

Ordres bipartitionnaires et statistiques sur les mots

Guo-Niu HAN (*)

Dédicé à Dominique Foata à l'occasion de son soixantième anniversaire

RÉSUMÉ. — Soit U un ensemble de couples de lettres. Foata et Zeilberger [FZ] ont introduit les U -statistiques pour les mots quelconques. Dans cette note, on établit une condition nécessaire et suffisante pour que les deux définitions “maj_U” et “maj2_U”, qu'on rencontre dans le cas classique [H], sont équivalentes. Il est remarquable que cette condition est exactement la même que celle qui a été trouvée pour l'équidistribution des deux statistiques “maj_U” et “inv_U”.

1. Introduction

Soient X un alphabet et X^* le monoïde libre engendré par X . Si $w = x_1x_2 \cdots x_m \in X^*$ est un mot de longueur m , on appelle *réarrangement* de w tout mot $u = x_{\sigma_1}x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_m}$, où σ est une permutation appartenant à \mathfrak{S}_m . On note $R(w)$ la classe de tous les réarrangements du mot w .

On représente les sous-ensembles $U \subset X \times X$ comme suit : pour tout $x, y \in X$, on écrit $x \succ y$ si $(x, y) \in U$ et $x \not\succ y$ si $(x, y) \notin U$. Un sous-ensemble U est appelé *ordre bipartitionnaire*, (**) si les deux conditions suivantes sont remplies :

$$z \succ y \text{ et } y \succ x \implies z \succ x; \quad (1)$$

$$z \succ y \text{ et } x \not\succ y \implies z \succ x. \quad (2)$$

Pour une relation $U \subset X \times X$ quelconque, on généralise les statistiques classiques “inv” (nombre d'inversions) et “maj” (indice majeur) pour les mots quelconques de la façon suivante. Soit $w = x_1x_2 \cdots x_m \in X^*$ un mot, on définit :

$$\begin{aligned} \text{inv}_U w &= \text{Card}\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq m, x_i \succ x_j\}, \\ \text{maj}_U w &= \sum\{i \mid 1 \leq i \leq m-1, x_i \succ x_{i+1}\}. \end{aligned}$$

(*) Avec le concours du programme des Communautés Européennes en Combinatoire Algébrique, 1994-95.

(**) Cette définition est différente de celle qui a été donnée dans [FZ]. Le théorème 5 dans la dernière section montre que ces deux définitions sont équivalentes.

Lorsque X est totalement ordonné, l'ordre sous-jacent “ $>$ ” vérifie bien les deux conditions (1) et (2), et est donc bipartitionnaire. Lorsque le sous-ensemble U est cet ordre, c'est-à-dire, $x \succ y$ si et seulement si $x > y$, on a alors $\text{inv}_U = \text{inv}$ et $\text{maj}_U = \text{maj}$. De plus, on peut vérifier que les deux statistiques précédentes généralisent les statistiques inv_k et maj_k introduites dans [CF2]. Un autre exemple d'ordre bipartitionnaire se trouve dans la section 3. Le nombre des ordres bipartitionnaires B_r sur un alphabet de cardinal r est donné par la fonction génératrice suivante [FZ] :

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 0} B_r \frac{u^r}{r!} &= \frac{1}{3 - 2e^u} \\ &= 1 + 2u + 10 \frac{u^2}{2!} + 74 \frac{u^3}{3!} + 730 \frac{u^4}{4!} + 9002 \frac{u^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Foata et Zeilberger ont établi le résultat suivant [FZ] :

THÉORÈME 1 (FOATA ET ZEILBERGER). — *Les deux statistiques maj_U et inv_U sont équidistribuées, si et seulement si le sous-ensemble U est un ordre bipartitionnaire.*

Depuis [H], on sait qu'il existe une autre définition “ $\text{maj}_2 U$ ” qui est équivalente à “ maj ” dans le cas classique. Cette statistique peut être aussi généralisée pour un sous-ensemble $U \in X \times X$ quelconque. La définition de “ $\text{maj}_2 U$ ” se trouve dans la section 2. Dans cette note, on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les deux statistiques maj_U et $\text{maj}_2 U$ sont équivalentes, si et seulement si le sous-ensemble U est un ordre bipartitionnaire.*

D'après les deux théorèmes précédents, on peut dire que les ordres bipartitionnaires sont des objets combinatoires “naturels”.

2. Intervalles cycliques

Pour $x, y \in X$, l'*intervalle cyclique* (généralisé), noté $\llbracket x, y \rrbracket_U$, est défini par

$$\llbracket x, y \rrbracket_U = \begin{cases} \{z \in X \mid z \succ x \text{ et } z \not\succ y\}, & \text{si } x \not\succ y; \\ \{z \in X \mid z \succ x \text{ ou } z \not\succ y\}, & \text{si } x \succ y. \end{cases}$$

Parfois, on a besoin d'ajouter l'élément “ ∞ ” dans notre alphabet pour former l'ensemble $[r] \cup \{\infty\}$, et on suppose alors $x \not\succ \infty$ et $\infty \succ x$ pour tout x . Dans ce cas, on a $z \in \llbracket x, \infty \rrbracket_U$ si et seulement si $z \succ x$. Deux exemples d' intervalle cyclique se trouvent dans la section 3.

Soient $w = x_1 x_2 \cdots x_m \in X^*$ un mot et $S \subset X$, on note

$$\langle w, S \rangle = \#\{i \mid 1 \leq i \leq m, x_i \in S\}.$$

Soient $w = x_1 x_2 \cdots x_m, u \in X^*$ deux mots et $S, T \in X$ deux sous-ensembles. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\langle w, \emptyset \rangle &= 0, \quad \langle w, X \rangle = m, \\ \langle wu, S \rangle &= \langle w, S \rangle + \langle u, S \rangle, \\ \langle w, S \rangle + \langle w, T \rangle &= \langle w, S \cup T \rangle + \langle w, S \cap T \rangle.\end{aligned}$$

DÉFINITION. — Soient $w = x_1 x_2 \cdots x_m$ un mot. Avec la convention $x_{n+1} = \infty$, on définit :

$$\text{maj2}_U w = \sum_{j=1}^m \langle x_1 x_2 \cdots x_{j-1}, \llbracket x_j, x_{j+1} \rrbracket_U \rangle.$$

La suite $(s_j)_{1 \leq j \leq m}$ où $s_j = \langle x_1 x_2 \cdots x_{j-1}, \llbracket x_j, x_{j+1} \rrbracket_U \rangle$ est appelée *maj-codage* du mot w .

3. Exemple

Considérons l'alphabet $X = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$. On vérifie que l'ensemble

$$U = \left\{ \begin{array}{l} 0 \succ 0, \quad 0 \succ 1, \\ 1 \succ 0, \quad 1 \succ 1, \\ 2 \succ 0, \quad 2 \succ 1, \quad 2 \succ 2, \\ 3 \succ 0, \quad 3 \succ 1, \quad 3 \succ 2, \\ 4 \succ 0, \quad 4 \succ 1, \quad 4 \succ 2, \\ 5 \succ 0, \quad 5 \succ 1, \quad 5 \succ 2, \\ 6 \succ 0, \quad 6 \succ 1, \quad 6 \succ 2, \quad 6 \succ 3, \quad 6 \succ 4, \quad 6 \succ 5 \end{array} \right\}$$

est bien un ordre bipartitionnaire. On a par exemple les intervalles cycliques $\llbracket 6, 2 \rrbracket_U = \{0, 1\}$ et $\llbracket 2, 3 \rrbracket_U = \llbracket 2, 4 \rrbracket_U = \llbracket 2, 5 \rrbracket_U = \{2, 3, 4, 5\}$. Pour le mot $w = 315016406254320$, on a $\text{maj}_U w = 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 + 13 + 14 = 57$ et $\text{maj2}_U w = 1 + 3 + 4 + 5 + 1 + 6 + 5 + 3 + 6 + 9 + 14 = 57$. Les calculs complets sont consignés dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	3	1	5	0	1	6	4	0	6	2	5	4	3	2	0
descente	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
s_i	0	1	0	3	4	5	1	7	4	3	0	0	6	9	14

4. Propriétés des intervalles cycliques

Soit $U \in X \times X$ un sous-ensemble. Pour abréger les écritures, notons $A = \llbracket y, \infty \rrbracket_U, B = \llbracket x, y \rrbracket_U, C = \llbracket x, \infty \rrbracket_U$ pour deux lettres $x, y \in X$. On a le résultat suivant :

LEMME 3. — *Le sous-ensemble U est un ordre bipartitionnaire, si et seulement si, pour tout $x, y \in X$, les relations entre A, B et C suivants sont remplies :*

- (i) *si $x \not\succ y$, alors $A \cap B = \emptyset, A \cup B = C$;*
- (ii) *si $x \succ y$, alors $A \cap B = C, A \cup B = X$.*

Démonstration. — La partie “si”. — D’après la condition (i), pour tout x, y , si $x \not\succ y$ et $z \in A$, alors $z \in C$. Ceci démontre la relation (1) de la section 1. D’après la condition (ii), pour tout x, y , si $x \succ y$ et $z \in C$, alors $z \in A$. Ceci démontre la relation (2) de la section 1.

La partie “seulement si”. — Dans le premier cas, i.e., $x \not\succ y$, on vérifie :

- Si $z \in C$, alors $z \succ x$. Dans ce cas, on a ou bien $z \succ y$, $z \in A$ et $z \notin B$; ou bien $z \not\succ y$, $z \in B$ et $z \notin A$;
- Si $z \in A$, alors $z \succ y$. D’après la relation (1), on a $z \succ x, z \in C$;
- Si $z \in B$, alors $z \succ x$ et $z \not\succ y$. On a $z \in C$.

Dans le second cas, i.e., $x \succ y$, on vérifie :

- Si $z \in C$, alors $z \succ x, z \in B$. D’autre part, d’après (2), on a $z \succ y$ et $z \in A$.
- Si $z \notin C$, i.e., $z \not\succ x$. Dans ce cas, si $z \succ y$, alors $z \in A$ et $z \notin B$; si $z \not\succ y$, alors $z \notin A$ et $z \in B$. \square

5. Démonstration du théorème 2

Posons $w' = x_1 x_2 \cdots x_{m-1}$. On note $(s_j)_{1 \leq j < m}$ et $(s'_j)_{1 \leq j < m-1}$ les maj-codages de w et de w' respectivement, il est clair qu’on a $s_j = s'_j$ pour tout $j < m-1$. Pour abréger les écritures, notons $A = \llbracket x_m, \infty \rrbracket_U, B = \llbracket x_{m-1}, x_m \rrbracket_U, C = \llbracket x_{m-1}, \infty \rrbracket_U$ et $u = x_1 x_2 \cdots x_{m-2}$. On calcule maintenant

$$\begin{aligned} \Delta &= s_m + s_{m-1} - s'_{m-1} \\ &= \langle ux_{m-1}, A \rangle + \langle u, B \rangle - \langle u, C \rangle \\ &= \langle x_{m-1}, A \rangle + \langle u, A \cup B \rangle + \langle u, A \cap B \rangle - \langle u, C \rangle. \end{aligned}$$

La partie “si”. — Si $x_{m-1} \not\succ x_m$, alors $x_{m-1} \notin A$. D’après les propriétés précédentes, on a

$$\Delta = 0 + \langle u, C \rangle + \langle u, \emptyset \rangle - \langle u, C \rangle = 0.$$

D'autre part, si $x_{m-1} \succ x_m$, alors $x_{m-1} \in A$, on a

$$\Delta = 1 + \langle u, X \rangle + \langle u, C \rangle - \langle u, C \rangle = m - 1.$$

D'où $\text{maj}_U w = \text{maj2}_U w$ par récurrence sur la longueur m du mot w .

La partie “seulement si”. — Puisque $\text{maj}_U w = \text{maj2}_U w$ pour tout w , on a $\Delta = 0$ si $x_{m-1} \not\succ x_m$ et $\Delta = m - 1$ si $x_{m-1} \succ x_m$. Dans le premier cas, on a $\Delta = 0 + \langle u, A \cup B \rangle + \langle u, A \cap B \rangle - \langle u, C \rangle = 0$ pour *tout* u de longueur $m - 2$, et forcément $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = C$; et dans le second cas, on a $\Delta = 1 + \langle u, A \cup B \rangle + \langle u, A \cap B \rangle - \langle u, C \rangle = m - 1$ pour *tout* u de longueur $m - 2$, et forcément $A \cap B = C$ et $A \cup B = X$. D'après le lemme précédent, le sous-ensemble U est donc un ordre bipartitionnaire. \square

6. Structures des ordres bipartitionnaires

D'après la définition de l'ordre bipartitionnaire, on a immédiatement les propriétés suivantes :

$$x \not\succ y \text{ et } z \succ y \implies x \not\succ z; \quad (3)$$

$$x \not\succ y \text{ et } y \not\succ z \implies x \not\succ z; \quad (4)$$

$$x \succ y \text{ et } y \succ x \implies x \succ x \text{ et } y \succ y; \quad (5)$$

$$x \not\succ y \text{ et } y \not\succ x \implies x \not\succ x \text{ et } y \not\succ y. \quad (6)$$

Soit $U \subset X \times X$ un sous-ensemble quelconque. Pour tout $x, y \in X$, on dit que la lettre x est *incomparable* à y , si $x \succ y$ et $y \succ x$ ou bien si $x \not\succ y$ et $y \not\succ x$. On note $x \approx y$ si x est incomparable à y , et la relation “ \approx ” est appelée *relation d'incomparabilité* définie par U .

LEMME 4. — *Si $U \subset X \times X$ est un ordre bipartitionnaire, alors la relation d'incomparabilité “ \approx ” définie par U est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — La reflexivité et la symétrie sont évidentes d'après la définition. Pour la transitivité, on suppose $x \approx y$ et $y \approx z$. D'abord, si $x \succ y$ et $y \succ x$, on a $y \succ y$ d'après (5). On a alors $y \succ z$ et $z \succ y$. Ainsi, par la relation (1), on a $x \approx z$. Dans le second cas, si $x \not\succ y$ et $y \not\succ x$, c'est la même vérification. \square

DÉFINITION. — Une *bipartition ordonnée* de X est une suite ordonnée (B_1, B_2, \dots, B_k) de blocs non vides, disjoints deux à deux, de réunion X , dont certains peuvent être soulignés.

THÉORÈME 5. — *Une relation U est bipartitionnaire, si et seulement s'il existe une bipartition ordonnée $B = (B_1, B_2, \dots, B_k)$ de X , tel que*

$$y \succ x \iff \begin{aligned} &x \in B_l, y \in B_h, \text{ avec } l < h; \\ &\text{ou bien } x, y \in B_l, \text{ avec } B_l \text{ souligné.} \end{aligned} \quad (7)$$

Démonstration. — La partie “si” est triviale : il est suffit de vérifier les deux relations (1) et (2) de la section 1. Pour la partie “seulement si”, d’après le lemme précédent, l’ensemble quotient X/\approx de X par rapport à la relation d’incomparabilité “ \approx ” existe. Il est clair qu’avec l’ordre induit par la relation U , cet ensemble X/\approx est totalement ordonné. Soient B_1, B_2, \dots, B_k les éléments de X/\approx suivant cet ordre total. On peut vérifier la relation (7) avec la suite de B_1, B_2, \dots, B_k ainsi définie. \square

Exemple. — Pour la relation U donnée dans la section 3, la bipartition associée est $B = (\{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{2}\}, \{3, 4, 5\}, \{6\})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [CF1] R. J. CLARKE ET D. FOATA. — Eulerian Calculus, I : Univariant Statistics, *Europ. J. Combinatorics*, **15** (1994), pp. 345-362.
- [CF2] R. J. CLARKE ET D. FOATA. — Eulerian calculus, II : An extension of Han’s fundamental transformation, à paraître dans *Europ. J. Combinatorics*.
- [FZ] D. FOATA ET D. ZEILBERGER. — Graphical Major Indices, soumis pour publication, 1995.
- [K] K. W. J. KAPELL. — Weighted inversion numbers, restricted growth function, and standard Young tableaux, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **40** (1985), pp. 22-44.
- [H] G.-N. HAN. — Une transformation fondamentale sur les réarrangements de mots, *Advances in Math.*, **105** (1994), pp. 26-41.

I.R.M.A., Université Louis Pasteur & C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
email : guoniu@math.u-strasbg.fr