Advances in Mathematics, **1** (1994) 26–41

UNE TRANSFORMATION FONDAMENTALE SUR LES RÉARRANGEMENTS DE MOTS

Guo-Niu Han

I.R.M.A. et Département de mathématique
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg

Résumé. — Foata et Zeilberger ont démontré que la statistique de Denert "den" associée au nombre d'excédances "exc" était Euler-mahonienne sur le groupe symétrique. On prolonge ici ce résultat au cas des mots quelconques (avec répétitions), en construisant explicitement une transformation sur les classes de réarrangements, ayant la propriété que la bistatistique "nombre de descentes – indice majeur" du mot transformé a même valeur que la bistatistique (exc, den) du mot initial. Cette nouvelle transformation peut être vue comme le q-analogue de la transformation fondamentale donnée par Cartier et Foata qui faisait seulement correspondre nombre d'excédances et nombre de descentes.

Abstract. — Foata and Zeilberger have proved that the Denert statistic "den" when associated with the exceedance number "exc" was Euler-mahonian on the symmetric group. This result is extended to the case of arbitrary words (with repetitions). A fundamental transformation on the rearrangement classes is explicitly constructed and has the property that the bistatistic "descent number – major index" of the transformed word has the same value as the bistatistic (exc, den) of the initial word. This new transformation can be viewed as the q-analog of the fundamental transformation given by Cartier and Foata that associated the univariable exceedance number and descent number statistics in a one-to-one manner.

1. Introduction

Soient A un alphabet totalement ordonné et A^* le monoïde libre engendré par A. Si $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ est un mot du monoïde A^*, de longueur m, on appelle *réarrangement* de w tout mot $u = \alpha_{\sigma_1}\alpha_{\sigma_2}\cdots\alpha_{\sigma_m}$, où σ est une permutation appartenant à $\mathfrak{S}_m$. On note $R(w)$ la classe de tous les réarrangements du mot w. Enfin, au mot w on fait correspondre son réarrangement croissant, noté $\overline{w}$, encore appelé son *redressement*, qui est le plus petit mot de $R(w)$ pour l'ordre lexicographique.

Rappelons que le *nombre d'inversions*, le *nombre de descentes*, l'*indice majeur*, et le *nombre d'excédances* peuvent être définis, non seulement pour les permutations, mais aussi pour les mots quelconques. Soient $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ un mot et $\overline{w} = x_1x_2\cdots x_m$ le redressement de w. Ces statistiques sont définies, classiquement par (*cf.* [Fo1]) :

$$\begin{aligned}\operatorname{inv} w &= \#\{i < j \mid \alpha_i > \alpha_j\},\\ \operatorname{des} w &= \#\{i \mid 1 \le i \le n-1,\ \alpha_i > \alpha_{i+1}\},\\ \operatorname{maj} w &= \sum\{i \mid 1 \le i \le n-1,\ \alpha_i > \alpha_{i+1}\},\\ \operatorname{exc} w &= \#\{i \mid 1 \le i \le n,\ \alpha_i > x_i\}.\end{aligned}$$

où le symbole "#" désigne le cardinal d'un ensemble.

Pour rendre compte des travaux de Denert [Den] sur le calcul des fonctions zêta attachées aux structures d'ordre de certaines algèbres simples, Foata et Zeilberger ont trouvé une forme explicite pour la statistique "den" de Denert définie sur les seules permutations, et démontré que la paire $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})$ était euler-mahonienne, i.e., avait même distribution que la paire $(\operatorname{des}, \operatorname{maj})$ sur le groupe symétrique [F-Z]. (Voir encore [Ha1, Ha2] pour deux démonstrations combinatoires.)

Le résultat principal de cet article est de prolonger la définition de la statistique "den" au cas des mots quelconques et de démontrer que $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})$ est euler-mahonienne sur l'ensemble $R(w)$ de tous les réarrangements d'un mot *quelconque* w.

Donnons d'abord la définition de cette nouvelle statistique "den" dans le cas général. Soient $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ un mot et $\overline{w} = x_1x_2\cdots x_m$ son redressement. Si $1 \le i \le m$, on dit que i est une *place d'excédance* ou une *place de non-excédance* pour w, suivant que l'on a $\alpha_i > x_i$ ou $\alpha_i \le x_i$. Soit $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ la suite croissante des places d'excédance et $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k}$ la suite croissante des places de non-excédance pour w ; on forme alors les sous-mots : $\operatorname{Exc} w = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}$ et $\operatorname{Nexc} w = \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_{m-k}}$. Pour donner la définition de "den," nous avons encore besoin d'une autre statistique "imv" qui désigne le *nombre d'inversions faibles* :

$$\operatorname{imv} w = \#\{i < j \mid \alpha_i \ge \alpha_j\}.$$

Définition 1.1. — Soient $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ un mot et $\overline{w} = x_1x_2\cdots x_m$ le redressement de w, on pose

$$\operatorname{den} w = \sum_i \{i \mid \alpha_i > x_i\} + \operatorname{imv} \operatorname{Exc} w + \operatorname{inv} \operatorname{Nexc} w.$$

On notera que dans cette définition on prend les inversions *faibles* pour le sous-mot des places d'excédances et les inversions *ordinaires* pour le sous-mot des places de non-excédances. Par exemple, pour le mot

$w = 3\,1\,2\,1\,2\,4\,6\,2\,6\,5\,6\,1\,7\,5$, on a $\overline{w} = 1\,1\,1\,2\,2\,2\,3\,4\,5\,5\,6\,6\,6\,7$. Puis $\mathrm{Exc}\, w = 3\,2\,4\,6\,6\,7$ et $\mathrm{Nexc}\, w = 1\,1\,2\,2\,5\,6\,1\,5$, d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{den}\, w &= (1+3+6+7+9+13) + \mathrm{imv}(3\,2\,4\,6\,6\,7) + \mathrm{inv}(1\,1\,2\,2\,5\,6\,1\,5) \\ &= 39 + 2 + 5 = 46. \end{aligned}$$

L'objet principal de cet article est de donner, pour tout mot u, la construction d'une nouvelle transformation fondamentale, c'est-à-dire, la construction d'une bijection $w \mapsto \widetilde{w}$ de $R(u)$ sur lui-même satisfaisant

$$\mathrm{des}\, w = \mathrm{exc}\, \widetilde{w}\,; \qquad \mathrm{maj}\, w = \mathrm{den}\, \widetilde{w}.$$

La construction d'une telle transformation entraîne le théorème suivant.

Théorème 1.2. — *Pour tout mot u,les deux paires de statistiques* (des, maj) *et* (exc, den) *sont équidistribuées sur* $R(u)$.

Ce théorème est en fait un q-analogue du résultat de MacMahon (*cf.* [MacM], [Fo1]) sur l'étude des statistiques "exc" et "maj" et un multi-analogue du résultat de Foata-Zeilberger [F-Z].

Pour la construction de cette nouvelle transformation, nous avons repris l'étude de l'algèbre des circuits telle qu'elle avait été développée par Cartier et Foata, surtout les techniques de décomposition des bimots en cycles (voir [Fo1], [C-F]). Il faut alors recourir à des transpositions de bilettres successives, dont la règle de commutation est plus complexe que dans le cas de la construction de la première transformation fondamentale.

En fait, pour ce résultat principal, nous établissons une définition équivalente de la statistique classique "maj" (voir théorème 2.1). Une autre application de cette nouvelle définition est utilisée dans [Ha3].

2. Statistiques et intervalles cycliques

Soient $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ un mot appartenant à A^*, de longueur m, et B un sous-ensemble de A. On note $w \cap B$ le sous-mot de w formé des seules lettres de w qui appartiennent à B et $|w \cap B|$ la longueur de ce sous-mot. Pour $1 \le j \le m$, le *facteur* gauche de longueur $j-1$ de w est noté :

$$\mathrm{Fact}_j\, w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{j-1}.$$

Enfin, pour $x, y \in A$, l'*intervalle cyclique* $]\!]x, y]\!]$ est défini par

$$]\!]x, y]\!] = \begin{cases} \{z \in A \mid x < z \le y\}, & \text{si } x \le y, \\ \{z \in A \mid x < z \text{ ou } z \le y\}, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Évidemment, avec ces notations, on peut écrire la statistique "inv" sous la forme

$$\mathrm{inv}\, w = \sum_{j=1}^{m} \bigl|\, \mathrm{Fact}_j\, w \cap]\!]\alpha_j, \infty]\!] \bigr|,$$

et il est remarquable que les deux autres statistiques mahoniennes peuvent aussi s'écrire sous une forme analogue.

THÉORÈME 2.1. — *Soient* $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ *un mot et* $\overline{w} = x_1x_2\cdots x_m$ *le redressement de* w*, avec la convention* $\alpha_{m+1} = \infty$*, on a :*

$$\text{(i)} \qquad \operatorname{maj} w = \sum_{j=1}^{m} \big|\operatorname{Fact}_j w \cap \rrbracket \alpha_j, \alpha_{j+1} \rrbracket\big| \ ;$$

$$\text{(ii)} \qquad \operatorname{den} w = \sum_{j=1}^{m} \big|\operatorname{Fact}_j w \cap \rrbracket \alpha_j, x_j \rrbracket\big| \ .$$

La suite $(s_j)_{1\le j\le m}$ où $s_j = \big|\operatorname{Fact}_j w \cap \rrbracket \alpha_j, \alpha_{j+1} \rrbracket\big|$ (resp. $s_j = \big|\operatorname{Fact}_j w \cap \rrbracket \alpha_j, x_j \rrbracket\big|$, resp. $s_j = \big|\operatorname{Fact}_j w \cap \rrbracket \alpha_j, \infty \rrbracket\big|$) est appelée aussi *maj-codage* (resp. *den-codage*, resp. *inv-codage*). On peut remarquer que le "inv-codage" ainsi défini n'est autre que le codage classique de Lehmer pour les mots.

En reprenant l'exemple $w = 3\,1\,2\,1\,2\,4\,6\,2\,6\,5\,6\,1\,7\,5$ de la première section, on a $\alpha_{14} = 5, x_{14} = 7$, et

$$s_{14} = \big|\operatorname{Fact}_{14} w \cap \rrbracket 5, 7 \rrbracket\big| = \big|3\,1\,2\,1\,2\,4\,6\,2\,6\,5\,6\,1\,7 \cap \{6,7\}\big| = \big|6\,6\,6\,7\big| = 4.$$

De la même façon, en calculant tous les s_j pour $1 \le j \le 14$, on obtient le den-codage de ce mot, à savoir $(0,0,2,1,0,4,5,2,7,0,0,9,12,4)$. La somme de tous ses éléments est exactement $\operatorname{den} w = 46$. D'autre part, pour $w = 3\,1\,1\,2\,6\,4\,2\,2\,6\,6\,5\,1\,7\,5$, le maj-codage est le vecteur $(0,0,0,1,4,4,0,3,0,7,\ 5,9,9,4)$. On peut vérifier que la somme de tous ses éléments est $\operatorname{maj} w = 46$.

La seconde partie du théorème a été démontrée, dans le cas des permutations, par FOATA et ZEILBERGER (*cf.* [F-Z], voir aussi [Cla]), et la première partie semble nouvelle.

DÉMONSTRATION. — Pour la partie (i), posons $w' = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}$. On note $(s_j)_{1\le j<m}$ et $(s'_j)_{1\le j<m-1}$ les maj-codages de w et de w' respectivement, il est clair qu'on a $s_j = s'_j$ pour tout $j < m-1$. Ainsi, par récurrence sur la longueur des mots, il suffit de montrer que

$$s_m + s_{m-1} - s'_{m-1} = \operatorname{maj} w - \operatorname{maj} w' = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_{m-1} \le \alpha_m, \\ m-1, & \text{si } \alpha_{m-1} > \alpha_m. \end{cases}$$

Ceci est satisfait d'après la définition de s_j.

Pour la seconde partie du théorème, on définit la *standardisation* qui est un morphisme $w \mapsto \sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$ défini sur $R(w)$, à valeurs dans $\mathfrak{S}_m$ et qui satisfait les conditions suivantes :

(1) Si $x, y \in [m]$ sont deux places quelconques, alors $\alpha_x > \alpha_y \Longrightarrow \sigma_x > \sigma_y$;

(2) Si x est une place excédante et y une place non-excédante, ou si $x < y$ sont deux places excédantes, alors $\alpha_x = \alpha_y \Longrightarrow \sigma_x > \sigma_y$;

(3) Si $x < y$ sont deux places non-excédantes, alors $\alpha_x = \alpha_y \Longrightarrow \sigma_x < \sigma_y$.

On peut vérifier que la standardisation conserve la statistique "den" (mais pas le den-codage !), et le problème général se ramène au cas des permutations. $\square$

D'après ce théorème, on note que les deux statistiques "maj" et "den" sont très semblables. La seule différence est que "maj" se calcule *horizontalement* et "den" *verticalement.*

3. Mots, bimots et produit contextuel

On sait que, pour tout mot, il existe un seul redressement. Classiquement, ce redressement peut être obtenu par une suite de transpositions sur le mot original. Si, en effet, $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ est un mot de longueur m, on définit, pour tout $r = 1, \ldots, m-1$, la *transposition* $T_r : R(w) \to R(w)$, comme étant la transformation envoyant le mot w sur le mot

$$T_r(w) = \alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}\alpha_{r+1}\alpha_r\alpha_{r+2} \ldots \alpha_m.$$

Soit l le nombre d'inversions de w. La suite $\mathbf{r} = r_1r_2 \ldots r_l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}^*$ est appelée *route* de w, si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $T_{r_1}T_{r_2}\cdots T_{r_l}(w) = \overline{w}$,

(ii) Son retournement $r_lr_{l-1} \ldots r_2r_1$ est le plus petit mot possible pour l'ordre lexicographique.

On pose alors $T_\mathbf{r} = T_{r_1}T_{r_2}\cdots T_{r_l}$. Comme $T_\mathbf{r}(w) = \overline{w}$, cette composition des transpositions $T_\mathbf{r}$ est appelée aussi *redressement.*

Désignons par $M(A)$ le monoïde libre engendré par le produit cartésien $A \times A$. Les éléments $\mathbf{w} = \binom{u}{w} \in M(A)$, où u et w sont deux mots de même longueur, sont appelés *bimots.* Le mot u (resp. w) est dit premier (resp. second) mot de $\mathbf{w}$. Un bimot de longueur 1 est appelé *bilettre.* Pour étendre aux bimots du monoïde $M(A)$ les opérations précédentes comme la transposition, le redressement, ... , on introduit une notion de voisinage entre lettres comme décrit dans la définition suivante.

Définition 3.1 . — Soient $x, y, \alpha, \beta \in A$. Les deux éléments x et y divisent l'ensemble A en deux "segments" *cycliques* $U = \rrbracket y, x\rrbracket$ et V le complément de U. On dit que α et β sont *voisins* relativement à (x, y), s'ils appartiennent au même segment U ou V ; et qu'ils sont en *face* sinon.

En considérant tous les ordres mutuels possibles des grandeurs x, y, α et β, on vérifie sans difficulté les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2. — *En conservant les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) α *et* β *sont voisins relativement à* (x, y) *;*

(ii) $\left|\alpha \cap \rrbracket y, x\rrbracket\right| = \left|\beta \cap \rrbracket y, x\rrbracket\right|$ *;*

(iii) α *et* β *sont voisins relativement à* (y, x) *;*

(iv) $\left|\alpha \cap \rrbracket \beta, y\rrbracket\right| = \left|\alpha \cap \rrbracket \beta, x\rrbracket\right|$ *;*

(v) $\rrbracket \alpha, x\rrbracket \uplus \rrbracket \beta, y\rrbracket = \rrbracket \alpha, y\rrbracket \uplus \rrbracket \beta, x\rrbracket$ *; où l'opération* $\uplus$ *est l'union pour les multi-ensembles. Par exemple,* $\{1, 1, 2\} \uplus \{2, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$.

Lemme 3.3. — *En conservant les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) α *et* β *sont en face relativement à* (x, y) *;*

(ii) $\left|\alpha \cap \rrbracket y, x\rrbracket\right| = 1 - \left|\beta \cap \rrbracket y, x\rrbracket\right|$ *;*

(iii) α *et* β *sont en face relativement à* (y, x) *;*

(iv) $\left|\alpha \cap \rrbracket \beta, y\rrbracket\right| = \left|\beta \cap \rrbracket \alpha, x\rrbracket\right|$.

Les propriétés décrites dans ces lemmes seront utilisées dans la section 5 pour calculer les statistiques "exc" et "den".

L'extension de la notion de transposition pour les bimots se fait comme suit.

Définition 3.4 . — Soit $\binom{x\ y}{\alpha\ \beta} \in A^4$ un bimot de longueur 2, ou encore une suite de deux bilettres. La *transposition contextuelle* de ces bilettres est définie par

$$T\binom{x\ y}{\alpha\ \beta} = \begin{cases} \binom{y\ x}{\alpha\ \beta}, & \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont voisins relativement à } (x, y)\,; \\ \binom{y\ x}{\beta\ \alpha}, & \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont en face relativement à } (x, y). \end{cases}$$

Par exemple, pour $A = [8]$, $x = 6$ et $y = 4$, on a $U = \{5, 6\}$ et $V = \{7, 8, 1, 2, 3, 4\}$, d'où $T\binom{6\ 4}{4\ 8} = \binom{4\ 6}{4\ 8}$ et $T\binom{6\ 4}{6\ 4} = \binom{4\ 6}{4\ 6}$.

Soient $\mathbf{w} = \binom{u}{w} = \binom{x_1 x_2 \cdots x_m}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$ un bimot de $M(A)$ de longueur m et r un entier $(1 \le r \le m-1)$. Si on applique la transposition contextuelle aux r et $(r+1)$-ièmes bilettres $\binom{x_r}{\alpha_r}$ et $\binom{x_{r+1}}{\alpha_{r+1}}$ de $\mathbf{w}$, on obtient un bimot que l'on notera $T_r(\mathbf{w})$. On remarquera que le premier mot de $T_r(\mathbf{w}) = T_r\binom{u}{w}$ est égal à $T_r(u)$.

Le lemme suivant est une conséquence des lemmes 3.2(i), (iii) et 3.3(i), (iii) et est donné sans démonstration.

Lemme 3.5. — *La transposition contextuelle est involutive.*

Désignons par $\overline{M}(A)$ le sous-ensemble de $M(A)$ formé par les bimots dont le premier mot est croissant. Si $\mathbf{r} = r_1 r_2 \cdots r_l$ est la route de u, le bimot $\overline{\mathbf{w}} = T_{\mathbf{r}}(\mathbf{w}) = T_{r_1}T_{r_2}\cdots T_{r_l}(\mathbf{w}) \in \overline{M}(A)$ est appelé *redressement* du bimot $\mathbf{w}$. En d'autres termes, le redressement d'un bimot peut s'obtenir en réarrangeant le premier mot en ordre croissant suivant sa route, et simultanément, en changeant le second mot par les transpositions contextuelles. Donnons un exemple complet.

Soit $\mathbf{w} = \binom{11234226}{31126422}$. On obtient $\overline{\mathbf{w}} = \binom{11222346}{31124622}$ par les calculs suivants :

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{2} & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} & [\text{ en face, transposer }] \\
\xrightarrow{T_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} & [\text{ voisin, inchanger }] \\
\xrightarrow{T_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{2} & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} & [\text{ voisin, inchanger }] \\
\xrightarrow{T_6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} & [\text{ voisin, inchanger }] \\
\xrightarrow{T_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{w}}. &
\end{array}
$$

La transposition contextuelle permet d'introduire sur le monoïde des bimots un nouveau *produit* $\mathbf{w} \odot \mathbf{u}$ distinct du produit de juxtaposition habituel, qu'on notera ici $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$. Cette *multiplication contextuelle* $\odot$ est définie par

$$
\begin{array}{ccc}
\overline{M}(A) \times M(A) & \xrightarrow{\ \odot\ } & \overline{M}(A) \\
(\mathbf{w}, \mathbf{u}) & \longmapsto & \mathbf{w} \odot \mathbf{u} = \overline{\mathbf{w} \times \mathbf{u}}
\end{array}
$$

Soient $\mathbf{w} \in \overline{M}(A)$ et $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M(A)$; on a évidemment $\mathbf{w} \odot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w} \odot \mathbf{u} \odot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{w} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v}}$, où $\mathbf{w} \odot \mathbf{u} \odot \mathbf{v} = (\mathbf{w} \odot \mathbf{u}) \odot \mathbf{v}$. D'après cette propriété, on peut considérer que le redressement du bimot $\mathbf{w} = \binom{x_1 x_2 \cdots x_m}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$ est en fait le produit contextuel des bilettres :

$$
\overline{\mathbf{w}} = \binom{x_1}{\alpha_1} \odot \binom{x_2}{\alpha_2} \odot \cdots \odot \binom{x_m}{\alpha_m}.
$$

La simplification est toujours une propriété fondamentale pour les "bonnes" multiplications, comme le produit de juxtaposition habituel ou la multiplication des circuits introduite par CARTIER et FOATA [Fo1]. La multiplication contextuelle a elle aussi cette propriété, comme démontré dans le théorème suivant.

Théorème 3.6 (Simplification). — *Dans tout ce théorème,* $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}'$, ... *sont des éléments de* $\overline{M}(A)$ *;* w, u, v, w', w_1, ... *des mots et* x, y, α, β, x', x_1, ... *des lettres. On a les propriétés d'équivalence suivantes :*

(i) $\binom{x}{\alpha} \odot \binom{y}{\beta} = \binom{x'}{\alpha'} \odot \binom{y}{\beta'} \Longleftrightarrow \binom{x}{\alpha} = \binom{x'}{\alpha'}$ *et* $\beta = \beta'$ *;*

(ii) $\mathbf{w} \odot \binom{y}{\beta} = \mathbf{w}' \odot \binom{y}{\beta'} \Longleftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{w}'$ *et* $\beta = \beta'$ *;*

(iii) $\mathbf{w} \odot \binom{u}{v} = \mathbf{w}' \odot \binom{u}{v'} \Longleftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{w}'$, $v = v'$ *et* $|u| = |v|$.

Démonstration. — Les parties "$\Longleftarrow$" sont évidentes; et on démontre donc les parties "$\Longrightarrow$".

(i) On a immédiatement $x = x'$. On vérifie donc cette propriété en distinguant les trois cas : $x \leq y$, $x > y$ avec α et β voisins relativement à (x, y), et $x > y$ avec α et β en face.

(ii) D'abord, par (i), la relation est juste si $|\mathbf{w}| = 1$. Pour le cas général, soient $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \times \binom{x}{\alpha}$ et $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_1' \times \binom{x}{\alpha'}$, on pose

$$\binom{x}{\alpha} \odot \binom{y}{\beta} = \binom{x_1 y_1}{\alpha_1 \beta_1} \quad \text{et} \quad \binom{x}{\alpha'} \odot \binom{y}{\beta'} = \binom{x_2 y_2}{\alpha_2' \beta_2'}.$$

D'après la définition de la multiplication contextuelle, on a

$$\mathbf{w} \odot \binom{y}{\beta} = \mathbf{w}_1 \odot \left(\binom{x}{\alpha} \odot \binom{y}{\beta} \right) = \left(\mathbf{w}_1 \odot \binom{x_1}{\alpha_1} \right) \times \binom{y_1}{\beta_1}.$$

Par le même calcul pour $\mathbf{w}' \odot \binom{y}{\beta'}$, on obtient :

$$\left(\mathbf{w}_1 \odot \binom{x_1}{\alpha_1} \right) \times \binom{y_1}{\beta_1} = \left(\mathbf{w}_1' \odot \binom{x_2}{\alpha_2'} \right) \times \binom{y_2}{\beta_2'};$$

on en déduit $y_1 = y_2,\ x_1 = x_2,\ \beta_1 = \beta_2'$ et

$$\mathbf{w}_1 \odot \binom{x_1}{\alpha_1} = \mathbf{w}_1' \odot \binom{x_2}{\alpha_2'}.$$

D'où la propriété par récurrence sur la longueur de $\mathbf{w}$.

(iii) D'abord, par (ii), la relation est juste si $|u| = 1$. Dans le cas général, soient

$$\binom{u}{v} = \binom{u_1}{v_1} \times \binom{y}{\alpha} \quad \text{et} \quad \binom{u}{v'} = \binom{u_1}{v_1'} \times \binom{y}{\beta},$$

on a $\mathbf{w}\odot\binom{u}{v} = \Big(\mathbf{w}\odot\binom{u_1}{v_1}\Big)\odot\binom{y}{\alpha}$. Par le même calcul pour $\mathbf{w}'\odot\binom{u}{v'}$, on trouve

$$\Big(\mathbf{w}\odot\binom{u_1}{v_1}\Big)\odot\binom{y}{\alpha} = \Big(\mathbf{w}'\odot\binom{u_1}{v_1'}\Big)\odot\binom{y}{\beta}.$$

D'après (ii), on a $\alpha=\beta$ et

$$\mathbf{w}\odot\binom{u_1}{v_1} = \mathbf{w}'\odot\binom{u_1}{v_1'}.$$

D'où la propriété par récurrence sur la longueur de u. $\square$

Corollaire 3.7 (bijectivité de redressement). — *Notons $M^w(A)$ l'ensemble des bimots dont le premier mot est égal à w, alors la restriction du redressement à $M^w(A)$ est bijective. Autrement dit, si w, u et v sont trois mots de même longueur, on a :*

$$\overline{\binom{w}{u}} = \overline{\binom{w}{v}} \Longleftrightarrow u = v. \quad \square$$

4. Une transformation pour les mots quelconques

Nous avons désormais tous les ingrédients nous permettant de donner la construction de la transformation fondamentale, qui nous sert à démontrer le théorème 1.2. Cette construction est tout à fait analogue à la construction de la première transformation fondamentale établie dans [Fo1]. La nouvelle idée est qu'à la place de la transposition ordinaire, on utilise la transposition contextuelle.

Rappelons qu'une permutation peut se décomposer en un produit de cycles disjoints. On généralise cette décomposition au cas des bimots.

Un bimot $\binom{u}{w}\in M(A)$ est appelé *circuit*, si u est un réarrangement de w. L'ensemble des circuits est noté $C(A)$ et on écrit : $\overline{C}(A) = C(A)\cap\overline{M}(A)$. En particulier, un circuit $\binom{u}{w} = \binom{x_1x_2\cdots x_m}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ est appelé *cycle*, si u est le cyclage du mot w ; autrement dit, si $x_m=\alpha_1$ et $x_i=\alpha_{i+1}$ pour tout $i\le m-1$.

Soient w un mot et $\binom{u}{w}$ un cycle ; on note $\operatorname{pre} w = \operatorname{pre}\binom{u}{w} = x_m = \alpha_1$ la première lettre du mot w ; on dit que le mot w ou le cycle $\binom{u}{w}$ est *dominant*, si $\operatorname{pre} w$ est la seule plus grande lettre du mot w, c'est-à-dire, si $\operatorname{pre} w > w_i$ pour $i\ge 2$. Par exemple, le bimot $\binom{u}{w} = \binom{1211235457}{7121123545}$ est un cycle dominant. On a le théorème de factorisation suivant :

Théorème 4.1 (Factorisation). — *Tout élément $\mathbf{w}\in\overline{C}(A)$ admet une factorisation unique de la forme*

[F1] $$\mathbf{w} = \emptyset\odot\mathbf{u}^1\odot\mathbf{u}^2\odot\cdots\odot\mathbf{u}^r,$$

où les $\mathbf{u}^i$ sont des cycles dominants avec la condition

$$\mathrm{pre}(\mathbf{u}^1) \le \mathrm{pre}(\mathbf{u}^2) \le \cdots \le \mathrm{pre}(\mathbf{u}^r).$$

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de démontrer que, pour tout $\mathbf{w} \in \overline{C}(A)$, il existe exactement une factorisation de la forme $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \odot \mathbf{u}$, où $\mathbf{w}' \in \overline{C}(A)$ et $\mathbf{u}$ un cycle dominant telle que $\mathrm{pre}\,\mathbf{u}$ est la plus grande lettre de $\mathbf{w}$ (faiblement). L'existence de cette factorisation est assurée par l'algorithme suivant :

Algorithme 4.2 [Factorisation contextuelle $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \odot \mathbf{u}$]

$$\text{entrer } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_1x_2\cdots x_m \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \end{pmatrix} \in \overline{C}(A)\,;$$
$$\text{sortir } \mathbf{w}' = \begin{pmatrix} x'_1x'_2\cdots x'_{k-1} \\ \alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_{k-1} \end{pmatrix} \in \overline{C}(A)\,;$$
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y_ry_{r-1}\cdots y_2y_1 \\ \beta_r\beta_{r-1}\ldots\beta_2\beta_1 \end{pmatrix} \text{ un cycle dominant.}$$

$\mathbf{w}' := \mathbf{w};\ k := m;\ r := 1;$
repeat
  $y_r := x'_k;\ \beta_r := \alpha'_k\,;$
  $\mathbf{w}' :=$ enlever la dernière bilettre $\begin{pmatrix} x'_k \\ \alpha'_k \end{pmatrix}$ à $\mathbf{w}'$;
  if $\beta_r = x_m$ **then exit** ; /* x_m *est la lettre maximale dans* $\mathbf{w}$. */
  $i := k\,;$
  repeat
    $i := i - 1\,;$ /* *aller chercher* β_r *dans le premier mot de* $\mathbf{w}'$ */
  until $x'_i = \beta_r\,;$ /* *Cela se termine toujours !* */
  if $i < k-1$ **then** $\mathbf{w}' := T_{k-2}T_{k-3}\cdots T_i(\mathbf{w}')\,;$
  $k := k-1;\ r := r+1\,;$
until false

Pour l'unicité, supposons qu'il y a deux décompositions contextuelles de la forme : $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \odot \mathbf{u} = \mathbf{w}'_1 \odot \mathbf{u}_1$ avec

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1x_2\cdots x_{l-1}x_l \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1}\alpha_l \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} y_1y_2\cdots y_{s-1}y_s \\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_{s-1}\beta_s \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathrm{pre}\,\mathbf{u} = \mathrm{pre}(\mathbf{u}_1)$, on a $x_l = y_s = \beta_1 = \alpha_1$. Par le théorème de simplification, on a $\alpha_l = \beta_s$. D'où $x_{l-1} = y_{s-1}$. Itérativement, on a enfin $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$. Enfin, comme la multiplication contextuelle est simplifiable, on trouve $\mathbf{w}' = \mathbf{w}'_1$. □

Par exemple, associons au mot $w = 3\,1\,2\,1\,2\,4\,6\,2\,6\,5\,6\,1\,7\,5$ le circuit $\binom{\overline{w}}{w}$, comme indiqué ci-dessous. L'algorithme de décomposition contextuelle donne successivement :

$$\binom{\overline{w}}{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 5 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$[\ k = 14,\ \beta_1 = 5 \neq x_m = 7\ ]$

$[\ i = 10,$ aller chercher 5 dans le premier mot de $\mathbf{w}'\ ]$

$[$ faire $T_{12}T_{11}T_{10}(\mathbf{w}')\ ]$

$$\xrightarrow{T_{10}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 6 & 5 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 6 & 5 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 6 & 5 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$[\ k = 13,\ r = 2,\ \beta_2 = 7 = x_m\ ,$ **exit** $]$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$[$ continuer! $]$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

La transformation $w \mapsto \widetilde{w}$ est définie comme suit : à tout mot $w \in A^*$, on associe d'abord le circuit $\binom{\overline{w}}{w}$ de $\overline{C}(A)$; puis, par le théorème 4.1, on lui fait correspondre sa factorisation unique de la forme [F1]

$$\binom{\overline{w}}{w} = \emptyset \odot \mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r.$$

Alors $\widetilde{w}$ est défini comme le *second* mot du produit de *juxtaposition* $\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \ldots \times \mathbf{u}^r$.

THÉORÈME 4.2. — *L'application $w \mapsto \widetilde{w}$ définie sur A^* est bijective et envoie chaque classe de réarrangements sur elle-même.*

Démonstration. — On donne l'inverse de cette application $\widetilde{w} \mapsto w$. D'abord, il est bien connu que tout mot admet une factorisation unique de la forme

$$\text{[F2]} \qquad \widetilde{w} = u^1 \times u^2 \times \cdots \times u^r,$$

où les u^i sont des mots dominants avec la condition

$$\operatorname{pre}(u^1) \le \operatorname{pre}(u^2) \le \cdots \le \operatorname{pre}(u^r)\ .$$

(*cf.* [Fo1], lemme 10.2.1.)

A chaque mot dominant $v = x_1x_2\cdots x_m (x_1 > x_2, \cdots, x_m)$ on associe le cycle dominant $\mathbf{s}(v) = \binom{x_2x_3\cdots\ \ x_m\ x_1}{x_1x_2\cdots x_{m-1}x_m}$. Le mot w est alors le second mot (en bas) du produit contextuel

$$\emptyset \odot \mathbf{s}(u^1) \odot \mathbf{s}(u^2) \odot \cdots \odot \mathbf{s}(u^r). \qquad \square$$

Par exemple, pour $w = 3\,1\,2\,1\,2\,4\,6\,2\,6\,5\,6\,1\,7\,5$, on obtient, d'après la section précédente $\widetilde{w} = 3\,1\,1\,2\,6\,4\,2\,2\,6\,6\,5\,1\,7\,5$.

Inversement, on peut factoriser le mot $\widetilde{w}$ par [F2]

$$\widetilde{w} = 3\,1\,1\,2 \times 6\,4\,2\,2 \times 6 \times 6\,5\,1 \times 7\,5,$$

puis former les cycles dominants et calculer le produit contextuel suivant :

$$\emptyset \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 5 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le second mot est bien le mot w.

5. Calculs statistiques sur les mots

La transformation $w \mapsto \widetilde{w}$ ayant été construite, il reste encore, pour démontrer le théorème 1.2, à vérifier qu'elle envoie bien la paire de statistiques (des, maj) sur la paire (exc, den). Comme enfin la construction est faite à l'aide du monoïde des circuits, il importe de voir comment ces statistiques s'interprètent en termes de circuits.

DÉFINITION 5.1. — Soit $\binom{u}{w} = \binom{x_1x_2\cdots x_m}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} \in C(A)$; on pose

$$\operatorname{exc}\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \#\{i \mid 1 \le i \le m,\ \alpha_i > x_i\};$$

et

$$\operatorname{den}\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \bigl|\operatorname{Fact}_j w \cap \rrbracket \alpha_j, x_j \rrbracket\bigr|.$$

Cette définition est cohérente avec la version pour les mots. En effet, si w est un mot et $\overline{w}$ son redressement, alors, on a $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})w = (\operatorname{exc}, \operatorname{den})\binom{\overline{w}}{w}$. Le lemme suivant est une conséquence essentielle de la transposition contextuelle.

Lemme 5.2. — *La statistique* (exc, den) *est invariante par la transposition contextuelle. Autrement dit, soient* $\mathbf{w} \in C(A)$, $r \in [m-1]$ *et* $\mathbf{u} = T_r(\mathbf{w})$, *alors :*

$$(\mathrm{exc}, \mathrm{den})\mathbf{w} = (\mathrm{exc}, \mathrm{den})\mathbf{u}.$$

Démonstration. — Soient $\mathbf{w} = \binom{u}{w} = \binom{x_1 x_2 \cdots x_m}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$ et $\mathbf{u} = \binom{u'}{w'} = \binom{x'_1 x'_2 \cdots x'_m}{\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_m}$. Posons $\binom{x\ y}{\alpha\ \beta} = \binom{x_r\ x_{r+1}}{\alpha_r\ \alpha_{r+1}}$. On démontre ce lemme en distinguant deux cas suivant que α et β sont voisins ou en face :

• Supposons α et β voisins relativement à (x, y). Alors $x'_r = y$ et $x'_{r+1} = x$; de plus, les seconds mots de $\mathbf{w}$ et $\mathbf{u}$ sont identiques. Alors, l'identité $\chi(\alpha > x) + \chi(\beta > y) = \chi(\alpha > y) + \chi(\beta > x)$ est toujours satisfaite. Comme les autres places d'excédances n'ont pas changées, ceci démontre la partie "exc".

Rappelons que $\mathrm{den}\,\mathbf{w} = \sum_{j=1}^m s_j$ avec $s_j = \left|\mathrm{Fact}_j\, w \cap \rrbracket \alpha_j, x_j \rrbracket\right|$ et $\mathrm{den}\,\mathbf{u} = \sum_{j=1}^m t_j$ avec $t_j = \left|\mathrm{Fact}_j\, w' \cap \rrbracket \alpha'_j, x'_j \rrbracket\right|$. On a immédiatement $s_j = t_j$ pour $j \neq r$ et $r+1$. Ainsi, pour la partie "den", il suffit de montrer que $s_r + s_{r+1} = t_r + t_{r+1}$. D'après le lemme 3.2, on a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
s_r + s_{r+1} &= \left|\mathrm{Fact}_r(w) \cap \rrbracket \alpha, x \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_{r+1}(w) \cap \rrbracket \beta, y \rrbracket\right| \\
&= \left|\mathrm{Fact}_r(w) \cap \rrbracket \alpha, x \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_r(w) \cap \rrbracket \beta, y \rrbracket\right| + \left|\alpha \cap \rrbracket \beta, y \rrbracket\right| \\
&= \left|\mathrm{Fact}_r(w') \cap \rrbracket \alpha, y \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_r(w') \cap \rrbracket \beta, x \rrbracket\right| + \left|\alpha \cap \rrbracket \beta, x \rrbracket\right| \\
&= \left|\mathrm{Fact}_r(w') \cap \rrbracket \alpha, y \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_{r+1}(w') \cap \rrbracket \beta, x \rrbracket\right| \\
&= t_r + t_{r+1}.
\end{aligned}$$

• Supposons α et β en face relativement à (x, y). Dans ce cas, $T\binom{x\ y}{\alpha\ \beta} = \binom{y\ x}{\beta\ \alpha}$ et la partie "exc" est triviale. Pour la partie "den", avec la même méthode, les calculs suivants fournissent la démonstration complète :

$$\begin{aligned}
s_r + s_{r+1} &= \left|\mathrm{Fact}_r(w) \cap \rrbracket \alpha, x \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_{r+1}(w) \cap \rrbracket \beta, y \rrbracket\right| \\
&= \left|\mathrm{Fact}_r(w') \cap \rrbracket \alpha, x \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_r(w') \cap \rrbracket \beta, y \rrbracket\right| + \left|\alpha \cap \rrbracket \beta, y \rrbracket\right| \\
&= \left|\mathrm{Fact}_r(w') \cap \rrbracket \beta, y \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_r(w') \cap \rrbracket \alpha, x \rrbracket\right| + \left|\beta \cap \rrbracket \alpha, x \rrbracket\right| \\
&= t_r + t_{r+1}. \quad \square
\end{aligned}$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de ce lemme.

Corollaire 5.3. — *Pour tout* $\mathbf{w} \in \overline{C}(A)$ *et* $\mathbf{u} \in C(A)$, *on a :*

(i) $$(\mathrm{exc}, \mathrm{den})\mathbf{u} = (\mathrm{exc}, \mathrm{den})\overline{\mathbf{u}}$$

(ii) $$(\mathrm{exc}, \mathrm{den})(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = (\mathrm{exc}, \mathrm{den})(\mathbf{w} \odot \mathbf{u}). \quad \square$$

Établissons la relation entre (exc, den) et (des, maj) dans le cas particulier des cycles dominants. Par convention, pour $\mathbf{w} = \binom{u}{w} \in C(A)$, on pose $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})\mathbf{w} = (\mathrm{des}, \mathrm{maj})w$.

Lemme 5.4. — *Soit* $\mathbf{w}$ *un cycle dominant. Alors :*

$$(\mathrm{des}, \mathrm{maj})\mathbf{w} = (\mathrm{exc}, \mathrm{den})\mathbf{w}.$$

Démonstration. — Soit $\mathbf{w} = \binom{u}{w} = \binom{x_1 x_2 \cdots x_m}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$. Puisque $\binom{u}{w}$ est un cycle, on a, d'après la définition 5.1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{exc}\binom{u}{w} &= \#\{i \mid 1 \le i \le m,\ \alpha_i > x_i\} \\
&= \#\{i \mid 1 \le i \le m-1,\ \alpha_i > \alpha_{i+1}\} + \chi(\alpha_m > x_m = \alpha_1) \\
&= \mathrm{des}\, w\,;
\end{aligned}$$

et d'après le théorème 2.1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{den}\binom{u}{w} &= \sum_{j=1}^{m} \left|\mathrm{Fact}_j\, w \cap \rrbracket \alpha_j, x_j \rrbracket \right. \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \left|\mathrm{Fact}_j\, w \cap \rrbracket \alpha_j, \alpha_{j+1} \rrbracket\right| + \left|\mathrm{Fact}_j\, w \cap \rrbracket \alpha_m, \alpha_1 \rrbracket\right| \\
&= \mathrm{maj}\, w \qquad (\text{car } w \text{ est dominant}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemme 5.5. — *Soient* $\mathbf{w} \in \overline{C}(A)$ *et* $\mathbf{w} = \emptyset \odot \mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r$*, la décomposition contextuelle de la forme* [F1]*. Alors :*

$$(\mathrm{des}, \mathrm{maj})(\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^r) = (\mathrm{exc}, \mathrm{den})(\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^r).$$

Démonstration. — Notons $\mathbf{w}^j = \mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^j$ pour $j \le r$. On calcule successivement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{des}\, \mathbf{w}^r &= \mathrm{des}\, \mathbf{w}^{r-1} + \mathrm{des}\, \mathbf{u}^r \\
\mathrm{maj}\, \mathbf{w}^r &= \mathrm{maj}\, \mathbf{w}^{r-1} + \mathrm{maj}\, \mathbf{u}^r + k\ \mathrm{des}\, \mathbf{u}^r \\
\mathrm{exc}\, \mathbf{w}^r &= \mathrm{exc}\, \mathbf{w}^{r-1} + \mathrm{exc}\, \mathbf{u}^r \\
\mathrm{den}\, \mathbf{w}^r &= \mathrm{den}\, \mathbf{w}^{r-1} + \mathrm{den}\, \mathbf{u}^r + k\ \mathrm{exc}\, \mathbf{u}^r
\end{aligned}$$

où $k = \left|\mathbf{w}^{r-1}\right|$. Les trois premières égalités sont simples à vérifier. D'autre part, si $\binom{x_1 x_2 \cdots x_m}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$ est un cycle dominant, on peut vérifier que $\rrbracket \alpha_1, x_1 \rrbracket \uplus \rrbracket \alpha_2, x_2 \rrbracket \uplus \cdots \uplus \rrbracket \alpha_m, x_m \rrbracket$ est le multi-ensemble qui contient exactement les lettres $1, 2, \cdots, m$, chaque lettre ayant la multiplicité $\mathrm{exc}\binom{x_1 x_2 \cdots x_m}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$, ce qui implique la dernière égalité. On obtient le résultat désiré par récurrence, en faisant usage du lemme précédent. $\square$

Le théorème suivant vient compléter le résultat du théorème 1.2.

Théorème 5.6. — *La transformation définie dans la section* 4 *envoie la statistique* $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ *sur la statistique* $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$*.*

Démonstration. — Soient $w \in A^*$ et $\widetilde{w}$ l'image de w par cette transformation. D'après la définition 5.1, le théorème 4.1, le corollaire 5.3 et le lemme précédent, on a successivement :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{exc}, \mathrm{den})(w) &= (\mathrm{exc}, \mathrm{den})\binom{\overline{w}}{w} \\
&= (\mathrm{exc}, \mathrm{den})(\emptyset \odot \mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r) \\
&= (\mathrm{exc}, \mathrm{den})(\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^r) \\
&= (\mathrm{des}, \mathrm{maj})(\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^r) \\
&= (\mathrm{des}, \mathrm{maj})(\widetilde{w}). \qquad \square
\end{aligned}$$

En reprenant l'exemple donné dans la section précédente, avec $w = 3\,1\,2\,1\,2\,4\,6\,2\,6\,5\,6\,1\,7\,5$ et $\widetilde{w} = 3\,1\,1\,2\,6\,4\,2\,2\,6\,6\,5\,1\,7\,5$, on vérifie bien que $\mathrm{den}\, w = \mathrm{maj}\, \widetilde{w} = 46$.

BIBLIOGRAPHIE

[C-F] P. Cartier et D. Foata. — *Problèmes combinatoires de permutations et réarrangements*, Berlin, Springer-Verlag, 1969 (*Lecture Notes in Math.*, **85**).

[Car] L. Carlitz. — q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), pp. 332-350.

[Cla] R. J. Clarke. — *A short proof of a result of Foata and Zeilberger,* preprint.

[Den] M. Denert. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.*, **54** (1990), pp. 449-465.

[F-S] D. Foata et M.-P. Schützenberger. — Major Index and Inversion Number of Permutations, *Math Nachr.*, **83** (1978), pp. 143-159.

[F-Z] D. Foata et D. Zeilberger. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, **83** (1990), pp. 31-59.

[Fo1] D. Foata. — Rearrangements of Words, *Combinatorics on Words* [M. Lothaire, éd.], p. 184–212. — Boston, Addison-Wesley, 1983 (*Encyclopedia of mathematics and its applications*, **17**).

[Fo2] D. Foata. — On the Netto inversion number of a sequence, *Proc. Amer. Math. Soc*, **19** (1968), pp. 236-240.

[Ha1] G.-N. Han. — Distribution Euler-mahonienne : une correspondance, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **310** (1990), pp. 311-314.

[Ha2] G.-N. Han. — Une nouvelle bijection pour la statistique de Denert, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **310** (1990), pp. 493-496.

[Ha3] G.-N. Han. — Une courte démonstration d'un résultat sur la Z-statistique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **314** (1992), pp. 969-971.

[L-S] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Le monoïde plaxique, *Non-commutative structures in Algebra and Geometric Combinatorics* [A. De Luca, éd. Napoli. 1978], p. 129-156.

[MacM] P.A. MacMahon. — The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects, *Amer. J. Math.*, **35** (1913), pp. 281–322.