C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **310**(1990), 311–314

DISTRIBUTION EULER-MAHONIENNE : UNE CORRESPONDANCE

Guo-Niu HAN

RÉSUMÉ. — Récemment Foata et Zeilberger ont démontré une conjecture due à Marleen Denert qui affirmait que deux paires de statistiques sur le groupe des permutations étaient équidistribuées. Cette Note fournit une démonstration combinatoire de ce fait.

ABSTRACT. — Recently Foata and Zeilberger have proved a conjecture due to Marleen Denert that asserted that two pairs of statistics on the permutation group were equidistributed. The present Note provides a combinatorial proof of this statement.

1. Introduction

On appelle *mot sous-excédant* d'ordre n tout mot $s = s_1 s_2 \ldots s_n$ de longueur n dont les lettres s_i sont des entiers satisfaisant les inégalités $0 \le s_i \le i-1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On désigne par SE_n l'ensemble de ces mots. La *somme* $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ est notée $\operatorname{tot}(s)$, et la *valeur eulérienne* $\operatorname{eul}(s)$ d'un mot sous-excédant est définie de la façon suivante : d'abord, $\operatorname{eul}(s) := 0$, si s est de longueur 1 ; ensuite si $s = s_1 s_2 \ldots s_n$ avec $n \ge 2$:

$$\operatorname{eul}(s_1 s_2 \ldots s_n) := \begin{cases} \operatorname{eul}(s_1 \ldots s_{n-1}), & \text{si } s_n \le \operatorname{eul}(s_1 \ldots s_{n-1})\,; \\ \operatorname{eul}(s_1 \ldots s_{n-1}) + 1, & \text{si } s_n \ge \operatorname{eul}(s_1 \ldots s_{n-1}) + 1. \end{cases}$$

Ainsi $\operatorname{eul}(0,0,0,3) = 1$, $\operatorname{eul}(0,0,0,3,2) = 2$, $\operatorname{eul}(0,0,0,3,2,0,5,0,3) = 3$.

On dit qu'une statistique (f, g) a la distribution *euler-mahonienne*, si f et g sont définies sur un ensemble fini E_n de cardinal $n!$ et si leur fonction génératrice $\sum t^{f(\sigma)} q^{g(\sigma)}$, écrite sous la forme $\sum_{k\ge 0} A_{n,k}(q) t^k$, satisfait la relation de récurrence

$$A_{n,k}(q) = [k+1]_q A_{n-1,k}(q) + q^k [n-k]_q A_{n-1,k-1}(q) \tag{1.1}$$

pour $1 \le k \le n-1$ avec les conditions initiales $A_{n,0}(q) = 1$ et $A_{n,k}(q) = 0$ pour $k \ge n$. Dans (1.1) on a posé $[k]_q = 0$ pour $k = 0$ et $(1-q^k)/(1-q)$ pour $k \ge 1$ (*cf.* [Car]).

Pour établir *combinatoirement* qu'une paire (f, g) définie sur E_n est euler-mahonienne, il suffit de construire une bijection $\Psi : (\pi, s_n) \mapsto \sigma$ de $E_{n-1} \times [0, n-1]$ sur E_n ayant les propriétés suivantes :

$$g(\sigma) = g(\pi) + s_n;$$

$$f(\sigma) = \begin{cases} f(\pi), & \text{si } 0 \le s_n \le f(\pi)\,; \\ f(\pi) + 1, & \text{si } f(\pi) + 1 \le s_n \le n-1. \end{cases}$$

Ainsi, (eul,tot) est euler-mahonienne. En appliquant Ψ itérativement, on obtient une bijection Φ de SE_n sur E_n satisfaisant les propriétés : $\mathrm{eul}(s) = f \circ \Phi(s)$, $\mathrm{tot}(s) = g \circ \Phi(s)$. La bijection inverse Φ^{-1} est appelé le *codage* de E_n.

L'exemple classique de statistique euler-mahonienne sur le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ est fourni par le couple $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$, où des et maj sont respectivement le *nombre de descentes* et l'*indice majeur* (*cf.* [Car], [D-F], [Raw], [G-G]). Dans ce cas, la bijection Ψ est aisée à construire. Le mot sous-excédant $\Phi_{\mathrm{maj}}^{-1}(\sigma)\big(= \Phi^{-1}(\sigma)\big)$ correspondant à σ s'appelle le *maj-codage* de σ (*cf.* [Raw]).

Nous nous proposons dans cette Note de faire une construction analogue pour la statistique bivariée (exc,den) introduite par Denert ([Den]) dont on sait qu'elle est déjà euler-mahonienne d'après le récent travail de Foata et Zeilberger ([F-Z]). La statistique "exc" est simplement le *nombre* classique *des excédances*, défini pour toute permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ par $\mathrm{exc}(\sigma) := \#\{i : 1 \le i \le n, \sigma(i) > i\}$. La statistique "den" est, elle, définie par

$$
\begin{aligned}
\mathrm{den}\,\sigma := \quad & \#\{1 \le i < j \le n : \sigma(j) < \sigma(i) \le j\} \\
& + \#\{1 \le i < j \le n : \sigma(i) \le j < \sigma(j)\} \\
& + \#\{1 \le i < j \le n : j < \sigma(j) < \sigma(i)\}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Dans cette Note on trouvera donc la construction d'un *den-codage* Φ_{den}^{-1}.

2. Chemins de Motzkin

Un *chemin de Motzkin coloré* (ou simplement *chemin*) de longueur n est un chemin polygonal dans le quart plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, allant de (0,0) à ($n$,0) dont les pas élémentaires sont de quatre sortes : $\nearrow, \longrightarrow, \dashrightarrow, \searrow$. De plus, il n'y a jamais de pas $\dashrightarrow$ sur l'axe horizontal. On identifiera un tel chemin au *mot* $w = x_1 x_2 \ldots x_n$, dit *de Motzkin coloré*, dont les lettres sont prises dans l'alphabet $\{\nearrow, \longrightarrow, \dashrightarrow, \searrow\}$. Pour chaque x_r, la *hauteur* de x_r, notée $h_r(w)$, est définie par :

$$
h_r(w) := \begin{cases} \#\{s < r : x_s = \nearrow\} - \#\{s < r : x_s = \searrow\}, \\ \qquad\qquad \text{si } x_r = \nearrow \text{ ou } \longrightarrow; \\ \#\{s < r : x_s = \nearrow\} - \#\{s < r : x_s = \searrow\} - 1, \\ \qquad\qquad \text{si } x_r = \searrow \text{ ou } \dashrightarrow. \end{cases}
\tag{2.1}
$$

Une *évaluation* d'un mot w est une suite $t = t_1 t_2 \ldots t_n$ tel que $0 \le t_r \le h_r(w)$ pour tout $r = 1, 2, \ldots, n$. Le *nombre de montées*, noté $\mathrm{mon}(w)$, est defini par : $\mathrm{mon}\, w := |w|_{\nearrow} + |w|_{\dashrightarrow}$. De plus, tout couple $u = (w, t)$, où t est une évaluation de w, est appelé *chemin (mot) évalué.* L'ensemble des mots évalués de longueur n est noté U_n et le sous-ensemble de ces mots

$u=(w,t)$ tels que $\mathrm{mon}(u):=\mathrm{mon}(w)=k$ est noté $U_{n,k}$. Enfin, *l'indice* $\mathrm{ind}(u)$ de u est defini comme la somme des places des montées et de tous les t_r, c'est-à-dire $\mathrm{ind}(u):=\sum\{r : x_r = \nearrow \textit{ ou } \dashrightarrow\} + \sum_{r=1}^{n} t_r$.

Foata et Zeilberger [F-Z] ont établi une bijection Θ de $\mathfrak{S}_n$ sur U_n, différente de la bijection classique (cf. [Vie]), ayant la propriété $\mathrm{exc}(\sigma)=\mathrm{mon}\,\Theta(\sigma)$, $\mathrm{den}(\sigma)=\mathrm{ind}\,\Theta(\sigma)$, pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Le reste de la Note va être consacré à la construction d'une bijection $\Phi_{\mathrm{den}} : SE_n \to U_n$ ayant la propriété $\mathrm{eul}(s)=\mathrm{mon}\,\Phi_{\mathrm{den}}(s)$, $\mathrm{tot}(s)=\mathrm{ind}\,\Phi_{\mathrm{den}}(s)$, et la suite des bijections

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{S}_n & \xleftarrow{\ \Phi_{\mathrm{maj}}\ } & SE_n & \xrightarrow{\ \Phi_{\mathrm{den}}\ } & U_n & \xleftarrow{\ \Theta\ } & \mathfrak{S}_n \\ (\mathrm{des},\mathrm{maj}) & & (\mathrm{eul},\mathrm{tot}) & & (\mathrm{mon},\mathrm{ind}) & & (\mathrm{exc},\mathrm{den}) \end{array}$$

fournira la correspondance $\sigma\mapsto\sigma'$ telle que $\mathrm{exc}(\sigma)=\mathrm{des}(\sigma')$ et $\mathrm{den}(\sigma)=\mathrm{maj}(\sigma')$. Comme déjà signalé précédemment, il nous suffira de construire une bijection

$$\begin{aligned} &\Psi_{\mathrm{den}} : (v,s_n)\longmapsto u \\ &U_{n-1,k}\times[0,k]+U_{n-1,k-1}\times[k,n-1]\longrightarrow U_{n,k} \end{aligned} \tag{2.2}$$

satisfaisant $\mathrm{ind}(u)=\mathrm{ind}(v)+s_n$.

3. La Bijection

Il est commode d'introduire la notion de *chemin évalué pointé*. Il y en a de deux sortes :

$$\overset{\dashrightarrow}{U_{n-1,k}} := \{(u,p) : u\in U_{n-1,k},\quad x_p = \searrow \text{ ou } \dashrightarrow\}; \tag{3.1}$$

$$\overrightarrow{U_{n-1,k-1}} := \{(u,p) : u\in U_{n-1,k-1},\quad x_p = \searrow \text{ ou } \longrightarrow\}; \tag{3.2}$$

Puis, on définit l'indice "ind" pour les chemins évalués pointés. Si $(u,p)\in \overset{\dashrightarrow}{U_{n-1,k}}$, on marque tous les pas $\searrow$ ou $\dashrightarrow$ dont le nombre total est exactement k, et on les numérote $1,2,\ldots,k$ *de droite à gauche*. On pose alors :

$$\mathrm{ind}(u,p) := \#\{r\ge p : x_r = \searrow \text{ ou } \dashrightarrow\}.$$

Le chemin inférieur de la figure 1 est un chemin évalué pointé (u,p) avec comme paramètres : $n-1=14$, $k=6$, $p=5$, $\mathrm{ind}(u,p)=5$. Si $(u,p)\in\overrightarrow{U_{n-1,k-1}}$, on marque tous les pas $\searrow$ et $\longrightarrow$ dont le nombre total est exactement $n-k$, et on les numérote $k,k+1,\ldots,n-1$ *de gauche à droite*. De même, on pose

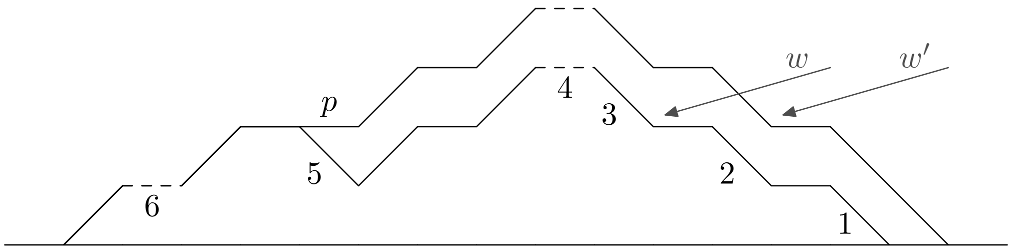
$$\mathrm{ind}(u,p) := (k-1)+\#\{r\le p : x_r = \searrow \text{ ou } \longrightarrow\}.$$

Par exemple, avec $n-1=14$, $k-1=6$, $p=5$, $\mathrm{ind}(u,p)=8$, on obtient le chemin inférieur de la figure 2. Pour construire l'application

Ψ_{den}, on distingue deux cas suivant que (v, s_n) , avec $v = (w,t) = (x_1x_2\ldots x_{n-1},\ t_1t_2\ldots t_{n-1})$, appartient à $U_{n-1,k}\times[0,k]$ ou à $U_{n-1,k-1}\times[k,n-1]$ (*cf.* (2.2)).

Premier cas. — Supposons $(v,s_n)\in U_{n-1,k}\times[0,k]$. D'abord si $s_n=0$, on définit $u=\Psi_{\text{den}}(v,s_n):=(x_1x_2\ldots x_{n-1}\rightarrow,t_1t_2\ldots t_{n-1}0)$. Par contre, si $s_n\neq 0$, d'après la définition de ind, on sait qu'il existe dans $\overset{\dashrightarrow}{U_{n-1,k}}$ un chemin évalué pointé unique (v,p) tel que $\operatorname{ind}(v,p)=s_n$. On fait alors correspondre un chemin $w'=y_1y_2\ldots y_n$ et une suite $t'=l_1l_2\ldots l_n$ de la façon suivante :

(W1) $y_r=x_r$, si $r\le n-1$ et $r\neq p$;
(W2) $y_p=\longrightarrow$, si $x_p=\searrow$;
$y_p=\nearrow$, si $x_p=\dashrightarrow$;
(W3) $y_n=\searrow$;
(T1) $l_r=t_r$, si $r\le p-1$;
(T2) $l_p=h_p(w')$;
(T3) $l_{r+1}=t_r$, si $p\le r\le n-1$, et $x_r=\searrow$ ou $\longrightarrow$;
$l_{r+1}=t_r+1$, si $p\le r\le n-1$, et $x_r=\nearrow$ ou $\dashrightarrow$.

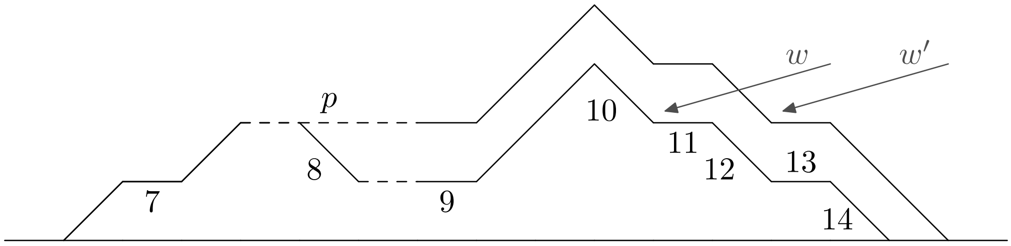


$r=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t=$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	
$t'=$	t_1	t_2	t_3	t_4	$h_5(w')$	t_5	$t_6{+}1$	t_7	$t_8{+}1$	$t_9{+}1$	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}

Fig.1

Second cas. — Supposons $(v,s_n)\in U_{n-1,k-1}\times[k,n-1]$. De même, il existe dans $\overrightarrow{U_{n-1,k-1}}$ un chemin évalué pointé unique (v,p) tel que $\operatorname{ind}(v,p)=s_n$. On fait alors correspondre un chemin $w'=y_1y_2\ldots y_n$ et une suite $t'=l_1l_2\ldots l_n$ de la façon suivante :

(W1') $y_r=x_r$, si $r\le n-1$ et $r\neq p$;
(W2') $y_p=\dashrightarrow$, si $x_p=\searrow$; $y_p=\nearrow$, si $x_p=\longrightarrow$;
(W3') $y_n=\searrow$;
(T1') $l_r=t_r$, si $r\le p$;
(T2') $l_{p+1}=0$;



$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t =$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	
$t' =$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	0	$t_6{+}1$	t_7	$t_8{+}1$	$t_9{+}1$	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}

Fig.2

(T3') $l_{r+1} = t_r$, si $p+1 \le r \le n-1$, et $x_r = \searrow$ ou $\longrightarrow$;
$l_{r+1} = t_r + 1$, si $p+1 \le r \le n-1$, et $x_r = \nearrow$ ou $\dashrightarrow$.

Proposition 3.1. — *On a :* $(w', t') \in U_{n,k}$ *et* $\mathrm{ind}(w', t') = \mathrm{ind}(v) + s_n$.

On pose alors $u = \Psi_{\mathrm{den}}(v, s_n) := (w', t')$. L'entier p est dit la *place de changement* par rapport à u.

Pour le premier cas, on reprend l'exemple de la figure 1. La place de changement est $p = 5$. On a $5 = h_p(w') + 3$ et on obtient le chemin supérieur de la figure 1. Pour le second cas, on reprend l'exemple de la figure 2, la place de changement étant $p = 5$. On a $8 = p + 3$ et on obtient le chemin supérieur representé dans la figure 2.

Proposition 3.2. — *L'application* Ψ_{den} *ainsi construite est inversible.*

BIBLIOGRAPHIE

[Car] L. Carlitz. — q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), pp. 332–350.

[Den] M. Denert. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.*, **54** (1990), pp. 449–465.

[D-F] J. Désarménien et D. Foata. — Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, *Bull. Soc. Math. France*, **113** (1985), pp. 3–22.

[F-Z] D. Foata et D. Zeilberger. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, **83** (1990), pp. 31–59.

[F-S] D. Foata et M.-p. schützenberger. — Major Index and Inversion Number of Permutations, *Math. Nachr.*, **83** (1978), pp. 143–159.

[G-G] A. Garsia et I. gessel. — Permutation Statistics and Partitions, *Adv. in Math.*, **31** (1979), pp. 288–305.

[Raw] D. Rawlings. — Generalized Worpitzki Identites with Applications to Permutation Enumeration, *Europ. J. Comb.*, **2** (1981), pp. 67–78.

[Vie] G. Viennot. — Une Théorie Combinatoire des Polynômes Orthogonaux Généraux, Notes conf. Univ. Québec à Montréal, 1984.

I.R.M.A. UMR 7501
Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg, France
guoniu@math.u-strasbg.fr