C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **314**(1992), 969–971

Une courte démonstration d'un résultat sur la Z-statistique

Guo-Niu HAN

RÉSUMÉ. — BRESSOUD et ZEILBERGER ont introduit la Z-statistique et démontré d'une façon analytique qu'elle est mahonienne. Puis GREENE a donné une bijection de style “MacMahon” en utilisant le principe d'involution de Garsia-Milne. Cette Note fournit une démonstration directe en établissant une bijection de style “Foata” sur l'ensemble des réarrangements d'un mot donné.

A short proof of a resultat on the Z-statistic

ABSTRACT. — BRESSOUD and ZEILBERGER introduced the Z-statistic and gave an analytical proof of the fact that it was mahonian. Then GREENE derived a “MacMahon” style bijection by using the Garsia-Milne involution principle. This Note provides a direct proof of that fact by means of a “Foata” style bijection over the rearrangement set of a given word.

1. Introduction

Pour démontrer la conjecture de q-Dyson proposée par ANDREWS [1], BRESSOUD et ZEILBERGER [2] ont introduit la Z-statistique définie pour les mots et démontré d'une façon analytique que cette statistique était mahonienne. Pour établir ce dernier fait, GREENE [3] a donné une *bijection de style “MacMahon”* en utilisant le principe d'involution de Garsia-Milne. Enfin, BRESSOUD [4] a indiqué plusieurs voies possibles pour construire une bijection directe, mais sans obtenir de résultats explicites. Le but de cette Note est de donner la construction d'une telle bijection.

2. Notations

Soient $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ un alphabet totalement ordonné et A^* le monoïde libre engendré par A. Les éléments de A^* sont appelés *mots*. On note $|w|_i$ le nombre d'occurrences de la lettre i dans le mot w, la somme de tous ces nombres étant la *longueur* de w, notée $|w|$. L'*évaluation* d'un mot w est l'image de ce mot par le morphisme naturel de A^* sur le monoïde commutatif libre de même base, i.e., $1^{|w|_1} 2^{|w|_2} \dots r^{|w|_r}$. La suite des entiers $\mathbf{m} = (|w|_1, |w|_2, \dots, |w|_r)$ est dite *multiplicité* du mot w ; et l'ensemble des mots de multiplicité $\mathbf{m}$ est noté $R(\mathbf{m})$. Les mots ayant la même multiplicité que w sont appelés *réarrangements* du mot w.

L'*indice majeur* est défini, pour tout mot $w = x_1 x_2 \dots x_l$, par

$$\operatorname{maj} w = \sum \{ i \mid 1 \le i \le l-1,\ x_i > x_{i+1} \},$$

et la Z-statistique par

Note présentée par Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER.

$$Z(w) = \sum_{i<j} \operatorname{maj} w_{ij},$$

où w_{ij} est le sous-mot de w composé de toutes les lettres i et j. Par exemple, pour $w = 2412131242 \in R(3,4,1,2)$, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{maj} w &= 2+4+6+9 = 21, \quad \text{et} \\
Z(w) &= \operatorname{maj}(2121122) + \operatorname{maj}(1131) + \operatorname{maj}(41114) + \\
&\qquad + \operatorname{maj}(22322) + \operatorname{maj}(242242) + \operatorname{maj}(434) \\
&= 4+3+1+3+7+1 = 19.
\end{aligned}$$

Une bijection sur A^* est dite *de style "Foata"*, si elle est de la forme suivante (*cf.* [5]) :

$$\begin{cases} \Phi(w) = w, & \text{si } |w| \le 1\,; \\ \Phi(wx) = (\gamma_x \circ \Phi \circ \beta_x(w))x, & \text{pour toute lettre } x \in A\,; \end{cases}$$

où pour x fixé, γ_x et β_x sont deux bijections sur A^* telles que $\gamma_x \circ \Phi \circ \beta_x(w)$ est un réarrangement de w.

Le problème est de construire une bijection de style "Foata" ayant la propriété suivante (*cf.* [2], [3], [4], [6]) :

$$(\Delta) \qquad \operatorname{maj} w = Z(\Phi(w)).$$

3. Cyclage global et cyclage local

Soit $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_r)$ une multiplicité. Pour tout mot $w = x_1 x_2 \cdots x_l \in R(\mathbf{m}) \subset A^*$ et toute lettre $x \in A$, le *cyclage global* $C^x(w) = y_1 y_2 \cdots y_l$ et le *cyclage local* $C_x(w) = z_1 z_2 \cdots z_l$ sont définis par

$$y_i = \begin{cases} x_i - x, & \text{si } x_i > x\,; \\ x_i - x + r, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad z_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } x_i < x\,; \\ x_i - 1, & \text{si } x_i > x\,; \\ r, & \text{si } x_i = x. \end{cases}$$

On vérifie facilement que la multiplicité de $C^x(w)$ et $C_x(w)$ est respectivement

$$\mathbf{m}^x = (m_{x+1}, m_{x+2}, \cdots, m_r, m_1, m_2, \cdots, m_{x-1}, m_x)$$

et

$$\mathbf{m}_x = (m_1, m_2, \cdots, m_{x-1}, m_{x+1}, m_{x+2}, \cdots, m_r, m_x).$$

Par ces deux opérations de cyclage, les changements de valeur des statistiques sont décrits dans le lemme suivant :

Lemme. — *Avec les notations précédentes, si $x = x_l$ la dernière lettre du mot w, alors on a*

(a) $\operatorname{maj} w - \operatorname{maj}(C^x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$;

(b) $Z(w) - Z(C_x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$.

Prenons encore l'exemple précédent. On a : $x = x_l = 2$ et $r = 4$. Le cyclage global est donc $C^x(w) = 4234313424$ et le cyclage local $C_x(w) = 4214121434$. Or $\operatorname{maj} C^x(w) = 18$ et $Z(C_x(w)) = 16$. Comme $m_2 + m_4 = 1 + 2 = 3$, le lemme est bien vérifié pour ce mot.

Démonstration

(a) Avec les notations précédentes, on décompose le mot w de façon unique comme suit

$$w = p_0 q_1 p_1 q_2 p_2 \ldots q_s p_s,$$

où les p_i sont des mots dont toutes lettres sont inférieures ou égales à x et où les q_i sont des mots dont toutes les lettres sont plus grandes que x, avec $|p_i| \geq 1$, $|q_i| \geq 1$ pour tout $i \geq 1$ et $|p_0| \geq 0$. Or la dernière lettre de chaque facteur p_i (resp. q_i) est inférieure (resp. supérieure) à la première lettre du facteur suivant q_{i+1} (resp. p_i). On dit qu'il y a une *montée* à la fin du facteur p_i et une *descente* à la fin du facteur q_i. Dans le mot $C^x(w)$, ces montées deviennent des descentes et les descentes des montées, les autres montées ou descentes restant invariantes. On a donc

$$\operatorname{maj} w - \operatorname{maj}(C^x(w)) = |q_1| + |q_2| + \cdots + |q_s| = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r \ .$$

(b) Soit $a \in A$ une lettre apparaissant dans le mot w, on note a' l'image de a par le cyclage local C_x. Pour tout $i < j$, si $i \neq x$, les sous-mots w_{ij} et $(C_x w)_{i'j'}$ sont identiques à la réduction près. D'autre part, pour tout $x < j$, on a, d'après (a), $\operatorname{maj} w_{xj} - \operatorname{maj}(C^x w)_{x'j'} = m_j$. Comme les deux cyclages sont identiques à la réduction près pour les mots à deux lettres, on a :

$$\begin{aligned} Z(w) - Z(C_x(w)) &= \sum_{x<j} \big(\operatorname{maj}(w_{xj}) - \operatorname{maj}((C_x w)_{x'j'})\big) \\ &= m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r \ . \quad \square \end{aligned}$$

4. Construction de la bijection Φ

Soient $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ une multiplicité et $\mathbf{n}$ un réarrangement de $\mathbf{m}$ vu comme un mot. Rappelons d'abord la construction d'une bijection $\theta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, définie sur $R(\mathbf{m})$, à valeurs dans $R(\mathbf{n})$, conservant la statistique "maj". Il suffit de donner cette construction lorsque $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ ne diffèrent que par deux lettres *consécutives*, disons x et y, autrement dit la construction d'une bijection

$$\theta : R(m_1, m_2, \ldots, m_x, m_y, \ldots, m_r) \to R(m_1, m_2, \ldots, m_y, m_x, \ldots, m_r).$$

On s'y prend comme suit : soit w un mot du premier ensemble. On remplace tous les facteurs yx de ce mot par une lettre spéciale "$\sim$". Dans le mot ainsi obtenu, les facteurs *maximaux* contenant les deux lettres x et y ont la forme $x^a y^b$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$). On change alors ces facteurs en $x^b y^a$ et remplace chaque "$\sim$" par yx, pour obtenir le mot w' du second ensemble.

Par exemple, pour $w = 122322233243213$, $x = 2$ et $y = 3$, on obtient successivement :

$$\begin{array}{rcl} w & = & 122322233243213 \\ & \longmapsto & 122\sim223\sim4\sim13 \\ & \longmapsto & 133\sim233\sim4\sim12 \\ & \longmapsto & 133322333243212 = w' \ ; \end{array}$$

On a $w \in R(2, 7, 5, 1)$ et $w' \in R(2, 5, 7, 1)$.

La bijection cherchée Φ est définie, pour tout mot $w \in R(\mathbf{m})$ et toute lettre x, par la composition suivante :

$$\Phi(wx) = \big((C_x)^{-1} \circ \Phi \circ \theta_{\mathbf{m}^x, \mathbf{m}_x} \circ C^x(w)\big)x \ .$$

On vérifie bien que $\Phi(wx)$ est un réarrangement de wx et que la relation (Δ) est satisfaite.

L'exploitation des techniques utilisées dans cette Note sera publiée ultérieurement.

Réféfences bibliographiques

[1] G. E. Andrews. — Problems and prospects for basic hypergeometric function, *Theory and Applications of Special Functions*, Edité par R. A. Askey, 1975, Academic Press, New York, p. 191–224.

[2] D. Zeilberger et D. M. Bressoud . — A proof of Andrews' q-Dyson conjecture, *Discrete Math.*, **54** (1985), pp. 201–224.

[3] J. Greene. — Bijections related to statistics on words, *Discrete Math.*, **68** (1988), pp. 15–29.

[4] D. M. Bressoud. — Problems on the Z-statistic, *Discrete Math.*, **73** (1988), pp. 37–48.

[5] D. Foata. — On the Netto inversion number of a sequence, *Proc. Amer. Math. Soc*, **19** (1968), pp. 236–240.

[6] D. Zeilberger. — Dans *Séance de problèmes*, *Combinatoire énumérative*, Lecture Notes in Mathematics, Edité par G. Labelle et P. Leroux, 1986, Springer-Verlag, t. **1234**, p. 387.

UFR de mathématique et d'informatique
7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg