_1 - 7u_2 - 3u_3 + 3u_4) \\ k = \frac{1}{10}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4) \\ l = \frac{1}{10}(3u_1 - 3u_2 - 2u_3 + 2u_4) \end{cases}$$
   d'où
$$P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   et
$$M^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction 178. 1. $y = 2 + \frac{\lambda}{x+2}$.
2. $y = \frac{C+\sin x}{x}$.
3. $y = -\cos x + \frac{\sin x + \lambda}{1+x}$.
4. $y = \lambda x - \frac{1}{3x^2}$.
5. $y = \lambda x^{4/3} - x$.
6. $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{3\sin 2x - 6\cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.

7. $y = \frac{\operatorname{Argch}(1-2x)+\lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$
$y = \frac{\arcsin(2x-1)+\mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$
$y = \frac{-\operatorname{Argch}(2x-1)+\nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x$.

8. $y = \frac{x-1}{2x}\arctan x + \frac{x+1}{2x}\left(\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda\right)$.

9. $y = \frac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x + 1 + \lambda x\Big)$.

Correction 179.

1. $y = (x + a\cos x + b\sin x)e^x$.
2. $y = (ax+b)e^{2x} + 2xe^x$.
3. $y = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$.
4. $y = \sin x \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \lambda\cos x + \mu\sin x$ (variation de la constante avec sin).
5. $y = (\lambda + \ln|x|)e^{-x} + \mu e^{-2x}$.
6. $y = \lambda\cos x + \mu\sin x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P^{(2n)}(x)$.
7. $y = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2+b^2 = 1$ ou $y = \pm 1$.

Correction 180.

1. $x = 2\alpha e^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)e^{2t}$, $y = (\gamma t + \beta)e^{2t}$, $z = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{2t}$.
2. $y = -1+\lambda e^{\alpha t}+\mu e^{\beta t}$, $z = -1+\lambda(1+\alpha)e^{\alpha t}+\mu(1+\beta)e^{\beta t}$, $\alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.
3. $y = \frac{-3\cos t - 13\sin t}{25} + (at+b)e^{2t}$, $z = \frac{-4\cos t - 3\sin t}{25} + (at+a+b)e^{2t}$.
4. $x = (a+bt+ct^2)e^t$, $y = \left(a + \frac{b-c}{2} + (b+c)t + ct^2\right)e^t$, $z = \left(a - \frac{b+c}{2} + (b-c)t + ct^2\right)e^t$.
5. $x = -(b+c)e^t + (a+b+c)e^{2t}$,
$y = \frac{1}{2}(-a+5b+3c) - 2(b+c)e^t + \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$,
$z = \frac{1}{2}(a-5b-3c) + 3(b+c)e^t - \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$.
6. $x = (at^2 + (a+b+\frac{1}{2})t + a+b+c)e^t$,
$y = (at^2 + (b-a+\frac{1}{2})t + a+c)e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$,
$z = (-at^2 + (a-b-\frac{1}{2})t - c)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.