C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **310**(1990), 493–496

UNE NOUVELLE BIJECTION POUR LA STATISTIQUE DE DENERT

Guo-Niu HAN

Résumé. — Pour le théorème de Foata-Zeilberger sur les statistiques de Denert, on a construit dans [Han] une bijection indirecte en passant par les chemins évalués. Dans cette Note, on trouvera une bijection définie directement sur le groupe des permutations.

A NEW BIJECTION FOR DENERT'S STATISTIC

Abstract. — A bijection was constructed in [Han] for the Foata-Zeilberger theorem on Denert's statistic. This note provides the construction of another bijection directly defined on the permutation group.

1. Introduction. — Soit $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ une permutation d'ordre n. Si $\sigma(i) > i$, on dit que i est une *place excédante* pour σ et $\sigma(i)$ est une *valeur excédante* pour σ. Soient $\mathrm{Exc}(\sigma) = \sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_k)$ le sous-mot des valeurs excédantes et $\mathrm{Nexc}(\sigma) = \sigma(j_1)\sigma(j_2)\cdots\sigma(j_{n-k})$ le sous-mot des valeurs non-excédantes. La statistique "exc" est simplement le *nombre des excédances,* i.e., la longueur du mot $\mathrm{Exc}(\sigma)$, et la statistique "den" est définie par (*cf.* [F-Z], [Den])

$$\mathrm{den}(\sigma) := \Sigma\{i : \sigma(i) > i\} + \mathrm{inv}\,\mathrm{Exc}(\sigma) + \mathrm{inv}\,\mathrm{Nexc}(\sigma),$$

où la statistique "inv" est le *nombre d'inversion.* Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 9 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

on a $\mathrm{den}(\sigma) = 1 + 3 + 5 + \mathrm{inv}(759) + \mathrm{inv}(142638) = 13$.

Comme d'habitude, les statistiques "des" et "maj" sont respectivement le *nombre de descentes* et l'*indice majeur* pour les permutations. On dit qu'une statistique bivariée (f, g) définie sur le groupe des permutations d'ordre n a la distribution *euler-mahonienne*, si (f, g) est équidistribuée à la statistique bivariée $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$. Dans [F-Z], Foata et Zeilberger ont démontré la conjecture suivante due à Denert :

Théorème 1.1 (Foata-Zeilberger). — *La statistique bivariée* (exc, den) *a la distribution euler-mahonienne.*

Dans une note précédente [Han] nous avions démontré combinatoirement ce résultat en établissant une bijection Φ entre les mots sous-excédants et les chemins valués. Pour obtenir une bijection définie sur

$\mathfrak{S}_n$, il fallait encore prendre le produit de composition de Φ par une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et les chemins valués, établi par Foata et Zeilberger [F-Z]. La bijection proposée dans cette note est une bijection *directe* sur $\mathfrak{S}_n$.

Pour établir *combinatoirement* qu'une paire de statistiques (f, g) définie sur $\mathfrak{S}_n$ est euler-mahonienne, il suffit de construire une bijection Ψ : $(\sigma, s) \mapsto \pi$ de $\mathfrak{S}_{n-1} \times [0, n-1]$ sur $\mathfrak{S}_n$ ayant les propriétés suivantes (*cf.* [Car], [Han], [Raw]) :

$$g(\pi) = g(\sigma) + s;$$
$$f(\pi) = \begin{cases} f(\sigma)\ , & \text{si } 0 \le s \le f(\sigma)\ , \\ f(\sigma)+1\ , & \text{si } f(\sigma)+1 \le s \le n-1\ . \end{cases}$$

C'est la construction d'une telle bijection Ψ que nous allons décrire ici.

2. La Bijection. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$. On fait correspondre d'abord une permutation $\nu \in \mathfrak{S}_{n-1}$, appelée *numérotation* de σ, de la façon suivante :

$$\nu(r) := \begin{cases} \#\{i \ge r :\ i \in \mathrm{Exc}(\sigma)\ \}\ , & \text{si } r \in \mathrm{Exc}(\sigma)\,; \\ \#\{i \le r :\ i \in \mathrm{Nexc}(\sigma)\ \} + \mathrm{exc}(\sigma)\ , & \text{si } r \in \mathrm{Nexc}(\sigma)\ . \end{cases}$$

En reprenant l'exemple de la section 1, on peut réprésenter σ et sa numérotation ν par les trois lignes suivantes :

place – ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valeur – ligne	7	1	5	4	9	2	6	3	8
numéro-ligne	2	4	3	7	1	5	8	6	9.

Soit $0 \le s \le n-1$. Si $s = 0$, on définit $\Psi(\sigma, 0) := \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n-1)\, n$. Si $s \ne 0$, on construit la permutation $\Psi(\sigma, s)$ de la façon suivante :
[B1].— Dans la valeur-ligne, on souligne $\sigma(i)$ s'il est une valeur excédante et si $\sigma(i) \ge \nu^{-1}(s)$. L'ensemble de toutes les valeurs soulignées $\{\nu^{-1}(1), \nu^{-1}(2), \cdots, \nu^{-1}(k)\}$ est noté $\mathrm{Soul}(\sigma)$.
[B2].— On remplace les valeurs soulignées de grande à petite en commençant par n et en sortant la plus petite valeur soulignée $p := \nu^{-1}(k)$, d'où une suite de remplacement

$$n = \nu^{-1}(0) \mapsto \nu^{-1}(1) \mapsto \nu^{-1}(2) \mapsto \cdots \mapsto \nu^{-1}(k) = p\ ,$$

où par convention, $\nu(n) = 0$. Ainsi, on a

$$\{p > \sigma(i) \ge \nu^{-1}(s)\ ,\ \sigma(i) > i\} = \emptyset\ . \tag{2.1}$$

[B3].— On insère p à la place $\nu^{-1}(s)$ qui est appelée la *place d'insertion* par rapport à π, et on ajoute n à la fin de la place-ligne.

Autrement dit, la permutation $\pi := \Psi(\sigma, s)$ est définie comme suit :

a) $\pi(i) := \sigma(i)$ si $i < \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) \notin \mathrm{Soul}(\sigma)$;
b) $\pi(i+1) := \sigma(i)$ si $i \geq \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) \notin \mathrm{Soul}(\sigma)$;
c) $\pi(i) := \nu^{-1}(l-1)$ si $i < \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) = \nu^{-1}(l) \in \mathrm{Soul}(\sigma)$;
d) $\pi(i+1) := \nu^{-1}(l-1)$ si $i \geq \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) = \nu^{-1}(l) \in \mathrm{Soul}(\sigma)$;
e) $\pi(\nu^{-1}(s)) = \nu^{-1}(k)$.

Dans le tableau suivant, on donne deux exemples pour illustrer la construction de l'image $\Psi(\sigma, s)$.

	s=2	s=7
[B1]	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{7} & 1 & 5 & 4 & \underline{9} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\nu^{-1}(2) = 7$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{7} & 1 & \underline{5} & 4 & \underline{9} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\nu^{-1}(7) = 4$
[B2]	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{9} & 1 & 5 & 4 & \underline{10} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $10 \mapsto 9 \mapsto 7 = p$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{9} & 1 & \underline{7} & 4 & \underline{10} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $10 \mapsto 9 \mapsto 7 \mapsto 5 = p$
[B3]	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 10 & 2 & 7 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 7 & 5 & 4 & 10 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
	$\Psi(\sigma, 2)$	$\Psi(\sigma, 7)$

Lemme 2.1 (Dumont [Dum]).— *Soit σ une permutation d'ordre n et v un entier. On a*

$$\#\{i \geq v > \sigma(i)\} = \#\{\sigma(i) \geq v > i\}.$$

Démonstration.— En effet,

$$m.g. + \#\{i \geq v,\ v \leq \sigma(i)\} = \#\{i \geq v\},$$
$$m.d. + \#\{i \geq v,\ v \leq \sigma(i)\} = \#\{\sigma(i) \geq v\}.$$

D'où le lemme. $\square$

Proposition 2.2.— *Posons $\pi = \Psi(\sigma, s)$. On a*

(2.2) $\quad \mathrm{den}(\pi) = \mathrm{den}(\sigma) + s$;

(2.3) $\quad \mathrm{exc}(\pi) = \begin{cases} \mathrm{exc}(\sigma)\ , & si\ 0 \leq s \leq \mathrm{exc}(\sigma)\ , \\ \mathrm{exc}(\sigma) + 1\ , & si\ \mathrm{exc}(\sigma) + 1 \leq s \leq n-1\ . \end{cases}$

Démonstration.— Comme on le verra, la démonstration de (2.3) est incluse dans celle de (2.2) ; il nous suffit donc de démontrer la première partie de la proposition. On distingue deux cas suivant que $s \leq \operatorname{exc}(\sigma)$ ou $s \geq \operatorname{exc}(\sigma)+1$.

Premier cas.— Supposons $0 \leq s \leq \operatorname{exc}(\sigma)$. La propriété (2.3) est banale pour $s=0$. Si $s \geq 1$ (*cf.* le premier exemple), on a $p=\nu^{-1}(s)$, d'où la place $\nu^{-1}(s)$ est non-excédante. Pour tout $i<\nu^{-1}(s)$ (resp. $i>\nu^{-1}(s)$), i est une place excédante pour π, si et seulement si i (resp. $i-1$) est une place excédante pour σ. On a donc

$$(2.4) \quad \Sigma\bigl\{i : \pi(i)>i\bigr\}-\Sigma\bigl\{i : \sigma(i)>i\bigr\}=\#\bigl\{\sigma(i)>i \geq \nu^{-1}(s)\bigr\} ;$$

$$(2.5) \quad \operatorname{inv} \operatorname{Exc}(\pi)-\operatorname{inv} \operatorname{Exc}(\sigma)=0 ;$$

$$\begin{aligned}(2.6) \quad \operatorname{inv} \operatorname{Nexc}(\pi)-\operatorname{inv} \operatorname{Nexc}(\sigma) &=\#\bigl\{i \geq \nu^{-1}(s)>\sigma(i)\bigr\} \\ &=\#\bigl\{\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s)>i\bigr\} ,\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. Par définition de "den", on a

$$\begin{aligned}\operatorname{den}(\pi)-\operatorname{den}(\sigma) &=\#\bigl\{\sigma(i)>i \geq \nu^{-1}(s)\bigr\}+\#\bigl\{\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s)>i\bigr\} \\ &=\#\bigl\{\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s),\ \sigma(i)>i\bigr\} \\ &=s .\end{aligned}$$

Second cas.— Supposons $\operatorname{exc}(\sigma) \leq s \leq n-1$ (*cf.* le deuxième exemple), on peut vérifier que $p>\nu^{-1}(s)$, d'où la place $\nu^{-1}(s)$ est excédante. De même, On a

$$\begin{aligned}(2.4') \ \Sigma\bigl\{i : \pi(i)>i\bigr\}-\Sigma\bigl\{i : \sigma(i)>i\bigr\}& \\ =\#\bigl\{\sigma(i)>i \geq \nu^{-1}(s)\bigr\}+\nu^{-1}(s);&\end{aligned}$$

$$(2.5') \ \operatorname{inv} \operatorname{Exc}(\pi)-\operatorname{inv} \operatorname{Exc}(\sigma)=\#\bigl\{\nu^{-1}(s)>i,\ \sigma(i)>i,\ \sigma(i) \geq p\bigr\};$$

$$(2.6') \ \operatorname{inv} \operatorname{Nexc}(\pi)-\operatorname{inv} \operatorname{Nexc}(\sigma)=0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\nu^{-1}(s) &=\#\bigl\{\sigma(i) \leq \nu^{-1}(s),\ i \geq \sigma(i)\bigr\}+\#\bigl\{\nu^{-1}(s) \geq \sigma(i)>i\bigr\} \\ &=s-\operatorname{exc}(\sigma)+\#\bigl\{p>\sigma(i)>i,\ \nu^{-1}(s)>i\bigr\} ,\end{aligned}$$

où la première partie de la dernière égalité provient de la définition de la numérotation ν et la seconde de la relation (2.1). Avec

$$\begin{aligned}&\#\bigl\{\sigma(i)>i \geq \nu^{-1}(s)\bigr\}+\#\bigl\{\nu^{-1}(s)>i,\ \sigma(i)>i,\ \sigma(i) \geq p\bigr\} \\ &\qquad\qquad+\#\bigl\{p>\sigma(i)>i,\ \nu^{-1}(s)>i\bigr\} \\ &=\#\bigl\{\sigma(i)>i \geq \nu^{-1}(s)\bigr\}+\#\bigl\{\sigma(i)>i,\ \nu^{-1}(s)>i\bigr\} \\ &=\#\bigl\{\sigma(i)>i\bigr\} \\ &=\operatorname{exc}(\sigma) ,\end{aligned}$$

on a enfin

$$\begin{aligned}&\mathrm{den}(\pi)-\mathrm{den}(\sigma)\\=&\nu^{-1}(s)+\#\bigl\{\sigma(i)>i\geq \nu^{-1}(s)\bigr\}+\#\bigl\{\nu^{-1}(s)>i,\ \sigma(i)>i,\ \sigma(i)\geq p\bigr\}\\=&s\ .\quad \square\end{aligned}$$

La propriété (2.1) nous suggère de définir la *place grande-fixe* d'une permutation π, comme étant une place j, qui soit une place fixe, ou qui satisfasse la propriété :

$$E_j=\bigl\{\pi(i):\pi(i)>i,\ \pi(j)>\pi(i)\geq j\bigr\}=\emptyset.$$

LEMME 2.3.— *Soit $\pi=\Psi(\sigma,s)$ une permutation d'ordre n. Alors*

[G1].— *La place d'insertion $\nu^{-1}(s)$ est une place grande-fixe ;*

[G2].— *Tout $j>\nu^{-1}(s)$ n'est pas une place grande-fixe.*

Démonstration— Soit $j>\nu^{-1}(s)$. Comme j n'est pas une place fixe, il suffit de considérer le cas où j est une place excédante. Dans ce cas, on a $j>p$ (*cf.* [B2]). En écrivant $\pi(j)=\nu^{-1}(k)$, on peut vérifier que $\nu^{-1}(k+1)\in E_j$. D'où [G2]. $\square$

PROPOSITION. 2.4.— *L'application Ψ ainsi construite est inversible.*

Démonstration.— Soit π une permutation. Notons $G(\pi)$ l'ensemble des places grandes-fixes. Ou bien $\mathrm{exc}(\pi)=0$ et alors toutes les places sont grandes-fixes, ou bien $\mathrm{exc}(\pi)\neq 0$; dans ce cas, on note i l'entier défini par $\pi(i)=\min \mathrm{Exc}(\pi)$. Il appartient évidemment à $G(\pi)$. On peut alors faire l'inverse de la procédure [B$*$] en prenant $\max G(\pi)$ comme la place d'insertion. $\square$

RÉFÉFENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Car] L. CARLITZ. — q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), pp. 332-350.

[Den] M. DENERT. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, preprint.

[Dum] D. DUMONT. — Interprétations Combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math.J.*, **41** (1974), pp. 305-317.

[F-Z] D. FOATA ET D. ZEILBERGER. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, à paraître.

[Han] G.-N. HAN. — Distribution Euler-Mahonienne : une correspondance, *C.R. Acad. Sc. Paris*, à paraître.

[Raw] D. RAWLINGS. — Generalized Worpitzki Identites with Applications to Permutation Enumeration, *Europ.J.Comb.*, **2** (1981), pp. 67-78.

Département de Mathématique

7, rue René-Descartes, 67084 Strasboug