*C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **311**(1990), 269–272

# CROISSANCE DES POLYNÔMES DE KOSTKA

Guo-Niu HAN

RÉSUMÉ. — Le polynôme de Kostka $K_{I,J}(q)$ est le polynôme générateur de la charge pour les tableaux de Young de forme $I$ et d'évaluation $J$. Nous démontrons la propriété suivante de croissance pour ces polynômes, conjecturée par GUPTA-BRYLINSKI : pour tout entier positif $a$, on a $K_{I,J}(q) \le K_{I\cup a, J\cup a}(q)$ .

## GROWTH OF THE KOSTKA POLYNOMIALS

ABSTRACT. — The Kostka polynomial $K_{I,J}(q)$ is the generating function for the charge over the Young tableaux of shape $I$ and evaluation $J$. We prove the following growth property for these polynomials conjectued by GUPTA-BRYLINSKI : for any positive integer $a$ we have $K_{I,J}(q) \le K_{I\cup a, J\cup a}(q)$ .

Les fonctions de Schur forment une $\mathbb{Z}[q]$-base de l'anneau $\Lambda[q]$ des fonctions symétriques en un ensemble infini de variables et à coefficients dans les polynômes $\mathbb{Z}[q]$ en une variable supplémentaire $q$ ; une autre $\mathbb{Z}[q]$-base est celle de Hall-Littlewood, originellement introduite pour étudier les propriétés combinatoires et énumératives des groupes $p$-abéliens finis ([5], p. 105). La matrice de changement de base a pour coefficients les polynômes de Kostka $K_{I,J}(q) \in \mathbb{Z}[q]$, indicés par les paires de partitions $I, J$ (*cf.* [5] p. 125). Les polynômes de Kostka comptent une certaine statistique, appelée *charge*, sur les tableaux de Young de forme $I$ et d'évaluation $J$. Plus précisément, la charge est une application de l'ensemble des tableaux dans $\mathbb{N}$ : $t \mapsto t\nu \in \mathbb{N}$, et le polynôme de Kostka est fourni par le lemme suivant dû à LASCOUX et SCHÜTZENBERGER (*cf.* [5], p. 129, [6]) :

LEMME 1. — *Soit $\mathbb{T}_{I,J}$ l'ensemble des tableaux de forme $I$ et d'évaluation $J$. On a*

$$K_{I,J}(q) = \sum_{t\in\mathbb{T}_{I,J}} q^{t\nu}.$$

Soient $A = \{0, 1, 2, ...\}$ un alphabet totalement ordonné et $A^*$ le monoïde libre engendré par $A$. Les éléments de $A^*$ sont dits *mots*. Le nombre d'occurrences de $i$ dans un mot $w$ est noté $|w|_i$ et la somme de tous ces nombres est le *degré* de $w$, noté $|w|$. L'*évaluation* d'un mot $w$ est l'image de ce mot par le morphisme naturel de $A^*$ sur le monoïde commutatif libre de même base, i.e., $0^{|w|_0}1^{|w|_1}2^{|w|_2}...$ Un mot $w$ est dit d'*évaluation partitionnelle*, si et seulement si

Note présentée par Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER.

$$|w|_1 \geq |w|_2 \geq |w|_3 \geq ... \qquad \text{et} \qquad |w|_0 = 0 \ .$$

Les mots croissants au sens large sont appelés *lignes*; plus généralement, un *tableau* est le mot obtenu en lisant l'écriture planaire du tableau de Young de gauche à droite et de haut en bas, ainsi $\substack{24\\003}$ donne le tableau 24003. L'ensemble des tableaux sera noté $\mathbb{T}$. L'algorithme de Schensted [2] fournit une projection, que nous appellerons *redressement*, et noterons $w \mapsto wR$, de l'ensemble des mots dans $\mathbb{T}$.

Soit $B$ un intervalle de $A$. Notons $B^{**} = \{w \in B^* \mid \forall i \in B \Rightarrow |w|_i \geq 1\}$. Pour tout mot $w$, en remplaçant le plus petit nombre apparaissant dans $w$ par 1, et le nombre suivant par 2, ..., on obtient un mot dans $\{1, 2, ..., m\}^{**}$, noté $w\Omega$. Par exemple, $30053\Omega = 21132$. Soit $t$ un tableau, $x$ la lettre la plus petite figurant dans ce tableau avec la multiplicité $r$ ; $t$ peut factoriser uniquement sous la forme $t = t'x^r u$. Le *Katabolisme* est le morphisme sur l'ensemble des tableaux défini comme suit :

$$t = t'x^r u \longmapsto tK = ut'R\Omega \in \mathbb{T} \ .$$

Dans [3] et [4], on a défini une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}(A)$ :

$$w \in A^*, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}(A) \longmapsto (w\sigma) \in A^*$$

sur l'algèbre libre, compatible aux tableaux, aux redressements, aux restrictions, et aux permutations circulaires sur les mots, qui possède les propriétés suivantes :

P1. Si $w$ est un tableau, alors $w\sigma$ est un tableau de même forme.
P2. $\forall w \in A^*, \ \sigma \in \mathfrak{S}(A)$, on a $wR\sigma = w\sigma R$.
P3. Pour tout mot $w$ de $A^*$, pour tout intervalle $B$ tel que $\{B\sigma\} = B$, on a $w\sigma \cap B^* = (w \cap B^*)\sigma$.
P4. Si $(w_1 w_2)\sigma = w_1' w_2'$ avec $|w_1| = |w_1'|$ et $|w_2| = |w_2'|$, alors on a $(w_2 w_1)\sigma = w_2' w_1'$. De plus, la forme de $w_i R$ est la même que celle de $w_i' R$ pour $i = 1, 2$.
P5. Soit $t$ un tableau, $t$ s'écrit sous la forme $t = t'x^r u$. Si $|t|_i \leq r$ pour tout nombre $i$ figurant dans t, on a : $t\nu = |u| + tK\nu$ .

Cette action du groupe symétrique permet de définir une projection de $A^*$ sur l'ensemble des mots d'évaluation partitionnelle : pour tout mot $w$, l'ensemble des permutations $\sigma$ tel que $w\sigma$ est d'évaluation partitionnelle n'est pas vide; le mot $w\sigma$ est indépendant du choix de $\sigma$ dans cet ensemble et nous noterons $w\zeta$. Evidemment, pour toute permutation $\sigma$, on a $\sigma\zeta = \zeta$ ; en particulier, $\Omega\zeta = \zeta$.

Soit $a$ un entier positif. On définit le morphisme $\theta_a : A^* \to \mathbb{T}$ comme la composition $w \mapsto w\theta_a = w0^a R\zeta$. Par exemple,

$$w = 136116 \mapsto w0^2 = 13611600 \quad \xmapsto{R} \quad \begin{array}{llll} 3 & 6 & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \quad \xmapsto{\zeta} \quad \begin{array}{llll} 3 & 3 & & \\ 2 & 2 & & \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \quad = w\theta_2$$

Lemme 2 . — *Soit $\sigma$ une permutation dans $\mathfrak{S}(1,2,...,m)$. Alors, pour tout tableau $\hat{t}$ dans $\{0,1,2,...,m\}^{**}$, on a $\hat{t}\sigma K = \hat{t}K\sigma$ .*

*Démonstration .* — Le tableau $\hat{t}$ s'écrit sous la forme $\hat{t} = t'0^r u$. Par la propriété P1, $\hat{t\sigma} = s'0^r v$ est un tableau, ainsi, son katabolisme est $vs'R\Omega$. Le diagramme suivant démontre ce lemme :

$$\begin{tikzcd}
\hat{t} = t'0^r u \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "{[P4]}"] & 0^r ut' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "{[P3]}"] & ut' \arrow[r, mapsto, "R"] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "{[P2]}"] & ut'R \arrow[r, mapsto, "\Omega"] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "{[\Omega = \mathrm{id}]}"] & tK \arrow[d, "\sigma"] \\
s'0^r v \arrow[r, mapsto] & 0^r vs' \arrow[r, mapsto] & vs' \arrow[r, mapsto, "R"] & vs'R \arrow[r, mapsto, "\Omega"] & t\sigma K
\end{tikzcd}$$

Proposition 3 . — *Soit $t$ un tableau satisfaisant $|t|_0 = 0,\ |t|_1 = r > a$ et $r \geq |t|_i$ pour tout $i$. Alors on a $t\theta_a K = tK\theta_a$ .*

*Démonstration .* — Notons (0,1) la transposition entre 0 et 1. Le tableau $t\Omega$ s'écrit sous la forme $t\Omega = t'1^r u$. Posons $\hat{t} = t\Omega 0^a R(0,1)$ ; on vérifie que la première partie [i] du diagramme suivant est commutative :

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, mapsto, "\Omega"] \arrow[d, "K"] & t'1^r u \arrow[r, mapsto, "0^a R(0{,}1)"] \arrow[d, "K"] \arrow[dr, phantom, "{[i]}"] & \hat{t} = (t'1^a)R0^r u \arrow[r, mapsto, "\zeta"] \arrow[d, "K"] \arrow[dr, phantom, "{[ii]}"] & \hat{t}\zeta \arrow[d, "K"] \\
tK \arrow[r, mapsto, "\mathrm{id}"] & ut'R\Omega \arrow[r, mapsto, "0^a R\Omega"] & \hat{t}K = (ut'1^a)R\Omega \arrow[r, mapsto, "\zeta"] & \hat{t}\zeta K
\end{tikzcd}$$

D'après la définition de $\hat{t}$, on sait qu'il existe une permutation $\sigma$ telle que $\hat{t}\sigma = \hat{t}\zeta$ et $\hat{t}K\sigma = \hat{t}K\zeta$ et que $\hat{t}$, $\sigma$ satisfont les conditions décrites dans le lemme 2. Par conséquent, la seconde partie [ii] est aussi commutative. La démonstration est terminée par la vérification des deux égalités $\hat{t}\zeta K = t\theta_a K$ et $\hat{t}K\zeta = tK\theta_a$. ∎

Dans [1], Gupta-Brylinski a conjecturé que pour tout $n \geq 0$, le coefficients de $q^n$ dans $K_{I\cup a, J\cup a}(q)$ est supérieur ou égal à celui dans $K_{I,J}(q)$. Par le lemme 1, notre théorème principal suivant démontrera cette conjecture.

Théorème 4. — *La restriction de $\theta_a$ à $\mathbb{T}_{I,J}$ est une injection de $\mathbb{T}_{I,J}$ à $\mathbb{T}_{I\cup a, J\cup a}$ conservant la charge.*

*Démonstration.*— D'après les propriétés du morphisme $\zeta$, il suffit de démontrer que $\theta_a$ conserve la charge. Soient $t$ un tableau dans $\mathbb{T}_{I,J}$ et $|t|_1 = r$. Si $r \leq a$, on a $t\theta_a = t0^a R\Omega$ et on vérifie directement que $t\nu = t0^a\nu$ ; si $r > a$, en reprenant le diagramme précédent, par la relation P5, on a

$$t\theta_a\nu - t\nu = tK\theta_a\nu - tK\nu \ .$$

Ainsi, le théorème se démontre par récurrence sur le degré. ∎

Puisque $\zeta$, $R$ et $\Omega$ sont des morphismes conservant la charge, le théorème 4 a pour corollaire une propriété intéressante d'invariance de la charge :

Corollaire 5. — *Soit $w$ un mot tel que $|w|_0 = 0$. Alors pour tout entier $a$ positif, on a $w0^a\nu = w\nu$.*

A la fin de cette Note, on donne quelques remarques sur cette injection.

Remarque 6. — La construction de $\theta_a$ est facile. Si $t$ est un tableau d'évaluation partitionnelle, il existe une permutation circulaire $\sigma$ tel que $t\sigma = t\zeta$. D'après la section 4.8 dans [3], on trouve une méthode directe pour cette construction. En voici un exemple. Pour

$$t = \begin{array}{lllllll} 5 & & & & & & \\ 3 & 4 & 4 & 6 & & & \\ 2 & 2 & 2 & 3 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

et $a = 2$, on construit d'abord des filières dans $t0^a$ :

$$t0^2 = \ \underline{5}\ \ \underline{3}\ \ \underline{\underline{4}}\ \ \underline{4}\ \ \underline{6}\ \ 2\ \ \underline{\underline{2}}\ \ \underline{2}\ \ 3\ 1\ 1\ 1\ \ \underline{\underline{1}}\ \ \underline{1}\ \ 2\ \ \underline{\underline{3}}\ \ \underline{\underline{0}}\ \ \underline{0}$$

et puis, on remplace les éléments soulignés par leurs éléments successifs respectivement ; on obtient

$$t0^2\sigma = \ \underline{6}\ \ \underline{4}\ \ \underline{\underline{5}}\ \ \underline{5}\ \ \underline{7}\ \ 2\ \ \underline{\underline{3}}\ \ \underline{3}\ \ 3\ 1\ 1\ 1\ \ \underline{\underline{2}}\ \ \underline{2}\ \ 2\ \ \underline{\underline{5}}\ \ \underline{\underline{1}}\ \ \underline{1}$$

L'image de $t$ par $\theta_2$ est donc

$$t0^2\sigma R = \begin{array}{lllllll} 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Remarque 7 . — Evidemment, pour tout partition $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$, en appliquant la composition des morphismes $\theta_{l_1}, \theta_{l_2}, ..., \theta_{l_m}$, on a le résultat plus général : $K_{I,J}(q) \le K_{I\cup L, J\cup L}(q)$. Ce qui n'est pas trivial est que cette composition est indépendante de l'ordre. En effet, soient $a, b$ deux entiers positifs, $t$ un tableau d'évaluation partitionnelle, $\hat{t}$ un tableau dans $\{2, 3, ...\}^*$ tel que $\hat{t}\Omega = t\Omega$, on a

$$t\theta_a\theta_b = (\hat{t}1^a R\zeta)0^b R\zeta = (\hat{t}1^a 0^b)R\zeta = (\hat{t}1^b 0^a)R\zeta = t\theta_b\theta_a \ .$$

*L'auteur remercie* Alain Lascoux *pour son aide.*

Réféfences bibliographiques

[1] G. Gupta. — Problem No. 9, in *Combinatorics and Algebra* [C. Greene, éd. 1984], p. 310. — *Contemporary Mathematics*, vol.34.

[2] D.-E. Knuth . — *The Art of Computer Programming, vol.3, Sorting and Searching*, Don Mills, Ontario, Addison-Wesley, 1972.

[3] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Le monoïde plaxique, *Non-commutative structures in Algebra and Geometric Combinatorics* [A. De Luca, éd. Napoli. 1978], p. 129-156.

[4] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Croissance des polynômes de Foulkes-Green, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **288, série A** (1979), pp. 95-98.

[5] I.-G. Macdonald. — *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford, Clarendon Press, 1979.

[6] M.-P. Schützenberger. — Propriétés nouvelles des tableaux de Young, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, 19e année, 1977/1978, **26**.

*Département de Mathématique,*
*7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg.*