Épreuve 3 : UE Probabilités et Statistique

Solution

Exercice 1 :

1. X est de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ donc
$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$
avec k entier de 0 à l'infini.

2. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$ on en déduit que
$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = 1 \Rightarrow e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

3. On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\, e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \\
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\, e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda\, e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \mathbb{E}(X) = \lambda\, e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \mathbb{E}(X) \\
&= \lambda^2\, e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$
ce qui implique que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda$.

4. Lorsque X est fixé égal à k, F compte le nombre de succès (obtenir face) de la répétition de k expériences aléatoires indépendantes ayant chacune une probabilité q de succès. Donc la loi de F sachant $X=k$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k,q)$. On en déduit que
$$\mathbb{P}(F=a|X=k) = C_k^a q^a p^{k-a}$$
si $0 \leq a \leq k$ et 0 sinon.

5. Par la formule de Bayes
$$\mathbb{P}(F=a, X=k) = \mathbb{P}(F=a|X=k)\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} C_k^a q^a p^{k-a}$$
si $0 \leq a \leq k$ et 0 sinon.

6. D'après la formule des probabilités totales
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F=a) &= \sum_{k=a}^{\infty} \mathbb{P}(F=a, X=k) \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^a \frac{1}{a!}\sum_{k=a}^{\infty} \frac{(\lambda p)^k}{(k-a)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^a \frac{1}{a!}(\lambda p)^a \sum_{k=a}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{k-a}}{(k-a)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^a \frac{1}{a!}(\lambda p)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{k}}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^a \frac{1}{a!}(\lambda p)^a \, e^{\lambda p} \\
&= e^{-\lambda\, q}\frac{(\lambda q)^a}{a!}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent F suit une loi de Poisson de paramètre $q\lambda$.

7. Par symétrie, P suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.
8. L'événement $\{F = a\} \cap \{P = b\}$ est le même que l'événement $\{F = a\} \cap \{X = a + b\}$, par conséquent

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{F = a\} \cap \{P = b\}) &= \mathbb{P}(\{F = a\} \cap \{X = a + b\}) \\
&= \mathbb{P}(F = a|X = a + b)\mathbb{P}(X = a + b) \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{a+b}}{(a+b)!}C_{a+b}^a q^a p^b \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{a+b}}{a!b!} q^a p^b.
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\mathbb{P}(F = a) \times \mathbb{P}(P = b) = e^{-\lambda\, q}\frac{(\lambda\, q)^a}{a!} e^{-\lambda\, p}\frac{(\lambda\, p)^b}{b!}.
$$

Ces deux quantités étant égales, P et F sont indépendantes.

9. Par indépendance de P et F, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(PF) &= \mathbb{E}(P)\mathbb{E}(F) = \lambda^2 pq \\
Var(P + F) &= Var(P) + Var(F) = \lambda,
\end{aligned}
$$

ce que l'on pouvait aussi retrouver en remarquant plus simplement que $P + F = X$.

Exercice 2 :

1. La densité de X est
$$
f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.
$$
2. La fonction de répartition de Z vaut
$$
F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t)\mathbb{1}_{t>0} = F_X(\ln t)\mathbb{1}_{t>0}.
$$
3. De la question précédente, on déduit par dérivation
$$
f_Z(t) = \frac{1}{t} f_X(\ln t)\mathbb{1}_{t>0} = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln t)^2}\mathbb{1}_{t>0}.
$$

4. On applique la formule de changement de variables. Le couple de départ est (X, Y), le couple d'arrivée est $(U = X + Y, V = X - Y)$. On a donc $(X = (U + V)/2, Y = (U - V)/2)$ et un jacobien qui vaut $-1/2$. Par conséquent

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= \frac{1}{2} f_{(X,Y)} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} f_X \left(\frac{u+v}{2} \right) f_Y \left(\frac{u-v}{2} \right) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)}. \end{aligned}$$

5. On cherche une loi marginale, donc on intègre.

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int f_{(U,V)}(u,v)dv = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}u^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}v^2} dv \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}u^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\sqrt{2} \text{ en posant } z = v/\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}u^2} \text{ car } \int_{\mathbb{R}} f_X(z)dz = 1. \end{aligned}$$

De façon similaire $f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}v^2}$.

6. De la question précédente nous déduisons que U et V ont toutes deux la même loi, la loi normale d'espérance 0 et de variance 2.

7. D'après la question 4. on voit que la densité du couple s'écrit comme le produit de la densité de U par celle de V. Par conséquent U et V sont indépendantes.

8. Les variables U et V sont indépendantes, donc $Cov(U, V) = 0$. On y arrive aussi par le calcul $Cov(U, V) = Var(X) - Var(Y) = 0$.

9. On va chercher à appliquer la loi faible des grands nombres. Soient $Z_i = U_i^2 e^{-U_i^2/4}, i = 1, ..., n$. Clairement
   - les Z_i sont iid car les U_i le sont
   - $\mathbb{E}(|Z_i|) = \mathbb{E}(Z_i) < \infty$ car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_i) &= \mathbb{E}\left(U_i^2 e^{-U_i^2/4}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2/4} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} Var(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

   Donc par application de la loi faible des grands nombres

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(Z_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$