

SYMÉTRIES TRIVARIÉES SUR LES NOMBRES DE GENOCCHI

GUO-NIU HAN

RÉSUMÉ. — Dumont [Dum] a donné une interprétation des nombres de Genocchi en termes de comptages d'applications excédantes et surjectives de l'intervalle $[2n]$ sur le sous-ensemble des entiers pairs $2[n]$. Dans cet article, on propose une méthode nouvelle pour bâtir une famille plus étendue d'interprétations combinatoires de ces mêmes nombres contenant en particulier la précédente. Les nouvelles interprétations ont toutes la propriété de symétrie qu'avaient établie pour la première fois Dumont et Foata [DumFoa]. Enfin, une propriété de symétrie pour la statistique trivariée nombres de points "maximaux", "fixes" et "surfixes" est établie pour la première fois.

ABSTRACT. — Dumont [Dum] has given an interpretation of the Genocchi numbers by showing that they counted the excedent and surjective mappings of the interval $[2n]$ onto the subset $2[n]$ of the even integers. In the present paper a new method is proposed that yields a larger family of combinatorial interpretations of those numbers. The symmetry property of Dumont's interpretation also holds for that new family. Finally another symmetry property is derived for the trivariate statistic number of "maxima", "fixed" and so-called "surfixed" points.

1. Introduction et Notations

Les nombres de Genocchi $(G_{2n})_{n \geq 1}$ peuvent être définis par la fonction génératrice exponentielle :

$$G(t) = \frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} G_{2n},$$

les premières valeurs étant reproduites dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227

Depuis Dumont[Dum], on connaît plusieurs interprétations combinatoires de ces nombres, reposant sur le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1 (DUMONT). — Notons A_n l'ensemble de toutes les applications excédantes (i.e. pour tout i , $f(i) \geq i$) définies sur $[2n]$ et surjectives sur $2[n]$. Alors, $|A_n| = G_{2n+2}$. \square

Dumont et Foata [DumFoa] ont donné un raffinement de ce théorème dans les termes suivants. Soient f une application appartenant à A_n et i un élément de $[2n - 2]$, on dit que i est un *point saillant* de f , si

$$1 \leq k < i \quad \text{implique} \quad f(k) < f(i) < 2n;$$

un *point fixe* si $f(i) = i$; et un *point maximal* si $f(i) = 2n$. On désigne par $\text{sai}(f)$ (resp. $\text{fix}(f)$, $\text{max}(f)$) le nombre de points saillants (resp. fixes et maximaux) de l'application f .

THÉORÈME 1.2 (DUMONT-FOATA). — *Pour tout entier $n \geq 1$, soit $F_n(x, y, z)$ la fonction génératrice du vecteur $(\text{max}, \text{fix}, \text{sai})$ sur A_n , c'est-à-dire,*

$$\sum_{f \in A_n} x^{\text{max}(f)} y^{\text{fix}(f)} z^{\text{sai}(f)} = F_n(x, y, z).$$

Alors la suite des polynômes $(F_n(x, y, z))_{n \geq 0}$ est caractérisée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 1; \\ F_n(x, y, z) = (x + y)(x + z)F_{n-1}(x + 1, y, z) - x^2F_{n-1}(x, y, z) \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

D'après le théorème 1.1, on a, en particulier,

$$(1.1) \quad F_n(1, 1, 1) = |A_n| = G_{2n+2}.$$

Les premières valeurs des polynômes $F_n(x, y, z)$ sont données par :

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 1; \\ F_2(x, y, z) &= xy + xz + yz; \\ F_3(x, y, z) &= x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 \\ &\quad + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + 2xyz. \end{aligned}$$

On peut vérifier que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $F_n(x, y, z)$ est *symétrique* en les trois variables x, y, z ; ou encore, que la distribution des *statistiques* “max”, “fix”, et “sai” est symétrique. Pour expliquer cette symétrie, Dumont et Foata [DumFoa] avaient construit des involutions sur A_n qui mettaient en évidence cette propriété. Leur construction était cependant indirecte. Le problème qui reste ouvert est de trouver un modèle dans lequel cette symétrie apparaît de façon immédiate.

Notre but ici n'est pas de fournir ce modèle symétrique, mais de montrer qu'en réalité le modèle des applications excédantes surjectives recèle plusieurs autres symétries, dont l'une d'entre elles est fournie par le résultat de Dumont-Foata. Il est commode de visualiser les applications excédantes de $[2n]$ dans $2[n]$ comme étant des parties de l'ensemble $\{(i, 2j) \mid 1 \leq i \leq 2j \leq 2n\}$ qu'on appellera *escalier (ordinaire) pair* d'ordre $2n$. Dumont et Foata considéraient les seules applications *surjectives* contenues dans cet escalier. On peut, en fait, introduire d'autres familles de configurations qui ont les mêmes propriétés. On aboutit ainsi

au théorème 2.1, qui constitue le résultat principal de cet article. Chaque famille est indiquée par un vecteur $U = (U_1, U_2, \dots, U_{n-1})$ dont les éléments sont pris dans un alphabet à trois lettres $\{X, Y, Z\}$. Lorsqu'on spécialise la suite U à une $(n-1)$ -suite dont tous les termes sont égaux à X , la famille correspondante est simplement A_n . On est amené à introduire une nouvelle statistique sur les éléments f de A_n , qui compte les points *surfixes*, c'est-à-dire les points i tels que $1 \leq i \leq 2n-2$ et $f(i) = i+1$. On établit alors (cf. section 3)

THÉORÈME 1.3. — *La statistique (max, fix, sur) a pour fonction génératrice sur A_n le polynôme $F_n(x, y, z)$.*

La démonstration de ce théorème est consignée dans les lemmes 3.1 et 3.2. Ces résultats constituent, en fait, une nouvelle démonstration du théorème de Dumont-Foata qui est à la fois plus courte et plus claire que la version originale dans [DumFoa]. La technique principale est de conserver les variables x, y, z dans le modèle combinatoire lui-même, en “évaluant” les cases des escaliers à l'aide de ces variables, au lieu de s'encombrer des coefficients à quatre indices des polynômes F_n comme on le fait dans [DumFoa].

Lorsque $U = (Y, Y, \dots, Y)$, la famille de configurations est toujours A_n , mais le triplet de statistique devient (sur, max, fix) (dans cet ordre). Comme la symétrie entre “sur” et “fix” est simple (voir section 4), on obtient la propriété de symétrie du triplet (max, fix, sur) sur A_n .

En comparant les énoncés des théorèmes 1.2 et 1.3, on voit qu'il doit exister une bijection de A_n sur A_n envoyant le triplet (max, fix, sai) sur (max, fix, sur). En fait, on construit ici (cf. théorème 4.2) une *involution* $f \mapsto \hat{f}$ sur A_n ayant ces mêmes propriétés.

2. Les applications excédantes U -surjectives

Une application V définie sur l'escalier pair d'ordre $2n$, dans l'ensemble $\{0, 1, x, y, z\}$ est appelée *évaluation*. Les lettres x, y, z sont des variables commutatives et il sera commode de dire par la suite que y (resp. z, x) est le *successeur* de x (resp. y, z). On écrit, par exemple, $y = \text{succ } x$ et aussi $z = \text{succ} * \text{succ } x$. Soit alors $U = (U_1, U_2, \dots, U_{n-1})$ une suite dont les termes sont pris dans l'ensemble $\{X, Y, Z\}$. On lui associe une évaluation, notée V^U , de l'escalier pair défini par les relations suivantes :

- 1) $V^U(2n-1, 2n) = V^U(2n, 2n) = 1$;
- 2) $V^U(2i-1, 2n) = V^U(2i, 2n) = U_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$;
- 3) $V^U(2i, 2i) = \text{succ}(U_i)$, $V^U(2i-1, 2i) = \text{succ} * \text{succ}(U_i)$
pour $1 \leq i \leq n-1$;
- 4) pour $1 \leq i \leq n-1$ et $i+1 \leq j \leq n-1$,

$$V^U(i, 2j) = \begin{cases} 1, & \text{si l'ensemble formé par la ligne et} \\ & \text{la colonne passant par le point } (i, 2j) \\ & \text{contient les trois lettres } x, y, z; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, pour $n = 7$ et $U = (X, Y, X, X, Z, Y)$, l'évaluation V^U peut être représentée par le diagramme suivant (les lettres représentant l'évaluation s'écrivent en minuscules) :

$U =$	X	Y	X	X	Z	Y								
14	x	x	y	y	x	x	x	x	z	z	y	y	1	1
12	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	x	z		
10	1	0	0	1	1	0	1	1	0	y	x			
8	1	1	1	1	0	1	1	z	y					
6	1	1	1	1	0	z	y							
4	0	1	x	z										
2	z	y												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Escalier pair d'ordre 14 U-évalué

Les conditions 3) et 4) ci-dessus entraînent que les double-cases $((2i - 1, 2j), (2i, 2j))$ ($2 \leq i + 1 \leq j \leq n - 1$) ne sont jamais d'évaluation $(0, 0)$. Elles sont forcément d'évaluation $(0, 1)$, $(1, 0)$ ou $(1, 1)$.

Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, il est commode de désigner par B_{2i}^U le sous-ensemble de l'escalier pair d'ordre $2n$ constitué par les points de la ligne $2i$ d'évaluation *non nulle*, ainsi que par les points $(2i - 1, 2j)$ (resp. $(2i, 2j)$) de la colonne $(2i - 1)$ (resp. $2i$), dont la case adjacente $(2i, 2j)$ (resp. $(2i - 1, 2j)$) est nulle ($2 \leq i + 1 \leq j \leq n - 1$).

Par exemple, en reprenant la suite U précédente, les ensembles B_{2i}^U sont les cases de l'escalier ci-dessous portant le numéro $2i$. (Noter que certaines cases ont deux numéros, les bandes B_{2i}^U n'étant pas nécessairement disjointes deux à deux.)

$U =$	X	Y	X	X	Z	Y								
14	14 14	14 14	14 14	14 14	14 14	14 14	14 14	14 14						
12	2,12	12 12	6,12	8,12	10,12	12 12								
10	2,10	4,10	6,10	8,10	10 10									
8	8 8	4,8	8 8	8 8										
6	6 6	4,6	6 6											
4	2,4	4 4												
2	2 2													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Escalier pair d'ordre 14 U -numéroté

Pour ne pas confondre avec la notion d'escalier pair évalué, on dit qu'un tel escalier pair est *U -numéroté*.

Soit \bar{A}_n l'ensemble des applications f excédantes de $[2n]$ sur $2[n]$ (non nécessairement surjectives), ou encore l'ensemble des configurations de $2n$ points contenues dans l'escalier pair d'ordre $2n$ ayant exactement un point dans chaque colonne.

L'escalier pair *U -évalué* sert à donner une *évaluation* $V^U(f)$ à chaque f . On pose en effet

$$V^U(f) = \prod_{i \in [2n]} V^U(i, f(i)).$$

L'escalier pair *U -numéroté* sert à définir la notion de *U -surjectivité*. On dit, en effet, qu'une application f appartenant à \bar{A}_n est *U -surjective*, si pour tout i ($1 \leq i \leq n$), il existe au moins un point $k \in [2n]$ tel que $(k, f(k)) \in B_{2i}^U$. Autrement dit, f est *U -surjective*, si, lorsqu'on superpose son graphe sur l'escalier pair *U -numéroté*, on trouve au moins une fois les numéros $2, 4, \dots, 2n$ sur les cases occupées par les points du graphe de f . On note A_n^U l'ensemble de toutes les applications f *U -surjectives* d'évaluation $V^U(f)$ *non nulle*. Soit $i \in [2n]$; on dit que i est un point *U -maximal*, si $V^U(i, f(i)) = x$, que c'est un point *U -fixe*, si $V^U(i, f(i)) = y$ et qu'enfin c'est un point *U -surfixe*, si $V^U(i, f(i)) = z$. On note $\max^U f$, $\text{fix}^U f$ et $\text{sur}^U f$, respectivement, le nombre de points *U -maximaux*, *U -fixes* et *U -surfixes* de f . Si $V^U(f) \neq 0$, on a naturellement

$$V^U(f) = x^{\max^U f} y^{\text{fix}^U f} z^{\text{sur}^U f}.$$

On peut alors énoncer notre théorème principal :

THÉORÈME 2.1. — Pour toute suite $U = (U_1, U_2, \dots, U_{n-1})$, la fonction génératrice du vecteur $(\max^U, \text{fix}^U, \text{sur}^U)$ sur A_n^U est indépendante de U et égale à

$$\sum_{f \in A_n^U} V^U(f) = F_n(x, y, z).$$

En particulier,

$$(2.1) \quad |A_n^U| = F_n(1, 1, 1) = G_{2n+2}.$$

La figure suivante représente, par exemple, deux escaliers pairs d'ordre 6, U -évalués et U -numérotés comme indiqué.

$U =$	X	Y				
6	$x \ x$	$y \ y$	1	1		
4	0	1	x	z		
2	z	y				
	1	2	3	4	5	6

$U =$	X	Y				
6	6	6	6	6	6	6
4	2,4		4	4		
2	2	2				
	1	2	3	4	5	6

D'après (2.1) il y a donc $G_8 = 17$ applications appartenant à A_3^U . Leurs U -évaluations sont représentées dans ce qui suit. On vérifie bien que leur fonction génératrice est $F_3(x, y, z)$.

<i>Application</i>	:	224466	224666	226466	244466	244666	246466
<i>Evaluation</i>	:	$zyxz11$	$zyxy11$	$zyyz11$	$z1xz11$	$z1xy11$	$z1yz11$
<i>Application</i>	:	246666	264466	264666	266466	624466	624666
<i>Evaluation</i>	:	$z1yy11$	$zxxz11$	$zxxxy11$	$zxyz11$	$xyxz11$	$xyxy11$
<i>Application</i>	:	626466	644466	644666	646466	646666	
<i>Evaluation</i>	:	$xyyz11$	$x1xz11$	$x1xy11$	$x1yz11$	$x1yy11$	

Noter que les applications $f = 644666$ et $g = 246666$ sont bien U -surjectives, puisque le point $(2, 4) \in B_2 \cap B_4$.

3. Démonstration du théorème 2.1

Un *escalier gauche* E d'ordre $2n$ est défini comme une suite d'entiers positifs $(E_1, E_2, \dots, E_{2n})$ telle que

- i) $E_{2i-1} = E_{2i}$ pour $1 \leq i \leq n$;
- ii) $E_i - E_{i+1} = 0$ ou 1 pour $1 \leq i \leq 2n - 1$;
- iii) $E_{2n} = 1$.

On représente un tel escalier gauche comme un tableau de Young (à l'anglo-saxonne) ayant une profondeur égale à E_i à l'abscisse i . (Voir diagramme ci-dessous.) Par convention, les cases du tableau ainsi constitué sont repérées par les couples $(i, 2j)$ où $1 \leq i \leq 2n$ et $n - E_i + 1 \leq j \leq n$. Avec cette convention, un escalier gauche d'ordre $2n$ n'est donc rien d'autre qu'un *sous-ensemble* d'un escalier pair $\{(i, 2j) \mid 1 \leq i \leq 2j \leq 2n\}$ d'ordre $2n$, où les cases $(i, 2j)$ satisfont les inégalités $1 \leq i \leq 2n$ et $n - E_i + 1 \leq j \leq n$. En particulier, un escalier gauche d'ordre $2n$ contient toujours la *première ligne* $\{(i, 2n) \mid 1 \leq i \leq 2n\}$ de l'escalier pair.

On associe une *évaluation* V à l'escalier gauche E en donnant à chaque case $(i, 2j)$ une valeur prise dans l'alphabet $\{1, x, y, z\}$ selon les règles suivantes :

- i) $(x, x, \dots, x, x, 1, 1)$ pour la première ligne $\{(i, 2n) \mid 1 \leq i \leq 2n\}$;
- ii) $(1, 1, \dots, 1, 1, z, y)$ pour les autres lignes.

Notons que l'escalier gauche $(n, n, n - 1, n - 1, \dots, 1, 1)$ n'est rien d'autre que l'escalier pair d'ordre $2n$ et que son évaluation V coïncide alors avec l'évaluation V^U de l'escalier pair U -évalué à l'aide de la suite $U = (X, X, \dots, X)$.

On définit enfin la *signature* de E comme étant :

$$\text{sgn}(E) = (-1)^{n-E_1}.$$

Par exemple, $E = (3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ est un escalier gauche d'ordre 10; sa signature est $(-1)^2 = 1$. L'évaluation associée V peut être représentée par

10	x	x	x	x	x	x	x	x	1	1
8	1	1	1	1	z	y				
6	z	y								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Notons \mathcal{F}_E l'ensemble de toutes les applications f de \bar{A}_n telles que $f(i) \geq 2n - 2E_i + 2$, (i.e., telles que tous les points $(i, f(i))$ soient dans le diagramme de E). L'évaluation V de E induit alors une évaluation de f définie par

$$V(E; f) = \text{sgn}(E) \prod_{i \in [2n]} V(i, f(i)).$$

On a évidemment

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_E} V(E; f) = \text{sgn}(E) \prod_{i=1}^{2n} \left(\sum_{2j=2n-2E_i+2}^{2n} V(i, 2j) \right).$$

Pour l'exemple précédent, on a

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_E} V(E; f) = (x + 1 + z)(x + 1 + y)(x + 1)^2(x + z)(x + y)x^2.$$

LEMME 3.1. — On a

$$F_n(x, y, z) = \sum_E \sum_{f \in \mathcal{F}_E} V(E; f),$$

où la première somme est sur l'ensemble de tous les escaliers gauches d'ordre $2n$.

DÉMONSTRATION. — Le seul escalier gauche possible d'ordre 2 est $(1, 1)$; le lemme est donc vrai pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, on décompose l'ensemble \mathcal{E}_{2n} des escaliers gauches en deux sous-classes \mathcal{E}_{2n}^1 et \mathcal{E}_{2n}^2 distinctes : on pose $E \in \mathcal{E}_{2n}^1$, si $E_{2n-2} = 2$ et $E \in \mathcal{E}_{2n}^2$, si $E_{2n-2} = 1$. Les diagrammes suivants donnent la clé de la démonstration du lemme.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & x & x & 1 & 1 \\ \hline 1 & z & y & & \\ \hline * & & & & \\ \hline \end{array} \implies (x+y)(x+z) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x+1 & & & 1 & 1 \\ \hline * & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & x & x & 1 & 1 \\ \hline * & & & & \\ \hline \end{array} \implies -x^2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & & & 1 & 1 \\ \hline * & & & & \\ \hline \end{array}$$

Le premier diagramme, par exemple, montre que tout escalier gauche E d'ordre $2n$ tel que $E_{2n-2} = 2$ est envoyé sur un escalier gauche E' d'ordre $(2n - 2)$ donné par $E' = (E_1 - 1, E_2 - 1, \dots, E_{2n-5} - 1, E_{2n-4} - 1, E_{2n-1}, E_{2n})$.

En imposant la valeur $(x + 1, x + 1, \dots, x + 1, x + 1, 1, 1)$ à la première ligne de E' et $(1, 1, \dots, 1, 1, z, y)$ aux autres lignes, on obtient une nouvelle évaluation V' pour E' , d'où une évaluation $V'(E'; g)$ pour toute application g de \bar{A}_{n-1} appartenant à $\mathcal{F}_{E'}$. Comme $\text{sgn } E' = (-1)^{n-1-(E_1-1)} = (-1)^{n-E_1} = \text{sgn } E$, on a bien

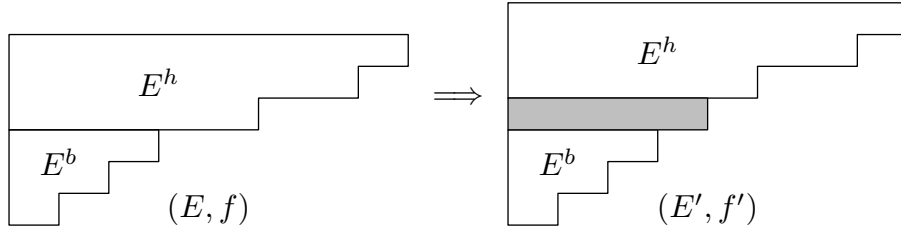
$$\sum_{f \in \mathcal{F}_E} V(E; f) = (x + y)(x + z) \sum_{g \in \mathcal{F}_{E'}} V'(E'; g). \quad \square$$

Un escalier gauche E d'ordre $2n$ peut se décomposer en deux parties E^b et E^h : on prend pour E^b le plus grand escalier ordinaire pair dans le

coin inférieur gauche de E . Autrement dit, ou bien $E_2 = E_3$ et $E^b = \emptyset$, ou bien, dans le cas contraire, $E^b = (E_1, E_2, \dots, E_{2m})$, où m est le plus petit entier satisfaisant $1 \leq m \leq n-1$ et $E_{2m+2} = E_{2m+3}$. Naturellement E^h est la partie haute restante : $E^h = E \setminus E^b$.

On décompose alors l'ensemble des couples (E, f) , où E est un escalier gauche d'ordre $2n$ et f un élément de \mathcal{F}_E en trois classes \mathcal{F}_{2n}^1 , \mathcal{F}_{2n}^2 et \mathcal{F}_{2n}^0 . Dans la première, nous rangeons tous les couples (E, f) tels que $E^h \neq \emptyset$ et f est surjective sur E^b , elle contient en particulier tous les couples tels que $E^b = \emptyset$; dans la seconde, ceux des couples où $E^b \neq \emptyset$ et où f n'est pas surjective sur E^b ; et dans la troisième, E est l'escalier ordinaire pair et f une application surjective appartenant à A_n .

On définit une bijection de \mathcal{F}_{2n}^1 sur \mathcal{F}_{2n}^2 indiquée par le diagramme suivant :



L'escalier gauche E' est obtenu en incluant une ligne vide dont la longueur est égale à l'ordre de E^b plus 2 entre E^b et E^h . On obtient bien encore un escalier gauche d'ordre $2n$, puisque la longueur de la dernière ligne de E^h surpasse au moins de quatre unités la longueur de la première ligne de E^b . De la même façon, on obtient le graphe de l'application f' en incluant une ligne vide dans le graphe de f . De plus $(E')^b$ contient strictement E^b et donc (au moins) une ligne vide. L'application f' n'est donc pas surjective sur $(E')^b$, de sorte que le nouveau couple (E', f') appartient à \mathcal{F}_{2n}^2 .

On passe, réciproquement, de (E', f') à (E, f) par suppression de la ligne vide la plus basse de (E', f') . On a enfin

$$V(E'; f') = -V(E; f),$$

puisque E' a une ligne de plus que E .

Dans la somme (3.1) il ne reste donc plus que les couples (E, f) où E est l'escalier pair et f une application surjective sur E . On a donc démontré le lemme suivant :

LEMME 3.2. — On a

$$F_n(x, y, z) = \sum_{f \in A_n} V^U(f),$$

où $U = (X, X, \dots, X)$. \square

LEMME 3.3. — *Le changement de la première lettre dans une suite ne change pas la fonction génératrice associée à cette suite.*

Nous donnons ci-après la démonstration seulement dans le cas où $U = (X, U_2, U_3, \dots, U_{n-1})$ et $W = (Y, U_2, U_3, \dots, U_{n-1})$. Les autres cas comme $U = (Z, U_2, U_3, \dots, U_{n-1})$ et $W = (X, U_2, U_3, \dots, U_{n-1})$ se démontrent de la même façon.

DÉMONSTRATION . — Pour démontrer le lemme, on construit une bijection $\Phi : f \mapsto g$ de l'ensemble A_n^U sur A_n^W telle que $V^U(f) = V^W(g)$.

Pour les deux premières colonnes, le dessin suivant montre le changement d'évaluation :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} X \\ x \ x \\ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \\ z \ y \\ 1 \ 2 \end{array} \\
 V^U =
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} X \quad Z \quad Y \\ \\ \\ z \ y \end{array} \\

 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} Y \\ y \ y \\ 1 \ 1 \\ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \\ x \ z \\ 1 \ 2 \end{array} \\
 V^W =
 \end{array}$$

On constate donc que pour $4 \leq j \leq 2n - 2$, on a dans tous les cas $V^U(2, j) = V^W(1, j)$.

L'application g est ainsi définie :

- (i) $g(i) = f(i)$ pour $3 \leq i \leq 2n$;
- (ii) si $(1, f(1)) \in B_2^U$, on pose $g(2) = f(1)$ et

$$g(1) = \begin{cases} 2n, & \text{si } f(2) = 2; \\ 2, & \text{si } f(2) = 2n; \\ f(2), & \text{dans les autres cas;} \end{cases}$$

(iii) Si $(1, f(1)) \notin B_2^U$, on a $(2, f(2)) \in B_2^U$ par U -surjectivité, on pose alors

$$g(1) = \begin{cases} 2, & \text{si } f(1) = 2n; \\ f(1), & \text{sinon;} \end{cases}$$

et

$$g(2) = \begin{cases} 2n, & \text{si } f(2) = 2; \\ f(2), & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'inverse de cette construction est assurée par les faits que dans le cas (ii) on a toujours $(2, g(2)) \in B_2^U$, et dans le cas (iii) on a $(2, g(2)) \notin B_2^U$.

On vérifie, en distinguant plusieurs cas simples, que $f \mapsto g$ est une bijection ayant bien la propriété $V^U(f) = V^W(g)$ désirée. \square

LEMME 3.4. — *Le changement de deux lettres consécutives dans une suite ne change pas la fonction génératrice associée à cette suite.*

Nous donnons ci-après la démonstration seulement dans le cas où $U = (U_1, U_2, \dots, U_r = X, U_{r+1} = Y, \dots, U_{n-1})$ et $W = (U_1, U_2, \dots, U_r = Y, U_{r+1} = X, \dots, U_{n-1})$. Les autres cas comme $U = (U_1, U_2, \dots, U_r = Z, U_{r+1} = Y, \dots, U_{n-1})$ et $W = (U_1, U_2, \dots, U_r = Y, U_{r+1} = Z, \dots, U_{n-1})$ se démontrent de la même façon.

DÉMONSTRATION . — Pour démontrer le lemme, on construit une bijection $\Psi : f \mapsto g$ de l'ensemble A_n^U sur A_n^W telle que $V^U(f) = V^W(g)$.

Pour $i \geq 2r + 3$, on pose toujours $g(i) = f(i)$. Puisque pour $i \leq 2r - 2$, on a $V^U(i, 2r + 2) = V^W(i, 2r)$ et $V^U(i, 2r) = V^W(i, 2r + 2)$, on peut poser

$$g(i) = \begin{cases} 2r, & \text{si } f(i) = 2r + 2; \\ 2r + 2, & \text{si } f(i) = 2r; \\ f(i), & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En résumé, les valeurs de g dans la ligne $2r$ et $2r + 2$ sont déterminées de façon naturelle à partir de ceux de f dans la ligne $2r + 2$ et $2r$ respectivement. Et pour les quatre colonnes restantes, le changement d'évaluation est représenté par le dessin suivant :

$$V^U = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & Y \\ \hline x & x & y & y \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & x & z \\ \hline z & y & & \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 2r-1 & 2r & 2r+1 & 2r+2 \end{array} \end{array} \implies V^W = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Y & X \\ \hline y & y & x & x \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & z & y \\ \hline x & z & & \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 2r-1 & 2r & 2r+1 & 2r+2 \end{array} \end{array}$$

(i) Si $f(2r) \neq 2r + 2$, alors les valeurs de g dans les colonnes $2r - 1, 2r, 2r + 1$ et $2r + 2$ sont déterminées de façon naturelle par celles de f dans les colonnes $2r + 1, 2r + 2, 2r - 1$ et $2r$, respectivement.

(ii) Si $f(2r) = 2r + 2$, alors les valeurs de g dans les colonnes $2r - 1, 2r, 2r + 1$ et $2r + 2$ sont déterminées de façon naturelle par celles de f dans les colonnes $2r, 2r + 2, 2r - 1$ et $2r + 1$, respectivement. Remarquons que dans ce cas, les valeurs de f pour les lignes $2r - 1, 2r + 1$ et $2r + 2$ sont assez arbitraires puisque $(2r, f(2r)) \in B_{2r} \cap B_{2r+2}$.

L'inverse de cette construction est assurée par les faits que dans le cas (i) on a toujours $g(2r - 1) \neq 2r + 2$, et dans le cas (ii) on a $g(2r - 1) = 2r + 2$.

On vérifie que $f \mapsto g$ est une bijection conservant l'évaluation. \square

Le lemme 3.2 dit que le théorème 2.1 est vrai pour la suite $U = (X, X, \dots, X)$. Par les lemmes 3.3 et 3.4, le théorème 2.1 est alors vrai pour toute suite U arbitraire.

REMARQUE . — Une autre interprétation combinatoire des nombres de Genocchi est celle des *applications excédantes alternantes* de l'article [DumVie]. Il est difficile de trouver une démonstration analogue pour ce résultat. Bien que le lemme 3.1 existe toujours, on ne voit pas comment décomposer l'ensemble des couples (E, f) en trois classes satisfaisantes, comme dans le lemme 3.2.

4. Un codage pour les applications excédantes surjectives

Le fait que les polynômes $F_n(x, y, z)$ sont symétriques en les trois variables x, y, z peut être établi de la façon suivante : En prenant la suite $U = (X, X, \dots, X)$, on obtient $A_n^U = A_n$ et $\max^U = \max$, $\text{fix}^U = \text{fix}$ et $\text{sur}^U = \text{sur}$. Si l'on prend la suite $U = (Y, Y, \dots, Y)$, on a, en revanche, $A_n^U = A_n$ et $\max^U = \text{sur}$, $\text{fix}^U = \max$ et $\text{sur}^U = \text{fix}$. D'où $F_n(x, y, z) = F_n(y, z, x)$.

D'autre part, soit $f \in A_n$, on définit une involution $f \mapsto f'$ telle que $f'(2i) = f(2i - 1)$ et $f'(2i - 1) = f(2i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Cette involution montre que $F_n(x, y, z) = F_n(x, z, y)$. Par conséquent, le polynôme $F_n(x, y, z)$ est symétrique en les trois variables x, y, z .

En comparant le théorème 1.2 et le théorème 2.1 dans le cas particulier où $U = (X, X, \dots, X)$, on voit qu'il doit exister une bijection de A_n sur A_n qui envoie les statistiques "max", "fix" et "sur" sur les statistiques "max", "fix" et "sai". Notre propos final est de construire une telle bijection, qui est, en fait, une involution. Auparavant, nous donnons un *codage* pour les applications excédantes surjectives de $[2n]$ sur $2[n]$.

Notons \mathcal{D} l'ensemble de tous les mots ayant les lettres 0 et 1. Soit $m \in \mathcal{D}$, la longueur de m et le nombre de lettres α dans m sont notés respectivement $|m|$ et $|m|_\alpha$.

Soit n un entier positif. Notons \mathcal{D}_n l'ensemble de toutes les suites de mots $(d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$ satisfaisant les conditions

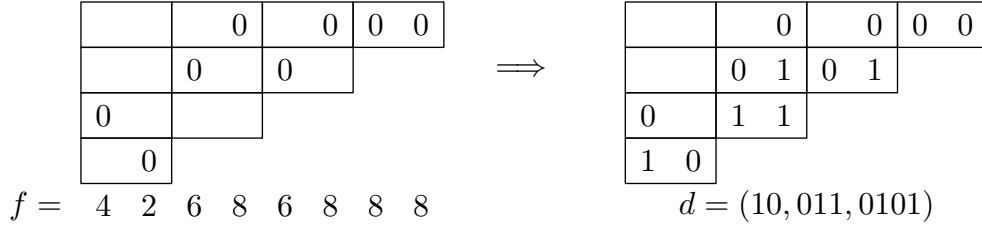
- C1) $|d_1| = 2$;
- C2) $|d_i| = |d_{i-1}|_1 + 2$ pour $2 \leq i \leq n - 1$;
- C3) $|d_i|_0 \geq 1$ pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Par exemple, la suite $(10, 011, 0101)$ est un élément de \mathcal{D}_4 . D'après les travaux de Dumont-Foata [DumFoa], on peut tirer ici explicitement une bijection $f \mapsto d$ entre A_n et \mathcal{D}_n ; la suite d est appelée *codage* de l'application f . Par exemple, le codage de l'application $f = 42686888$ est la suite $d = (10, 011, 0101)$. Ce codage est construit de la façon suivante :

1) Dessiner le graphe de l'application f dans un escalier pair en mettant des lettres 0 sur les points $(i, f(i))$;

2) Ajouter des lettres 1 de sorte que chaque colonne lue de haut en bas contienne une suite maximale de la forme 011...1;

3) Lire les nombres écrits, ligne par ligne, de bas en haut et de gauche à droite. Pour $1 \leq i \leq n-1$, d_i correspond à la ligne de hauteur i .



Nous remarquons que ce codage peut être étendu à l'ensemble de toutes les applications définies sur l'escalier pair en supprimant simplement la condition C3) dans la définition de l'ensemble \mathcal{D}_n .

D'après cette définition, on a les propriétés suivantes :

LEMME 4.1 . — Soit d le codage de l'application f . Alors on a

- 1) $\max(f) = |d_{n-1}|_1$;
 - 2) $\text{fix}(f) = \#\{i \mid d_i = m0\}$;
 - 3) $\text{sur}(f) = \#\{i \mid d_i = m0\alpha\}$;
 - 4) $\text{sai}(f) = \#\{i \mid d_i = 0m\}$;
- où $|\alpha| = 1$ et $m \in \mathcal{D}$. \square

Nous définissons maintenant une involution $\mathbf{i}_{\alpha\beta} : m \mapsto \hat{m}$ sur \mathcal{D} . Si $|m| = 2$, on pose $\hat{m} = m$; sinon, m peut s'écrire sous la forme $m = \alpha m' \beta \gamma$ où $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1, m' \in \mathcal{D}$, et on pose alors $\hat{m} = \beta m' \alpha \gamma$. Remarquons que cette involution ne change pas la longueur et le nombre de 1. Cette définition peut être prolongée à tout l'ensemble \mathcal{D}_n d'une façon naturelle :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_n & \xrightarrow{\mathbf{i}_{\alpha\beta}} & \mathcal{D}_n \\
 d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1}) & \longmapsto & \hat{d} = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_{n-1})
 \end{array}$$

THÉORÈME 4.2. — Il existe une involution $\mathbf{i}_{\alpha\beta} : f \mapsto \hat{f}$ sur A_n telle que :

- 1) $\max(f) = \max(\hat{f})$;
- 2) $\text{fix}(f) = \text{fix}(\hat{f})$;
- 3) $\text{sur}(f) = \text{sai}(\hat{f})$;
- 4) $\text{sai}(f) = \text{sur}(\hat{f})$.

DÉMONSTRATION. — Soient $f \in A_n$ et $d \in \mathcal{D}_n$ le codage de f . Par l'involution précédente, on obtient une autre suite \hat{d} ; l'application \hat{f} vient alors du codage \hat{d} . D'après le lemme précédent, on peut vérifier que les quatre relations pour les statistiques sont satisfaites. \square

Par exemple, si on prend l'application $f = 42686888$, alors, son codage est la suite $d = (10, 011, 0101)$; d'où, $\hat{d} = (10, 101, 0101)$ et $\hat{f} = 62486888$. On peut vérifier que $\max(f) = \max(\hat{f}) = 2$, $\text{fix}(f) = \text{fix}(\hat{f}) = 1$, $\text{sur}(f) = \text{sai}(\hat{f}) = 1$ et $\text{sai}(f) = \text{sur}(\hat{f}) = 2$.

On peut également définir deux autres involutions $\mathbf{i}_{\alpha\gamma}$ et $\mathbf{i}_{\beta\gamma}$ sur \mathcal{D} . Si $|m| = 2$ ou $m = \alpha\gamma$ avec $|\alpha| = |\gamma| = 1$, on pose $\mathbf{i}_{\alpha\gamma}(m) = \mathbf{i}_{\beta\gamma}(m) = \gamma\alpha$; sinon, on décompose $m = \alpha m' \beta \gamma$ comme dans le cas de l'involution $\mathbf{i}_{\alpha\beta}$, et on pose

$$\mathbf{i}_{\alpha\gamma}(m) = \gamma m' \beta \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{i}_{\beta\gamma}(m) = \alpha m' \gamma \beta.$$

En utilisant la même procédure que dans le théorème précédent, on retrouve deux autres propriétés de symétrie :

PROPOSITION 4.3 (DUMONT-FOATA). — *Il existe une involution $\mathbf{i}_{\alpha\gamma} : f \mapsto \hat{f}$ sur A_n telle que : 1) $\max(f) = \max(\hat{f})$; 2) $\text{fix}(f) = \text{sai}(\hat{f})$; 3) $\text{sai}(f) = \text{fix}(\hat{f})$. \square*

PROPOSITION 4.4. — *Il existe une involution $\mathbf{i}_{\beta\gamma} : f \mapsto \hat{f}$ sur A_n telle que : 1) $\max(f) = \max(\hat{f})$; 2) $\text{fix}(f) = \text{sur}(\hat{f})$; 3) $\text{sur}(f) = \text{fix}(\hat{f})$. \square*

BIBLIOGRAPHIE

- [And] ANDRÉ (D.). — Sur les permutations alternées, *J. Math. Pures Appl.*, **7** (1881), pp. 167-187.
- [Car1] CARLITZ (L.). — A conjecture concerning Genocchi numbers, *K. Norske Vidensk. Selsk. Sk.*, **9** (1972), pp. 1-4.
- [Car2] CARLITZ (L.). — Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomial, *Discrete Math.*, **30** (1980), pp. 211-225.
- [Dum] DUMONT (D.). — Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke math. J.*, **41(2)** (1974), pp. 305-318.
- [DumFoa] DUMONT (D.) ET FOATA (D.). — Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull. Soc. math. France*, **104** (1976), pp. 433-451.
- [DumVie] DUMONT (D.) ET VIENNOT (G.). — A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Annals of Discrete Mathematics*, **6** (1980), pp. 77-87.
- [FoaSch] FOATA (D.) ET SCHÜTZENBERGER (M. -P.). — Nombres d'Euler et permutations alternantes, *A survey of Combinatorial Theory*, (J.N. Srivastava, Ed.), North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [Gan] GANDHI (J. M.). — A conjectured representation of Genocchi numbers, *Am. Math. Monthly*, **77(1)** (1970), pp. 505-506.
- [Rio] RIORDAN (J.) ET STEIN (P.). — Proof of a conjecture on Genocchi numbers, *Discrete Math.*, Amsterdam, **5** (1973), pp. 381-388.

I.R.M.A. UMR 7501
Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg, France
guoniu@math.u-strasbg.fr