Université de Strasbourg | Département de mathématique
Probabilités-Statistique | L2 S3 année 2016-2017

Épreuve 3 : UE Probabilités et Statistique

Solution

Exercice 1 :

1. La densité de X est donnée par
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$
En utilisant l'indépendance entre X et Y, la densité du couple (X, Y) est le produit des densités donc
$$f_{(X,Y)}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}.$$

2. On transforme le couple initial (X, Y) en un couple $(U = X, V = X + Y)$. Le changement inverse revient à transformer (U, V) en un couple $(X, Y) = (U, V - U)$. Le jacobien vaut donc 1. Par la formule de changement de variables on obtient
$$f_{(X,X+Y)}(u, v) = f_{(X,Y)}(u, v - u)|1| = \lambda^2 e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{\{0 \leq u \leq v\}}.$$

3. On obtient la densité marginale de $X + Y$ en intégrant la loi du couple par rapport à u :
$$f_{X+Y}(v) = \int f_{(X,X+Y)}(u, v) du = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{\{v \geq 0\}}.$$

4. On cherche l'espérance de $Z = X+Y$ dont la densité est donnée dans la question précédente. Par définition de l'espérance et par intégration par parties, on en déduit
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) = \int z f_Z(z) dz &= \lambda^2 \int_0^\infty z^2 e^{-\lambda z} dz = \lambda^2 \left\{ \left[z^2 \frac{e^{-\lambda z}}{-\lambda} \right]_0^\infty + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty z e^{-\lambda z} dz \right\} \\ &= 2\lambda \int_0^\infty z e^{-\lambda z} dz = 2\lambda \left\{ \left[z \frac{e^{-\lambda z}}{-\lambda} \right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda z} dz \right\} = \frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

5. Les variables X et Y ont même loi, la loi exponentielle de paramètre λ donc
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left\{ \left[x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right\} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Exercice 2 :

1. Pour une loi de Poisson(1), on a
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, k = 0, 1, ...$$

2. En utilisant l'indépendance des X_i
$$G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(t^{X_i}) = \prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^\infty t^k \mathbb{P}(X_i = k) = \prod_{i=1}^n e^{t-1} = e^{(t-1)n}$$
et par conséquent on en déduit que $\sum_{i=1}^n X_i$ est de loi de Poisson de paramètre n.

3. On dit que X_n converge en probabilité vers X si $\forall \epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

4. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi, de carré intégrable, donc on peut appliquer la loi faible des grands nombres qui dit que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = 1.$$

5. On veut montrer une convergence en probabilité, donc on repart naturellement de la définition. On utilise ensuite l'inégalité de Tchébychev : $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\epsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\epsilon^2} = \frac{1}{n\epsilon^2}$$

par indépendance des X_i. Le membre de droite de l'inégalité converge vers 0, donc on a démontré le résultat.

6. Théorème Central Limite : Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable. Alors

$$\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

7. Dans le cas particulier d'une variable de loi de Poisson(1), on a $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = 1$. Donc

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right) \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(N \leq t),$$

où N est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right) \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n + t\sqrt{n}\right)$$

et donc en faisant $t = 0$ on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}$$

par symétrie.

Exercice 3 :

1. X et Y sont indépendantes donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

2. On a $X \in \{0,1\}, Y \in \{0,1\}$. Donc $X+Y \in \{0,1,2\}$. De plus par indépendance

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=0) &= \mathbb{P}(X=0,Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = (1-p)^2;\\
\mathbb{P}(X+Y=1) &= \mathbb{P}(\{X=1,Y=0\}\,\text{ou}\,\{X=0,Y=1\}) = \mathbb{P}(\{X=1,Y=0\}) + \mathbb{P}(\{X=0,Y=1\})\\
&= 2p(1-p);\\
\mathbb{P}(X+Y=2) &= \mathbb{P}(X=1,Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) = p^2.
\end{aligned}$$

On vérifie bien que la somme des probabilités fait 1.

3. On a $X \in \{0,1\}, Y \in \{0,1\}$. Donc $X-Y \in \{-1,0,1\}$. De plus par indépendance

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X-Y=-1) &= \mathbb{P}(X=0,Y=1) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) = p(1-p);\\
\mathbb{P}(X-Y=0) &= \mathbb{P}(\{X=1,Y=1\}\,\text{ou}\,\{X=0,Y=0\}) = \mathbb{P}(\{X=1,Y=1\}) + \mathbb{P}(\{X=0,Y=0\})\\
&= p^2 + (1-p)^2;\\
\mathbb{P}(X-Y=1) &= \mathbb{P}(X=1,Y=0) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0) = p(1-p).
\end{aligned}$$

On vérifie bien que la somme des probabilités fait 1.

4. Les seuls cas possibles sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=2, X-Y=0) &= \mathbb{P}(X=1,Y=1) = p^2;\\
\mathbb{P}(X+Y=1, X-Y=1) &= \mathbb{P}(X=1,Y=0) = p(1-p);\\
\mathbb{P}(X+Y=1, X-Y=-1) &= \mathbb{P}(X=0,Y=1) = p(1-p);\\
\mathbb{P}(X+Y=0, X-Y=0) &= \mathbb{P}(X=0,Y=0) = (1-p)^2.
\end{aligned}$$

On vérifie bien que la somme des probabilités fait 1.
On voit clairement d'après les questions 2., 3. et 4. que

$$\mathbb{P}(X+Y=k, X-Y=k') \neq \mathbb{P}(X+Y=k)\mathbb{P}(X-Y=k').$$

Par conséquent $X+Y$ et $X-Y$ ne sont pas indépendantes.

5. Par linéarité de la covariance, on a

$$\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y) = \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 0.$$

6. On peut donc conclure de cet exercice que covariance égale à 0 n'implique pas indépendance.