Théorie de la ruine

Esterina Masiello

Institut de Science Financière et d'Assurances
Université Lyon 1

Premières Journées Actuarielles de Strasbourg

6-7 octobre 2010

En résumé...

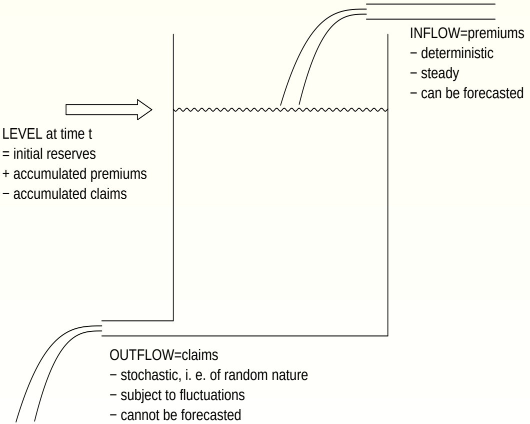
- Modèle classique de la théorie de la ruine
- Quelques possibles extensions du modèle classique
- Théorie du risque en multivarié

Qu'est-ce que c'est que la théorie de la ruine ?

La théorie de la ruine (également appelée théorie du risque) concerne :

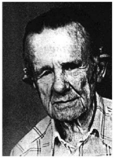
- l'évaluation de probabilités de réalisations d'événements défavorables pour une compagnie d'assurance;
- différents problèmes d'optimisation:
  - allocation de réserve
  - stratégie de versement de dividendes ou d'imposition (au sens de la fiscalité)
  - investissement dans des actifs risqués
  - programme de réassurance
  - ...

Comment décrire les richesses de la compagnie ?

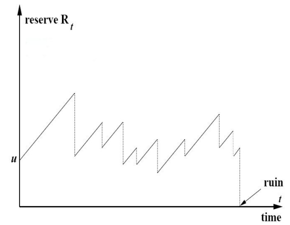


Modèle classique de la théorie du risque

F. Lundberg (1903)



H. Cramér



$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \qquad t \geq 0$$

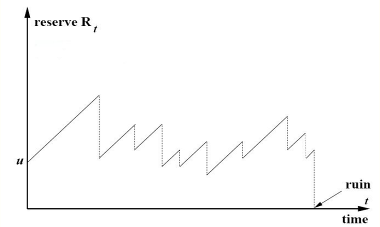
$u \geq 0$ montant initial des réserves de l'assureur

$c > 0$ taux instantané de prime

X_i montant du i-ème sinistre (v.a. i.i.d. de f.d.r. F)

$N(t)$ processus de Poisson homogène (λ)

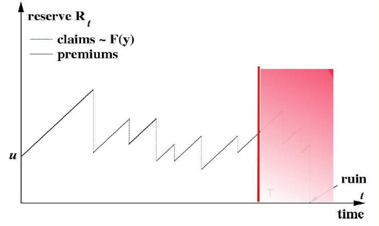
Probabilité de ruine



Probabilité de ruine en temps infini:

$$\psi(u) = P\left(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 | R_0 = u\right)$$

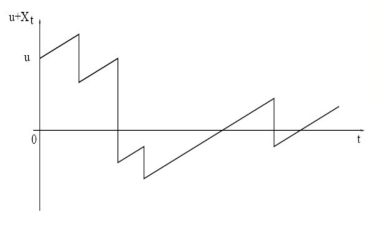
Probabilité de ruine (ctd.)



Probabilité de ruine en temps fini:

$$\psi(u, T) = P\left(\inf_{0 \leq t \leq T} R_t < 0 | R_0 = u\right)$$

Mesures de risque



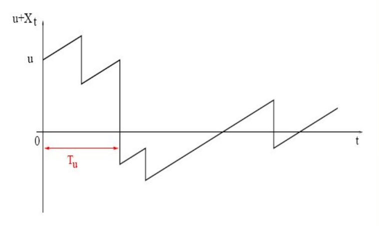
a) l'instant de ruine $T_u = \inf\{t > 0, u + X_t < 0\}$, avec $X_t = ct - S_t$,

b) la sévérité de la ruine $|u + X_{T_u}|$, ou le couple $(T_u, |u + X_{T_u}|)$,

c) le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement $T_u^{'} - T_u$, où $T_u^{'} = \inf\{t > T_u, u + X_t = 0\}$,

d) la sévérité de la ruine maximale $(\inf_{t>0} u + X_t)$

Mesures de risque



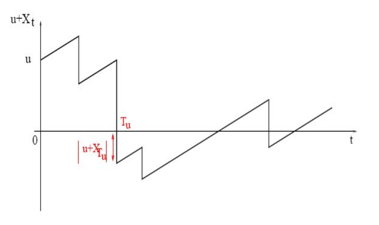
a) l'instant de ruine $T_u = \inf\{t > 0, u + X_t < 0\}$,avec $X_t = ct - S_t$,

b) la sévérité de la ruine $|u + X_{T_u}|$, ou le couple $(T_u, |u + X_{T_u}|)$,

c) le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement $T_u' - T_u$, où $T_u' = \inf\{t > T_u, u + X_t = 0\}$,

d) la sévérité de la ruine maximale $(\inf_{t>0} u + X_t)$,

Mesures de risque



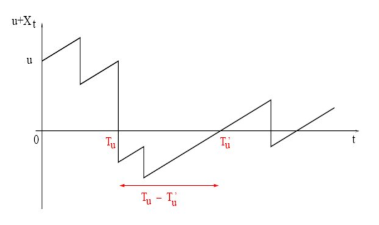
a) l'instant de ruine $T_u = \inf\{t > 0, u + X_t < 0\}$, avec $X_t = ct - S_t$,

b) la sévérité de la ruine $|u + X_{T_u}|$, ou le couple $(T_u, |u + X_{T_u}|)$,

c) le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement $T_u' - T_u$, où $T_u' = \inf\{t > T_u, u + X_t = 0\}$,

d) la sévérité de la ruine maximale $(\inf_{t>0} u + X_t)$,

Mesures de risque



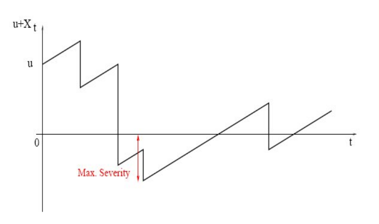
a) l'instant de ruine $T_u = \inf\{t > 0, u + X_t < 0\}$, avec $X_t = ct - S_t$,

b) la sévérité de la ruine $|u + X_{T_u}|$, ou le couple $(T_u, |u + X_{T_u}|)$,

c) le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement $T'_u - T_u$, où $T'_u = \inf\{t > T_u, u + X_t = 0\}$,

d) la sévérité de la ruine maximale $(\inf_{t>0} u + X_t)$,

Mesures de risque



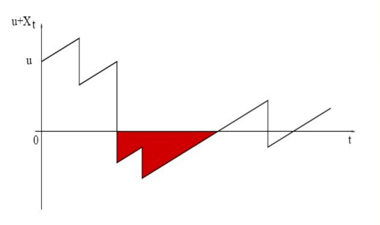
a) l'instant de ruine $T_u = \inf\{t > 0, u + X_t < 0\}$, avec $X_t = ct - S_t$,

b) la sévérité de la ruine $|u + X_{T_u}|$, ou le couple $(T_u, |u + X_{T_u}|)$,

c) le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement $T_u' - T_u$, où $T_u' = \inf\{t > T_u, u + X_t = 0\}$,

d) la sévérité de la ruine maximale $(\inf_{t>0} u + X_t)$,

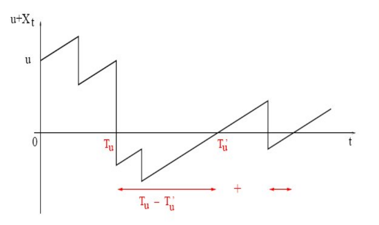
Mesures de risque (ctd.)



e) la sévérité agrégée de la ruine jusqu'au rétablissement
$J(u) = \int_{T_u}^{T_u'} |u + X_t| dt$

f) le temps total passé en-dessous de zéro
$\tau(u) = \int_0^{+\infty} 1_{\{u+X_t<0\}} dt$

Mesures de risque (ctd.)



e) la sévérité agrégée de la ruine jusqu'au rétablissement
$J(u) = \int_{T_u}^{T_u^{'}} |u + X_t| dt$

f) le temps total passé en-dessous de zéro
$\tau(u) = \int_0^{+\infty} 1_{\{u+X_t<0\}} dt$

Pour calculer ψ...

Pour le calcul de ψ, on dispose de:

- Solutions exactes (modèle d'Erlang, ...)
- Méthodes numeriques (Inversion de la transformée de Laplace, équations différentielles et intégrales, ...)
- Approximations (Modèle de Poisson composé, ...)
- Bornes et inégalités $\rightarrow$ inégalité de Lundberg:

$$\psi(x) \leq e^{-Rx}$$

avec R le *coefficient d'ajustement*.

Et dans le cas de distributions à queues lourdes...

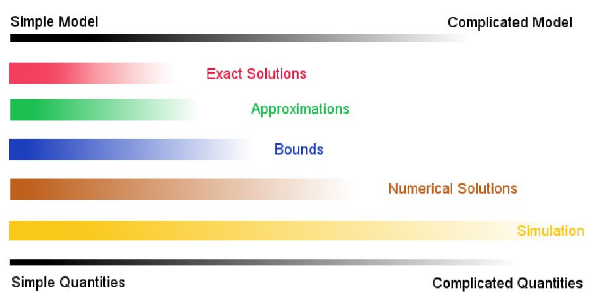
Théorème. Si $F^s \in \mathcal{S}$, alors

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}^s(u)} = \frac{E(X)}{cE(T) - E(X)}$$

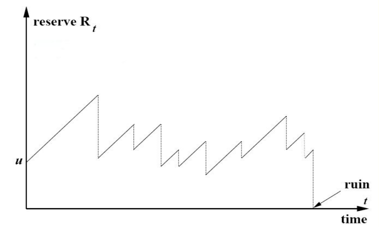
En particulier, lorsque la loi du montant de sinistre individuel est à variation régulière, dans le modèle Poisson-composé, on a

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \frac{1}{\alpha - 1} u^{-\alpha+1}$$

Compromis pour la calculabilité

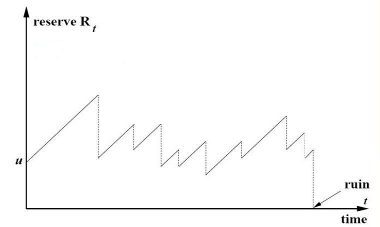


Quelques extensions du modèle classique



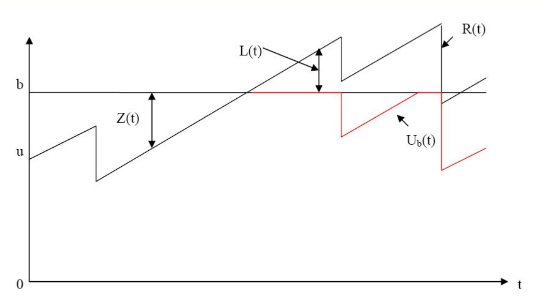
- Modèle de Sparre-Andersen : N(t) est un processus de renouvellement (temps inter-sinistres i.i.d.)
- processus ponctuels plus généraux
- réassurance

Quelques extensions du modèle classique (ctd)



- modélisation de la composante d'investissement:
  - inflation
  - investissement sur le marché financiér
  - paiement de taxes
- politique de versements de dividendes aux actionnaires
- dépendance

Politique de versement de dividendes

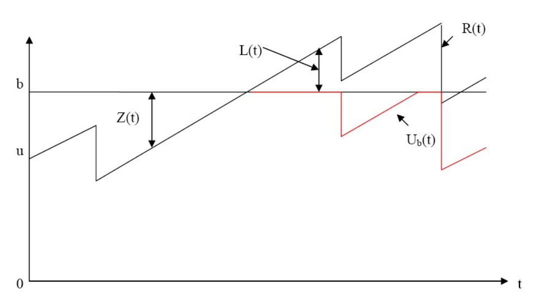


Soit $X(t) = S(t) - ct$ (avec $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$). Le cumul des dividendes versées jusqu'au temps t est

$$L_t = - \inf_{0 \leq s \leq t} \{b - u + X(s)\}^-$$

Soit $Z(t) = b - u + X(t) + L(t)$.

Politique de versement de dividendes (ctd.)



Alors

$$U_b(t) = b - Z(t)$$

est le processus donné par la stratégie qui consiste à limiter supérieurement le surplus de la compagnie à la valeur b en versant sous forme de dividendes l'excès par rapport à b.

Modulation par un processus d'environnement Markovien

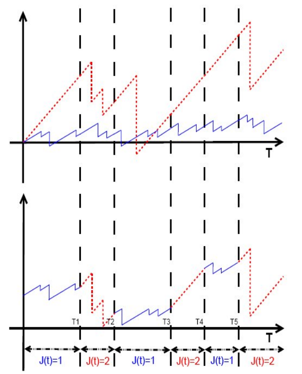


Figure: Exemple d'un processus de risque modulé, avec deux états (rouge et bleu) (source: Loisel (2010)).

Probabilité de ruine et Solvabilité II

- Le matelas de sécurité, appelé SCR (Solvency Capital Requirement) devrait en théorie permettre d'atteindre un niveau de sécurité correspondant à une probabilité de ruine à horizon d'un an inférieure à 0.5%.

- Dans une démarche (appelée ERM, Enterprise Risk Management) de gestion globale des risques qui pésent sur une entreprise, il est toutefois pertinent de considérer conjointement les réserves propres à chaque branche d'activité ou à chaque filiale. Cela conduit à s'intéresser à la fois à des probabilités de ruine dans un cadre univarié et multivarié.

Et en multivarié...

On considère d $(d > 1)$ branches d'activité :

- filiales différentes
- secteurs d'activité différents
  - assurance santé
  - habitation
  - automobile
  - responsabilité civile
  - ...
- activités (différentes ou identiques) dans différents pays ou régions

Sources de corrélation entre branches

- l'influence du climat, des marchés financiers, de la répression et de la prévention routière, ou d'autres paramètres peuvent avoir un impact sur la fréquence de sinistres. Cela correspond à la modulation du processus d'arrivée des sinistres par un processus représentant l'état de variables d'environnement commun aux branches d'activité;
- un événement unique peut induire des sinistres dans plusieurs branches d'activités différentes. Le modèle le plus classique pour prendre en compte cette éventualité est le modèle de chocs communs de Poisson.

Un peu de notation

- Les montants des sinistres $\{\mathbf{Z}_k, k \geq 1\}$ forment une suite de vecteurs aleatoires $i.i.d.$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$
- $N_t = \#\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$ est le nombre de sinistres survenus jusqu'au temps t
- $$T_0 = 0, \qquad T_n = W_1 + \cdots + W_n$$
  où $\{W_k, k \geq 1\}$ est une suite de variables aleatoires $i.i.d.$
- $\{\mathbf{Z}_k, k \geq 1\}$ est independent de $\{W_k, k \geq 1\}$

Le processus de renouvellement multivarié

$$\mathbf{R}_t = u\mathbf{b} + t\mathbf{p} - \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{Z}_k$$

- u est le capital initial
- $\mathbf{b}$: $\mathbf{b} \in (0,1]^d$ et $b^{(1)} + \cdots + b^{(d)} = 1$
- $u\mathbf{b}$ détermine l'allocation de capital aux différentes branches (la branche j dispose du capital initial $ub^{(j)}$)
- $\mathbf{p} \in (0,\infty)^d$ est le taux de prime constant

La probabilité de ruine multivariée selon Cai et Li (2007)

$$\Psi_{sum}(\mathbf{u},T) = P\left(\exists t \in [0,T], \quad \sum_{j=1}^{d} R^{(j)}(t) < 0\right)$$

$$\Psi_{or}(\mathbf{u},T) = P(\exists j \in [1,d], \quad \exists t^j \in [0,T], \quad R^{(j)}(t^j) < 0)$$

$$\Psi_{and}(\mathbf{u},T) = P(\forall j \in [1,d], \quad \exists t^j \in [0,T], \quad R^{(j)}(t^j) < 0)$$

$$\Psi_{sim}(\mathbf{u},T) = P(\exists t \in [0,T], \quad \forall j \in [1,d], \quad R^{(j)}(t) < 0)$$

La probabilité de ruine multivariée selon Hult et Lindskog (2006)

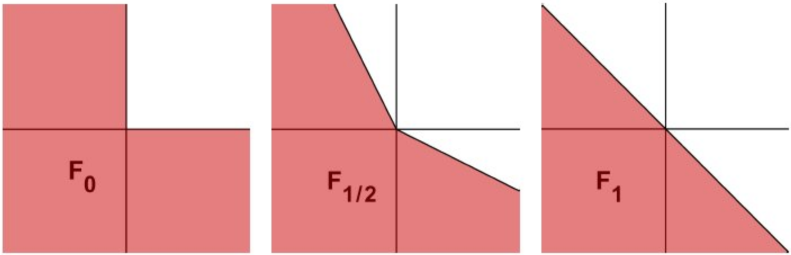
La ruine se vérifie si le processus de risque $\mathbf{R}_t$ frappe un ensemble $F_\beta \subset \mathbb{R}^d$ appellé *ensemble ruine*

$$\psi_{d,F_\beta}(u) = P(\mathbf{R}_t \in F_\beta \text{ pour un } t \geq 0)$$

En univarié : $F = (-\infty, 0)$

En multivarié, diverses possibilités...

L'ensemble F_β



- Pour $\beta = 0$, les transferts de capitaux ne sont pas autorisés et donc $\Psi_{d,F_0} = \Psi_{or}$
- Pour $\beta = 1$, les transferts sont autorisés sans aucune restriction et $\Psi_{d,F_1} = \Psi_{sum}$

L'approche de Hult et Lindskog (2006)

Deux hypothèses clé:

- possibilité de transférer du capital entre branche d'activité
- $\mathbf{Z}$ est à variation regulière, i.e. il existe $\alpha > 0$ et une mesure de probabilité σ sur la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ telle que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P(\|\mathbf{Z}\| > zt, \mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\| \in S)}{P(\|\mathbf{Z}\| > t)} = z^{-\alpha}\sigma(S)$$

  $\forall z > 0$ et ensemble de Borel $S \subset \mathbb{S}^{d-1}$ avec $\sigma(\partial S) = 0$.
  σ est appelée *mesure spectrale* de $\mathbf{Z}$.

La ruine se vérifie lorsque, malgré le transfert de capital, on n'arrive pas à résoudre une situation négative dans une ou plusieurs branches d'activité.

Une approximation de la probabilité de ruine multivariée

Hult et Lindskog (2006) ont demontré que si $\mathbf{Z} \in RV(\alpha, \mu)$ avec $\alpha > 1$ et si $\mathbf{c} = E(W)\mathbf{p} - E(\mathbf{Z}) \in (0, \infty)^d$ (chaque branche d'activité a un chargement de securité positif) et $E(W^\gamma) < \infty$, $\gamma > \alpha$, alors

$$\psi_{d,F}(u) \approx \int_0^\infty \mu(v\mathbf{c} + \mathbf{b} - F)dv\, u\, P(|\mathbf{Z}| > u)$$

où μ est une mesure sur $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ liée à σ par

$$\mu(\mathbf{z} : |\mathbf{z}| > r, \mathbf{z}/|\mathbf{z}| \in S) = r^{-\alpha}\sigma(S)$$

pour $r > 0$ et $S \subset \mathbb{S}^{d-1}$.

Modèle de chocs communs de Poisson

Un événement unique peut induire des sinistres dans plusieurs branches d'activités différentes (exemple: ouragan).

- La partie "pertes en commun" :

$$\mathbf{C}_{0,t} = \sum_{k=1}^{N_{0,t}} \mathbf{Z}_{0,k}$$

  où $\mathbf{Z}_{0,k} = \mathbf{a} Z_{0,k} = (a^{(1)} Z_{0,k}, \cdots, a^{(d)} Z_{0,k})$ et $a^{(j)} \geq 0$.
- La partie "spécifique" à une branche d'activité : les sinistres arrivent à la branche j aux temps d'arrivée d'un processus de Poisson $(N_{j,t})_{t\geq 0}$ avec intensité λ_j et $Z_{j,k} = \sigma^{(j)} Z$, $j = 1, \dots, d$.

Le processus du montant total des sinistres

Le processus du montant total des sinistres est donné par

$$\mathbf{C}_t = \sum_{k=1}^{N_{0,t}} \mathbf{Z}_{0,k} + \sum_{k=1}^{N_{1,t}} Z_{1,k}\mathbf{e}_1 + \cdots + \sum_{k=1}^{N_{d,t}} Z_{d,k}\mathbf{e}_d = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{Z}_k$$

où $N_t = N_{0,t} + \cdots + N_{d,t}$ est un processus de Poisson d'intensité $\overline{\lambda} = \lambda_0 + \cdots + \lambda_d$. De plus

$$\mathbf{Z}_k \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}_{0,1}\delta_0(\xi) + Z_{1,1}\mathbf{e}_1\delta_1(\xi) + \cdots + Z_{d,1}\mathbf{e}_d\delta_d(\xi)$$

où ξ est indépendant de $\mathbf{Z}_{0,1}, Z_{1,1}, \cdots, Z_{d,1}$ et $P(\xi = k) = \frac{\lambda_k}{\overline{\lambda}}$ pour $k \in \{0, \ldots, d\}$.

La probabilité de ruine

Pour le modèle de chocs communs de Poisson, la probabilité de ruine satisfait

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi_{d,F_\beta}(u)}{uP(Z>u)} =$$
$$\frac{\lambda_0}{\overline{\lambda}}\frac{d^{\alpha-1}}{c(\alpha-1)} + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\overline{\lambda}}\right)\left(\frac{\beta(d-1)+1}{d}\right)^{-\alpha}\frac{1}{dc(\alpha-1)}$$

Conclusions

- La théorie du risque est un domain de recherche important
- Interaction avec de nombreuses branches des mathématiques
- Liens vers d'autres disciplines (théorie des files d'attente, finance, ...)

mais...

- complexité de calcul
- trop peu de formules explicites
- hypothèses du modèle trop simples.