Université de Strasbourg
L2 Polynômes & Fractions rationnelles
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Exercices – 4

Décomposition en éléments simples

Exercice 1. Décomposez en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

$$\frac{x+7}{2x+1},\ \frac{x^2+3}{x+3},\ \frac{x^2+3}{x^2-4},\ \frac{3x-9}{x^2-2x-35},\frac{x^3+3}{x^2-1},\ \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+1},$$

$$\frac{x^3-4x^2+2}{x^2-4x+3},\frac{1}{x^3-2x^2-3x},\frac{x^4-x^2+x-10}{x^3-5x^2+6x}.$$

Exercice 2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que Q a un zéro simple en $x_1 \in \mathbb{K}$. Prouver que le coefficient $\lambda_{1,1}$ devant la fonction $\frac{1}{(X-x_1)}$ en la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$ est $\frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$.

Exercice 3. Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x^n-1}$.

Exercice 4. Décomposez en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

$$R_1(x) = \frac{3x-1}{x^2-5x+6},\ R_2(x) = \frac{2x-5}{(x^2-1)(x-1)},$$

$$R_3(X) = \frac{x^5}{(x^2-1)(x^2-4x+5)},\ R_4(x) = \frac{5x^4-40}{(x^2-4)^2}.$$

Exercice 5. Décomposer en éléments simples la fraction :

$$F(X) = \frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}.$$

Exercice 6. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F(X) = \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}.$$

Exercice 7. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction :

$$F(X) = \frac{X^5}{(X^4-1)^2}.$$

Exercice 8. Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.

CORRECTION :

1. $\frac{1}{x^2+a^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+k$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+k$.
3. $\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-4)^2+k$.
4. $\frac{4x}{(x-2)^2}=\frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}$. Primitives : $4\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+k$.
5. $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+k$.
6. $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2}=\frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})}+\frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2}+\frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
   Primitives : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)}+\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right|+k$.
7. $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple.
   Primitives : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}+\frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)}+\frac{2}{27}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.
8. $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10)+\frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.
9. $\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{3(t+1)}-\frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitives : $\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})+k$.
10. $\frac{x^3+2}{(x+1)^2}=x-2+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+k$.

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

CORRECTION :
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx=1$ (changement de variables $t=\tan\frac{x}{2}$).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}-1$ (utiliser la précédente).

1. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx$. Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en t (que l'on sait résoudre !).
   En posant $t = \tan \frac{x}{2}$ on a $x = \arctan \frac{t}{2}$ ainsi que les formules suivantes :
   $$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$
   Ici, on a seulement à remplacer $\sin x$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$ alors $t = \tan \frac{x}{2}$ varie de $t = 0$ à $t = 1$.
   $$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt \\ &= \left[\frac{-2}{1+t} \right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$
2. Notons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$. Alors
   $$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$
   Donc $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Exercice 10. Calculer les primitives suivantes :
$$\int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)} dx\,, \qquad \int \frac{1}{\sin(x)} dx\,, \qquad \int \frac{1}{7+\tan(x)} dx$$

CORRECTION :

$\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx = \sqrt{2} \arctan \left(\frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}} \right) + c$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (changement de variable $u = \tan(x/2)$).

$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ (changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan \frac{x}{2}$).

$\int \frac{1}{7+\tan x} dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50} \ln |\tan x + 7| + \frac{1}{50} \ln |\cos x| + c$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \arctan(-7) + k\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in Z \right\}$ (changement de variable $u = \tan x$).

Exercice 11. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \sin^8 x \cos^3 x dx$ b) $\displaystyle\int \cos^4 x dx$ c) $\displaystyle\int \cos^{2003} x \sin x dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$ e) $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x} dx$