

# $q$ -Polynômes de Gandhi et statistique de Denert

Guo-Niu Han<sup>1</sup> and Jiang Zeng<sup>2</sup>

*IRMA et Département de mathématique, CNRS et Université Louis Pasteur,  
7, rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg, France*

---

## Abstract

Using the  $q$ -difference operator we give  $q$ -analogues of the Gandhi polynomials of the first and second kinds, which are extensions of the Genocchi and median Genocchi numbers, respectively. We provide two combinatorial interpretations of these polynomials in terms of generating functions for Genocchi permutations by some appropriate statistics, one of them being essentially the Denert statistic. We also derive the continued fraction expansions for their ordinary generating functions.

---

## 1 Introduction

Ces dernières années ont été le témoin d'études fructueuses sur les  $q$ -analogues des suites classiques de nombres [1,14]. Bien qu'il n'existe pas encore de théorie générale pour la construction de ces  $q$ -analogues, on peut toutefois dégager des règles fondamentales. D'un point de vue analytique, on sait qu'on obtient des résultats intéressants lorsqu'on remplace les séries ordinaires par les  $q$ -séries, la dérivée par la  $q$ -dérivée, la différence finie par la  $q$ -différence finie, ... D'un point de vue combinatoire, si la suite de nombres étudiée est liée au dénombrement de classes de permutations, on sait qu'il faut trouver une statistique sur les permutations qui ait un comportement analytique semblable à celui du *nombre d'inversions*, ou à d'autres statistiques dites *mahoniennes* [13], comme l'*indice majeur* [13], ou comme la *statistique de Denert* apparue récemment [15,5,18]. La difficulté principale réside dans le fait que ces deux points de vue ne cohabitent pas forcément de façon harmonieuse.

L'objet du présent article est de montrer qu'il y a cependant une réconciliation heureuse entre ces deux points de vue dans l'étude des *polynômes de Gandhi*,

---

<sup>1</sup> E-mail: guoniu@math.u-strasbg.fr

<sup>2</sup> E-mail: jzeng@math.u-strasbg.fr

une famille de polynômes qui a eu ses heures de gloire dans l'approche combinatoire des *nombre de Genocchi* [23,6,8,19,31,24]. Nous nous proposons de montrer que des techniques classiques du  $q$ -calcul permettent de trouver un joli  $q$ -analogue des polynômes de Gandhi, tant du point de vue analytique que du point de vue combinatoire.

Rappelons que les nombres de Genocchi  $G_{2n}$  ( $n \geq 1$ ) peuvent être définis par leur fonction génératrice exponentielle

$$\frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n \geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - 3 \frac{t^6}{6!} + 17 \frac{t^8}{8!} - \dots$$

Soit  $\Delta$  l'opérateur de différence finie défini pour tout polynôme  $f(x)$  par  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ . Pour l'étude des nombres  $G_{2n}$ , Gandhi [16] a introduit une suite de polynômes  $(B_n(x))$  définis par la récurrence

$$\begin{cases} B_1(x) = 1, \\ B_n(x) = \Delta(x^2 B_{n-1}(x)) \quad (n \geq 2), \end{cases} \quad (1)$$

et conjecturé que l'on a :  $B_n(1) = G_{2n+2}$ . Cette conjecture a été immédiatement démontrée par Carlitz [4], Riordan-Stein [26] et Barsky [2]. Comme nous le verrons par la suite, cette expression nouvelle des nombres de Genocchi a été fondamentale dans l'étude combinatoire de ces nombres, une étude qui a été initialisée par Dumont [6] et poursuivie par différents auteurs [8–10,19,25,29,31].

Par ailleurs, dans l'étude des polynômes orthogonaux, Hahn [17] a introduit l'opérateur  $\Delta_q$  suivant, comme étant un  $q$ -analogue de l'opérateur  $\Delta$ . Il a défini

$$\Delta_q f(x) = \frac{f(1+qx) - f(x)}{1 + (q-1)x},$$

et montré qu'à l'aide de cet opérateur, on pouvait trouver de bons  $q$ -analogues de familles de polynômes orthogonaux classiques.

Il nous a donc paru naturel de définir des  $q$ -polynômes de Gandhi en remplaçant dans (1) l'opérateur  $\Delta$  par l'opérateur  $\Delta_q$ . Nous avons poussé plus loin l'extension en introduisant une nouvelle variable  $y$  et en définissant des polynômes  $D_n(x, y, q)$  par la récurrence

$$\begin{cases} D_1(x, y, q) = 1, \\ D_n(x, y, q) = \Delta_q(x^2 D_{n-1}(x, y, q)) + (y-1)x D_{n-1}(x, y, q) \quad (n \geq 2). \end{cases} \quad (2)$$

Pour  $y = 1$  on obtient la suite des polynômes  $(B_n(x, q))$ , que nous appelons

$q$ -polynômes de Gandhi de première espèce et qui sont donc définis par la récurrence

$$\begin{cases} B_1(x, q) = 1, \\ B_n(x, q) = \Delta_q(x^2 B_{n-1}(x, q)) \quad (n \geq 2). \end{cases} \quad (3)$$

Pour  $y = 0$  on obtient la suite des polynômes  $(C_n(x, q))$ , dits  $q$ -polynômes de Gandhi de seconde espèce, eux définis par

$$\begin{cases} C_1(x, q) = 1, \\ C_n(x, q) = (1 + qx)\Delta_q(xC_{n-1}(x, q)) \quad (n \geq 2). \end{cases} \quad (4)$$

La suite  $(C_n(1, q))$  apparaîtra comme la  $q$ -extension de la suite des *nombre de Genocchi médians*, dont l'étude combinatoire est tout à fait parallèle à celle des nombres de Genocchi ordinaires [9,29]. Enfin, nos résultats sur les polynômes  $D_n(x, y, q)$  eux-mêmes généraliseront aussi des résultats classiques obtenus pour  $q = 1$ , notamment dans [9,25,31].

Les techniques que nous utilisons pour étudier les polynômes  $D_n(x, y, q)$  sont de trois natures différentes.

### 1.1 L'approche analytique

Dans une première phase, nous montrons que la série génératrice des polynômes  $D_n(x, y, z)$  admet le développement en fraction continue formelle suivant (voir théorème 2) :

$$\begin{aligned} & 1 + xy \sum_{n \geq 1} D_n(x, y, q)t^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{xyt}{1 - \frac{(1+qx)t}{1 - \frac{(1+qx)(y+q)t}{1 - \frac{[2]_q([2]_q + q^2x)t}{1 - \frac{([2]_q + q^2x)(y+q[2]_q)t}{1 - \frac{[3]_q([3]_q + q^3x)t}{1 - \frac{([3]_q + q^3x)(y+q[3]_q)t}{\ddots}}}}}}}}}, \end{aligned} \quad (5)$$

dans lequel on a utilisé la notation  $[n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1}$  pour  $n \geq 1$ . Cette identité nous permet d'affirmer que nos polynômes  $D_n(x, y, q)$  constituent

une version plausible pour un  $q$ -analogue des polynômes de Gandhi, puisque dans l'identité (5) nous retrouvons, par spécialisation des variables, plusieurs résultats antérieurs sur les polynômes de Gandhi [9], en particulier, sur les nombres de Genocchi [29,11,27].

### 1.2 L'approche analytico-combinatoire

Rappelons qu'on appelle *permutation de Genocchi* d'ordre  $2n$  une permutation  $\sigma$  de  $[2n]$  telle que

$$\sigma(2i-1) > 2i-1 \quad \text{et} \quad \sigma(2i) \leq 2i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Notons  $\mathcal{G}_n$  l'ensemble des permutations de Genocchi d'ordre  $2n$ . Ce modèle a été introduit par Dumont [6], qui a démontré que l'on a  $\#\mathcal{G}_n = G_{2n+2}$ . Nous reprenons ce modèle ici en introduisant une statistique trivariée (fex, sid, den) sur  $\mathcal{G}_n$  et en établissant l'identité :

$$q^{n^2} xy D_n(x, y, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} x^{\text{fex } \sigma} y^{\text{sid } \sigma} q^{\text{den } \sigma}. \quad (6)$$

(voir théorème 9). La principale difficulté est ici de trouver une statistique mahonienne qui rende compte de la  $q$ -extension. Il est intéressant que c'est ni le nombre d'inversions [24], ni l'indice majeur qu'il faut prendre, mais un analogue de la statistique de Denert "den," apparu récemment dans un tout autre contexte [5]. Pour établir l'identité ci-dessus, il faut d'ailleurs utiliser des techniques de calcul sur les fractions continues, qui ont été affinées par différents auteurs, notamment Flajolet, Viennot, Biane et Foata-Zeilberger [12,29,3,15], en particulier Dumont [7] qui a bien su adapter la construction de Biane aux chemins de Dyck.

### 1.3 L'approche combinatoire de Dumont

A partir de la génération de Gandhi (1) il est plus naturel d'interpréter ces polynômes (et a fortiori les nombres de Genocchi) dans le modèle des *pistolets*, ce qui était en effet le point de départ de Dumont [6] dans son étude combinatoire des nombres de Genocchi. Rappelons que l'on appelle *pistolet* d'ordre  $n$  toute surjection  $f$  de l'ensemble  $[2n]$  sur l'ensemble  $2[n] = \{2, 4, \dots, 2n\}$ , qui est excédante, c'est-à-dire qui satisfait l'inégalité  $f(i) \geq i$  pour tout  $i$ . Notons  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des pistolets d'ordre  $n$ . Nous introduisons une statistique trivariée (max, fnd, den) définie sur  $\mathcal{P}_n$  qui nous permet de

donner au polynôme  $D_n(x, y, q)$  une autre interprétation combinatoire, à savoir (voir théorème 11)

$$D_n(x, y, q) = \sum_{f \in \mathcal{P}_n} x^{\max f} y^{\text{fnd } f} q^{n^2 - \text{den } f}. \quad (7)$$

L'interprétation dans  $\mathcal{P}_n$  ci-dessus nous permet de déduire une seconde interprétation combinatoire des polynômes  $D_n(x, y, q)$  sur  $\mathcal{G}_n$ , à savoir (voir théorème 20)

$$D_n(x, y, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} x^{\text{sap } \sigma} y^{\text{fix } \sigma} q^{n^2 - \text{den } \text{irc}(\sigma)}, \quad (8)$$

où (sap, fix, den) est une statistique trivariée sur  $\mathcal{G}_n$ . Le problème ouvert est de construire une bijection de  $\mathcal{P}_n$  sur  $\mathcal{G}_n$  qui relie les deux interprétations (6) et (8).

Cet article est organisé comme suit. Au paragraphe 2 nous démontrons d'abord la formule (5) en appliquant une transformation sur les fractions continues de Wall et abordons ensuite l'aspect combinatoire de fractions continues. Au paragraphe 3 nous déduisons de (5) une première interprétation combinatoire pour  $D_n(x, y, q)$  dans le modèle des permutations de Genocchi. Le paragraphe 4 est consacré à l'étude de  $D_n(x, y, q)$  dans le modèle des pistolets  $\mathcal{P}_n$ . Nous obtenons au paragraphe 5 une seconde interprétation combinatoire pour  $D_n(x, y, q)$  dans le modèle des permutations de Genocchi. Enfin, nous terminons cet article en reproduisant quelques tableaux numériques et en donnant quelques exemples.

## 2 Fonctions génératrices et chemin de Dyck

On se place dans un anneau de séries formelles  $K[[t]]$  où  $K$  est un anneau intègre. Le résultat suivant est dû à Wall [30, Th. 2.1].

**Lemme 1** *On a l'identité :*

$$\frac{1+t}{1 - \frac{(g_1-1)t}{1 - \frac{(g_2-1)g_1t}{1 - \frac{(g_3-1)g_2t}{\ddots}}}} = 1 + \frac{g_1t}{1 - \frac{(g_1-1)g_2t}{1 - \frac{(g_2-1)g_3t}{1 - \frac{(g_3-1)g_4t}{\ddots}}}}.$$

**Théorème 2** *La fonction génératrice  $1 + xy \sum_{n \leq 1} D_n(x, y, q)t^n$  admet le développement en fraction continue formelle (5).*

**Démonstration.** Posons  $D(x, t) = 1 + xy \sum_{n \geq 1} D_n(x, y, q)t^n$ . La relation de récurrence (2) implique alors

$$D(x, t) = 1 + \frac{x(1+qx)t}{1+(q-1)x} D(1+qx, t) - \alpha t D(x, t),$$

où  $\alpha = [(y+q-xy)x^2 - (y-1)x]/(1+(q-1)x)$ . On en déduit alors

$$(1+\alpha t)D(x, t) = 1 + \frac{x(1+qx)t}{1+(q-1)x} D(1+qx, t). \quad (9)$$

Il est clair que la série  $D(x, t)$  est entièrement déterminée par l'équation (9). Cherchons une suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  telle que

$$D(x, t) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(g_1-1)t}{1 - \frac{\alpha(g_2-1)g_1t}{1 - \frac{\alpha(g_3-1)g_2t}{\ddots}}}}. \quad (10)$$

Soient  $\alpha'$  et  $g'_n$  les valeurs respectives de  $\alpha$  et  $g_n$  en substituant  $x$  par  $(1+qx)$  dans leurs expressions. En remplaçant  $\alpha t$  par  $t$ , l'identité (9) se réécrit

$$\frac{1+t}{1 - \frac{(g_1-1)t}{1 - \frac{(g_2-1)g_1t}{1 - \frac{(g_3-1)g_2t}{\ddots}}}} = 1 + \frac{\frac{1+qx}{(y+q-xy)x-(y-1)}t}{1 - \frac{\frac{\alpha'}{\alpha}(g'_1-1)t}{1 - \frac{\frac{\alpha'}{\alpha}(g'_2-1)g'_1t}{1 - \frac{\frac{\alpha'}{\alpha}(g'_3-1)g'_2t}{\ddots}}}}. \quad (11)$$

Au moyen du lemme 1, on tire successivement de (11) :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1+qx}{(y+q-xy)x-(y-1)}, & g_2 &= \frac{\alpha' g'_1 - 1}{\alpha g_1 - 1} = q + \frac{1}{x}, \\ g_3 &= \frac{\alpha' g'_2 - 1}{\alpha g_2 - 1} g'_1 = \frac{1+q+q^2x}{(y+q-xy)x-(y-1)}, \\ g_4 &= \frac{\alpha' g'_3 - 1}{\alpha g_3 - 1} g'_2 = q^2 + \frac{1+q}{x}, \end{aligned}$$

et par récurrence sur  $n \geq 1$  on montre facilement que l'on a :

$$g_{2n-1} = \frac{[n]_q + q^n x}{(y+q-xy)x-(y-1)}, \quad g_{2n} = q^n + \frac{[n]_q}{x}.$$

Par suite, en posant  $g_0 = 1$ , on obtient pour  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\alpha(g_{2n-1} - 1)g_{2n-2} &= ([n-1]_q + q^{n-1}x)(y + q[n-1]_q), \\ \alpha(g_{2n} - 1)g_{2n-1} &= [n]_q([n]_q + q^n x).\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans (10) on trouve bien la formule (5).  $\square$

A l'aide de la formule  $\frac{1}{1 - xy t/s(t)} = 1 + \frac{xy t}{s(t) - xy t}$ , où  $s(t)$  est une série formelle inversible, on déduit du théorème 2 le corollaire suivant.

**Corollaire 3** *On a l'identité :*

$$\sum_{n \geq 1} D_n(x, y, q)t^n = \frac{1}{1 - xy t - \frac{(1 + qx)t}{1 - \frac{(1 + qx)(y + q)t}{1 - \frac{[2]_q([2]_q + q^2 x)t}{1 - \frac{([2]_q + q^2 x)(y + q[2]_q)t}{\dots}}}}}. \quad (12)$$

On obtient les formules correspondantes pour les  $q$ -polynômes de Gandhi en posant respectivement  $y = 1$  et  $y = 0$  dans (5) et (12).

**Corollaire 4** *On a les fractions continues formelles :*

$$1 + x \sum_{n \geq 1} B_n(x, q)t^n = \frac{1}{1 - \frac{xt}{1 - \frac{(1 + qx)t}{1 - \frac{[2]_q(1 + qx)t}{1 - \frac{[2]_q([2]_q + q^2 x)t}{\dots}}}}}, \quad (13)$$

$$\sum_{n \geq 1} C_n(x, q)t^n = \frac{t}{1 - \frac{(1 + qx)t}{1 - \frac{q(1 + qx)t}{1 - \frac{[2]_q([2]_q + q^2 x)t}{1 - \frac{q[2]_q([2]_q + q^2 x)t}{\dots}}}}}. \quad (14)$$

On peut aussi développer les séries génératrices ordinaires des polynômes  $B_n(x, q)$  et  $C_n(x, q)$  en séries de fractions rationnelles, comme dans [2,9] pour

$q = 1$ . Par exemple, on déduit de (3) l'équation suivante :

$$\sum_{n \geq 1} B_n(x, q)t^n = t + \frac{(1 + qx)^2 t}{1 + (q - 1)x} \sum_{n \geq 1} B_n(1 + qx, q)t^n - \frac{x^2 t}{1 + (q - 1)x} \sum_{n \geq 1} B_n(x, q)t^n.$$

D'où

$$\sum_{n \geq 1} B_n(x, q)t^n = \frac{(1 + (q - 1)x)t}{1 + (q - 1)x + x^2 t} + \frac{(1 + qx)^2 t}{1 + (q - 1)x + x^2 t} \sum_{n \geq 1} B_n(1 + qx, q)t^n.$$

En itérant l'équation fonctionnelle ci-dessus, on obtient la formule suivante :

$$\sum_{n \geq 1} B_n(x, q)t^n = \sum_{n \geq 1} \frac{q^{n-1}(1 + qx - x)t^n \prod_{k=1}^{n-1} ([k]_q + q^k x)^2}{\prod_{k=1}^n (q^{k-1}(1 + qx - x) + ([k - 1]_q + q^{k-1} x)^2 t)}.$$

De même on a la formule analogue pour  $\sum_{n \geq 1} C_n(x, q)t^n$  :

$$\sum_{n \geq 1} C_n(x, q)t^n = \sum_{n \geq 1} \frac{q^{n-1}(1 + qx - x)t^n \prod_{k=1}^{n-1} ([k]_q + q^k x)^2}{\prod_{k=1}^n (q^{k-1}(1 + qx - x) + ([k - 1]_q + q^{k-1} x)([k]_q + q^k x)t)}.$$

En particulier on obtient le développement en séries de fractions rationnelles des séries génératrices ordinaires pour les polynômes  $B_n(1, q)$  et  $C_n(1, q)$  en portant  $x = 1$ .

**Corollaire 5** On a :

$$\sum_{n \geq 1} B_n(1, q)t^n = \sum_{n \geq 1} \frac{([n]_q!)^2 q^n t^n}{(q + [1]_q^2 t)(q^2 + [2]_q^2 t) \cdots (q^n + [n]_q^2 t)},$$

$$\sum_{n \geq 1} C_n(1, q)t^n = \sum_{n \geq 1} \frac{([n]_q!)^2 q^n t^n}{(q + [1]_q [2]_q t)(q^2 + [2]_q [3]_q t) \cdots (q^n + [n]_q [n + 1]_q t)}.$$



Le lien entre chemins de Dyck et fractions continues de Stieltjes (dénomérées  $S$ -fraction dans [21]) a été explicité pour la première fois dans une identité de Touchard [28] (pour une extension de cette identité, voir [12,29]) :

$$\frac{1}{1 - \frac{a_0 b_1 t}{1 - \frac{a_1 b_2 t}{1 - \frac{a_2 b_3 t}{\ddots}}}} = 1 + a_0 b_1 t + \cdots + \left( \sum_{\delta \in \mathcal{D}_{2n}} c(\delta) \right) t^n + \cdots \quad (15)$$

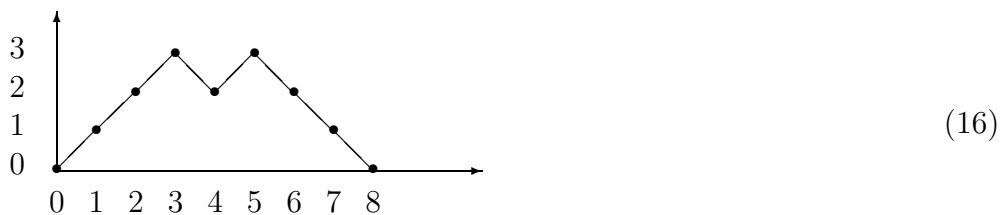
Dans cette écriture,  $\mathcal{D}_{2n}$  désigne l'ensemble des chemins de Dyck de  $(2n + 1)$  étapes allant de 0 à 0 en  $2n$  pas, c'est-à-dire des suites  $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2n})$  telles que :

- (i)  $\delta_0 = \delta_{2n} = 0$  et pour tout  $0 \leq i \leq 2n$ ,  $\delta_i \geq 0$ ;
- (ii) pour tout  $1 \leq i \leq 2n$ , ou bien  $\delta_i = \delta_{i-1} + 1$  (le pas est une montée) ou bien  $\delta_i = \delta_{i-1} - 1$  (le pas est une descente).

Dans le couple  $(i, \delta_i)$ , l'abscisse  $i$  est le numéro de l'étape et l'ordonnée  $\delta_i$  est la hauteur de l'étape. On convient de définir la *hauteur* d'un pas  $(\delta_{i-1}, \delta_i)$  comme celle de son étape d'arrivée  $(i, \delta_i)$  pour  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . Il est clair qu'un chemin  $\delta$  possède  $n$  montées et  $n$  descentes. Soit  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  (resp.  $(d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_n - 1)$ ) la suite des hauteurs des  $n$  montées (resp. des  $n$  descentes) de  $\delta$ . Alors le coefficient  $c(\delta)$  qui apparaît dans la formule (15) est le monôme commutatif

$$c(\delta) = a_{d_1-1} b_{d_1} a_{d_2-1} b_{d_2} \dots a_{d_n-1} b_{d_n}.$$

Un chemin de Dyck peut être ainsi visualisé dans le plan  $\mathbb{Z}^2$  en joignant tous les points consécutifs  $(i, \delta_i)$  et  $(i + 1, \delta_{i+1})$  par un segment. Par exemple, le graphe correspondant au chemin de Dyck  $(0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0)$  est donné par :



Soit  $\sigma \in \mathcal{G}_n$  une permutation de Genocchi. Suivant Biane [3], il est commode de considérer  $\sigma$  comme une application bijective d'un ensemble d'objets  $[2n]$  dans un ensemble d'images  $[2n]$ . La permutation est identifiée à un graphe bipartite comportant  $2n$  sommets et  $2n$  arêtes  $k \rightarrow \sigma(k)$ , où  $k$  décrit les  $2n$  objets (représentés par les points en haut) et  $\sigma(k)$  décrit les  $2n$  images

(représentés par les points en bas). Par exemple, pour la permutation de Genocchi  $\sigma = 4\ 2\ 7\ 1\ 6\ 5\ 8\ 3 \in \mathcal{G}_4$ , le graphe bipartite est le suivant :



Pour  $i$  variant de 1 à  $2n$ , nous définissons la  $i$ -ième *restriction*  $\sigma_i$  de  $\sigma$  comme le sous-graphe dont l'ensemble des sommets est restreint aux objets  $\{1, 2, \dots, i\}$  et aux images  $\{1, 2, \dots, i\}$ , et dont l'ensemble des arêtes  $k \rightarrow \sigma(k)$  se réduit à celle qui sont desssinables, c'est-à-dire telles que  $1 \leq k \leq i$  et  $1 \leq \sigma(k) \leq i$ . Dans une restriction les sommets qui ne sont incidents à aucune arête sont dits *libres*.

Nous sommes en mesure à présent de définir l'application  $\psi$  de  $\mathcal{G}_n$  dans  $\mathcal{D}_{2n}$ . A une permutation de Genocchi  $\sigma \in \mathcal{G}_n$  nous faisons correspondre par l'application  $\psi$  (voir §6.2 pour une illustration) le chemin  $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2n})$  défini de la manière suivante :  $\delta_0 = 0$ , puis

- le  $i$ -ième pas est une montée si  $i \leq \sigma^{-1}(i)$  ( $\iff \sigma^{-1}(i)$  est pair),
- le  $i$ -ième pas est une descente si  $i > \sigma^{-1}(i)$  ( $\iff \sigma^{-1}(i)$  est impair).

**Lemme 6** *Le chemin  $\delta = \psi(\sigma)$  ainsi construit est un chemin de Dyck appartenant à  $\mathcal{D}_{2n}$ . Plus précisément, pour  $1 \leq j \leq n$ , la hauteur*

- $\delta_{2j}$  de la  $(2j)$ -ième pas est le nombre de sommets libres dans la  $(2j)$ -ième restriction de  $\sigma$ ,
- $\delta_{2j-1}$  de la  $(2j-1)$ -ième pas est le nombre de sommets libres dans la  $(2j-1)$ -ième restriction de  $\sigma$  moins 1.

**Démonstration.** La démonstration se fait par récurrence sur le numéro de l'étape. On convient que  $\sigma_0 = \emptyset$ . L'énoncé est évidemment vrai pour  $j = 1$ . Supposons que l'énoncé ci-dessus est vrai pour  $1, 2, \dots, j-1$ , alors le  $j$ -ième pas est une montée si et seulement si on passe de  $\sigma_{j-1}$  à  $\sigma_j$  par la seule création de deux sommets libres (un objet et une image, ceci implique que  $j$  est impair) ou deux sommets avec une arête qui les relie (ceci implique que  $j$  est pair). Le  $j$ -ième pas une descente si et seulement si on passe de  $\sigma_{j-1}$  à  $\sigma_j$  par la création de deux sommets qui sont incidents aux deux nouvelles arêtes (ceci implique que  $j$  est pair) ou deux sommets avec une arête incidente au nouveau sommet image et non au nouveau sommet objet (ceci implique que  $j$  est impair).  $\square$

Il est clair que l'application  $\psi$  ainsi définie n'est pas bijective. Nous allons construire l'ensemble des antécédents d'un chemin  $\delta$  par l'application  $\psi$  dans

le paragraphe suivant.

### 3 Première interprétation de $D_n(x, y, q)$ dans $\mathcal{G}_n$

Soit  $\sigma$  une permutation de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . On identifie  $\sigma$  avec le mot  $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ . Une *inversion* dans le mot  $\sigma$  est un couple  $(i, j)$  tel que  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , on note “inv  $\sigma$ ” le nombre d’inversion dans  $\sigma$ . Pour  $i \in [n]$ , on dit que  $i$  est un *point d’excédance* de  $\sigma$  si  $\sigma(i) > i$ . L’ensemble des points d’excédances de  $\sigma$  est noté  $\text{EXC } \sigma$ . Soit  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  la suite croissante des points d’excédance et  $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}$  la suite croissante des points de non-excédance de  $\sigma$ . On forme deux sous-mots de  $\sigma$  :

$$\sigma_{\text{exc}} = \sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_k) \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{nexc}} = \sigma(j_1)\sigma(j_2)\dots\sigma(j_{n-k}),$$

et note “ine  $\sigma$ ” le nombre d’inversions dans les deux mots  $\sigma_{\text{exc}}$  et  $\sigma_{\text{nexc}}$ , c’est-à-dire,

$$\text{ine } \sigma = \text{inv } \sigma_{\text{exc}} + \text{inv } \sigma_{\text{nexc}}. \quad (18)$$

Par ailleurs, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , si l’on pose

$$p_{\sigma(i)} = \begin{cases} \#\{j \mid 1 \leq j < i \text{ et } \sigma(j) > \sigma(i)\}, & \text{si } \sigma(i) > i, \\ \#\{j \mid i < j \leq n \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}, & \text{si } \sigma(i) \leq i, \end{cases}$$

on a aussi  $\text{ine } \sigma = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ .

La statistique de Denert de  $\sigma$ , notée “den  $\sigma$ ,” est alors définie par (voir [5,15])

$$\text{den } \sigma = \sum_{i \in \text{EXC } \sigma} i + \text{ine } \sigma. \quad (19)$$

Soit “sid  $\sigma$ ” le *nombre des saillants inférieurs impairs à droite* de  $\sigma$  (voir [25]), c’est-à-dire,

$$\text{sid } \sigma = \#\{i \mid \sigma(i) \text{ impair et } \sigma(i) < \sigma(j) \text{ pour tout } j > i\}.$$

Enfin, on définit

$$\text{fex } \sigma = \#\{i \mid \sigma(i) \text{ pair, } \sigma(i) \geq i \text{ et } \sigma(j) \leq \sigma(i) \text{ pour tout } i \leq j \leq \sigma(i)\},$$

qui énumère les points fixes et les points d'excédance  $i$  tels que  $\sigma(i)$  est pair et les arêtes  $i \rightarrow \sigma(i)$  *croisent* toutes les arêtes  $j \rightarrow \sigma(j)$  pour  $i \leq j \leq \sigma(i)$ , comme indiqué dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & \cdots & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & \cdots & n \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 1 & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma(i) & \cdots & n
 \end{array} \tag{20}$$

**Exemple 1** Pour la permutation d'ordre 8

$$\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \mathbf{4} & 2 & \mathbf{6} & \mathbf{8} & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

on voit que  $\text{sid } \sigma = \#\{6, 7, 8\} = 3$ ,  $\text{fex } \sigma = \#\{2, 4\} = 2$ ,  $\text{exc } \sigma = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ,  $\sigma_{\text{exc}} = \mathbf{468}$  et  $\sigma_{\text{nexc}} = 23157$ . D'où :

$$\text{den } \sigma = 1 + 3 + 4 + \text{inv}(\mathbf{468}) + \text{inv}(23157) = 10.$$

A présent, nous allons énumérer les antécédents d'un chemin  $\delta$  par l'application  $\psi : \sigma \mapsto \delta$  que nous avons définie dans le paragraphe précédent. Partant d'un chemin  $\delta$  élément de  $\mathcal{D}_{2n}$ , nous construisons une permutation antécédente  $\sigma$  à partir de la suite de ses restrictions  $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{2n})$  avec  $\sigma_0 = \emptyset$  :

- Si le  $(2j - 1)$ -ième pas de  $\delta$  est une montée, le passage de  $\sigma_{2j-2}$  à  $\sigma_{2j-1}$  est déterminé, il se résume à la création des deux nouveaux sommets libres.
- Si le  $(2j)$ -ième pas de  $\delta$  est une montée, le passage de  $\sigma_{2j-1}$  à  $\sigma_{2j}$  n'est pas déterminé de manière unique, il faut choisir parmi les  $(\delta_{2j-1} + 1)/2 + 1$  images libres celle qui sera l'extrémité de l'arête  $2j \rightarrow \sigma(2j)$ . Il est clair que  $p_{\sigma(2j)}$  est égal au nombre des images libres à gauche de  $\sigma(2j)$ .
- Si le  $(2j - 1)$ -ième pas de  $\delta$  est une descente, le passage de  $\sigma_{2j-2}$  à  $\sigma_{2j-1}$  n'est pas déterminé de manière unique, il faut choisir parmi les  $\delta_{2j-2}/2$  objets libres celui qui sera l'antécédent de  $(2j - 1)$  par  $\sigma$ . Il est clair que  $p_{\sigma(2j-1)}$  est égal au nombre des objets libres à gauche de  $\sigma^{-1}(2j - 1)$ .
- Si le  $(2j)$ -ième pas de  $\delta$  est une descente, le passage de  $\sigma_{2j-1}$  à  $\sigma_{2j}$  n'est pas déterminé de manière unique, il faut choisir parmi les  $(\delta_{2j-1} + 1)/2$  objets libres celui qui sera l'antécédent de  $2j$  par  $\sigma$  et parmi les  $(\delta_{2j-1} + 1)/2$  images libres celle qui sera l'extrémité de l'arête  $2j \rightarrow \sigma(2j)$ . Il est clair que  $p_{\sigma(2j)}$  (resp.  $p_{2j}$ ) est égal au nombre des images (resp. objets) libres à gauche de  $\sigma(2j)$  (resp.  $p_{\sigma^{-1}(2j)}$ ).

En résumé, à une descente de hauteur  $d = 2h - 1$  correspond  $h^2$  choix possibles pour le prolongement de  $\sigma_{j-1}$  à  $\sigma_j$ , soit  $h = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$ ; à une descente de hauteur  $d = 2h$  correspond  $h$  choix possibles pour le prolongement de  $\sigma_{j-1}$  à  $\sigma_j$ , soit  $h = \lceil \frac{d}{2} \rceil$ ; à une montée de hauteur  $d = 2h - 1$  correspond  $h + 1$  choix possibles

pour le prolongement de  $\sigma_{j-1}$  à  $\sigma_j$ , soit  $h+1 = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil + 1$ . En revanche à une montée de hauteur  $d = 2h$  correspond un seul choix possible. Une permutation  $\sigma$  étant déterminée par la suite de ses prolongements, nous en déduisons le résultat suivant.

**Lemme 7** Soient  $\delta \in \mathcal{D}_{2n}$  un chemin de Dyck et  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  la suite des hauteurs des  $n$  montées de  $\delta$ . En remplaçant dans le monôme  $c(\delta) = a_{d_1-1}b_{d_1}a_{d_2-1}b_{d_2} \dots a_{d_n-1}b_{d_n}$

- chaque  $a_{2j-2}$  par 1,
- chaque  $a_{2j-1}$  par  $1 + q + \dots + q^{j-1} + xq^j$ ,
- chaque  $b_{2j}$  par  $1 + q + \dots + q^{j-1}$ ,
- chaque  $b_{2j-1}$  par  $(1 + q + \dots + xq^{j-1})(y + q + \dots + q^{j-1})$ ,

on obtient le polynôme générateur des permutations de Genocchi de  $\mathcal{G}_n$  antécédentes de  $\delta$  par l'application  $\psi$ :

$$\sum_{\sigma \in \psi^{-1}(\delta)} x^{\text{fex } \sigma} y^{\text{sid } \sigma} q^{\text{ine } \sigma}.$$

Par sommation sur tous les chemins de Dyck  $\delta$ , on en déduit d'après l'identité de Touchard (15) la proposition suivante :

**Proposition 8** On a l'identité

$$1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} x^{\text{fex } \sigma} y^{\text{sid } \sigma} q^{\text{ine } \sigma} t^n = \frac{1}{1 - \frac{xyt}{1 - \frac{(1+xq)t}{1 - \frac{(1+qx)(y+q)t}{1 - \frac{[2]_q([2]_q + q^2x)t}{\dots}}}}}}.$$

On notera que pour une permutation de Genocchi  $\sigma \in \mathcal{G}_n$ , la somme des points d'excédances est  $n^2$ , donc  $\text{den } \sigma = n^2 + \text{ine } \sigma$ . La comparaison du théorème 2 et la proposition 8 mène au résultat suivant.

**Théorème 9** On a l'interprétation combinatoire suivante :

$$q^{n^2} xy D_n(x, y, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} x^{\text{fex } \sigma} y^{\text{sid } \sigma} q^{\text{den } \sigma}.$$

Soit  $\mathcal{G}'_n = \{\sigma \in \mathcal{G}_n \mid \text{sid } \sigma = 1\}$ . En posant  $y = 1$  et  $y = 0$  dans le théorème 9, on obtient immédiatement les interprétations combinatoires des  $q$ -polynômes de Gandhi  $B_n(x, q)$  et  $C_n(x, q)$ .

**Corollaire 10** *On a :*

$$B_n(x, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} x^{\text{fex } \sigma - 1} q^{\text{den } \sigma - n^2}, \quad C_n(x, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}'_n} x^{\text{fex } \sigma - 1} q^{\text{den } \sigma - n^2}.$$

#### 4 Interprétation dans le modèle des pistolets

Une application  $f : [n] \rightarrow [n]$  est dite *excédante* si  $f(i) \geq i$  pour tout  $i \in [n]$ . L'ensemble des applications excédantes sur  $[n]$  est noté  $\mathcal{F}_n$ . Le graphe de  $f$  est l'ensemble  $\{(i, f(i)) \mid i \in [n]\}$ . Par abus de langage, on identifie chaque point  $(i, f(i))$  avec son abscisse  $i$ . Soit  $f \in \mathcal{F}_n$  une application excédante. On dit que  $i \in [n]$  est un *point fixe non-doublé* de  $f$  si  $f^{-1}(i) = \{i\}$ . On note  $\text{FND } f$  (resp.  $\text{fnd } f$ ) l'ensemble (resp. nombre) des points fixes non-doublés de  $f$ . Par ailleurs on définit l'ensemble des *premiers points horizontaux* de  $f$  par :

$$\text{PPH } f = \{\min f^{-1}(1), \min f^{-1}(2), \dots, \min f^{-1}(n)\}. \quad (21)$$

Pour tout  $i \in [n]$ , on définit

$$\text{dinv}(f, i) = \#\{j \mid i < j, f(i) > f(j)\}, \quad (22)$$

qui est le *nombre d'inversions à droite* relatives à  $i$  de  $f$ .

**Définition 1** Pour  $f \in \mathcal{F}_n$ , on définit la statistique “den” de  $f$  par :

$$\text{den } f = \sum_{i \in \text{PPH } f} (i + \text{dinv}(f, i)). \quad (23)$$

On rappelle que l'ensemble des pistolets  $\mathcal{P}_n$  (voir §1.3) peut s'écrire comme suit :

$$\mathcal{P}_n = \{f \in \mathcal{F}_{2n} \mid f([2n]) = \{2, 4, \dots, 2n\}\}.$$

Soit  $f$  dans  $\mathcal{P}_n$  et  $1 \leq i \leq 2n - 2$ , l'entier  $i$  est dit *point maximal* de  $f$  si  $f(i) = 2n$ . On note  $\text{max } f$  le nombre des points maximaux de  $f$ .

**Exemple 2** Voici une application excédante  $f$  et son graphe, dans lequel le seul point fixe non-doublé est représenté par  $\ominus$ , les points correspondants aux éléments dans  $\text{PPH } f$  sont représentés par  $\otimes$  et  $\otimes$ , et les autres par  $\odot$ . On a  $\text{max } f = 2$ ,  $\text{FND } f = \{2\}$ ,  $\text{fnd } f = 1$  et  $\text{den } f = 12$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(i)$	4	2	6	8	6	8	8	8

8				⊗		⊙	⊙	⊙
6			⊗		⊙			
4	⊗							
2		⊙						
	1	2	3	4	5	6	7	8

**Théorème 11** *Les  $q$ -polynômes de Gandhi  $D_n(x, y, q)$  ont l'interprétation combinatoire suivante :*

$$D_n(x, y, q) = \sum_{f \in \mathcal{P}_n} x^{\max f} y^{\text{fnd } f} q^{n^2 - \text{den } f}. \quad (24)$$

On note  $\mathcal{P}'_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_n$  dont chaque élément n'a aucun point fixe non-doublé. En posant  $y = 1$  et  $y = 0$  dans les théorèmes 11, on obtient immédiatement les interprétations combinatoires des  $q$ -polynômes de Gandhi  $B_n(x, q)$  et  $C_n(x, q)$ .

**Corollaire 12** *On a :*

$$B_n(x, q) = \sum_{f \in \mathcal{P}_n} x^{\max f} q^{n^2 - \text{den } f}, \quad C_n(x, q) = \sum_{f \in \mathcal{P}'_n} x^{\max f} q^{n^2 - \text{den } f}.$$

La démonstration du théorème 11 s'appuie sur une transformation  $T$  de  $\mathcal{P}_n$  dans  $\mathcal{P}_{n-1}$ . Rappelons que pour tout  $f \in \mathcal{P}_n$ , l'image de  $f$  par  $T$ , notée  $g = T(f)$ , est définie par

$$g(i) = \min\{2n - 2, f(i)\} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq 2n - 2.$$

Par exemple, on a  $T(42686888) = 426666$ . Il est clair que  $T$  est une surjection de  $\mathcal{P}_n$  dans  $\mathcal{P}_{n-1}$ . Pour  $0 \leq r \leq k - 2 \leq n - 1$ , on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n,k} &= \{f \in \mathcal{P}_n \mid \max f + 2 = k\}, \\ \mathcal{P}_{n,k}^r &= \left\{f \in \mathcal{P}_{n,k} \mid \#\{j < \min f^{-1}(2n - 2) \mid f(j) = 2n\} = r\right\}, \end{aligned}$$

et pose, pour tout  $g \in \mathcal{P}_{n-1}$ ,

$$\mathcal{P}_{n,k}(g) = \mathcal{P}_{n,k} \cap T^{-1}(g) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{n,k}^r(g) = \mathcal{P}_{n,k}^r \cap T^{-1}(g).$$

On notera que si  $f \in \mathcal{P}_{n,k}$ , alors  $T(f) \in \mathcal{P}_{n-1,\ell}$  avec  $k - 1 \leq \ell \leq n$ .

**Lemme 13** *Soient  $k$  et  $\ell$  deux entiers tels que  $2 \leq k \leq n + 1$  et  $k - 1 \leq \ell \leq n$ . Pour tout  $g \in \mathcal{P}_{n-1,\ell}$ , on a :*

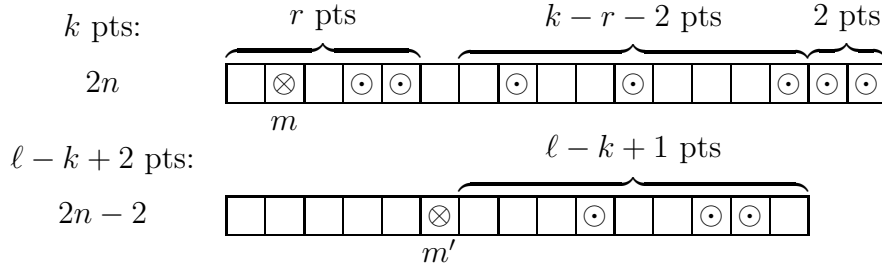


Fig. 1. Les lignes  $2n - 2$  et  $2n$  du graphe de  $f \in \mathcal{P}_{n,k}^r(g)$  pour  $r \geq 1$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}(g)} q^{\text{den } f - \text{den } g} y^{\text{fnd } f - \text{fnd } g} \\
&= \begin{cases} \sum_{r=0}^{k-2} \binom{\ell - r - 1}{k - r - 2} q^{r+1-k+2n}, & \text{si } k - 1 < \ell; \\ \sum_{r=0}^{k-2} \binom{\ell - r - 1}{k - r - 2} q^{r+1-k+2n} + (y - 1)q^{2n-1}, & \text{si } k - 1 = \ell. \end{cases} \quad (25)
\end{aligned}$$

**Démonstration.** D'après la définition (23), pour tout  $f \in \mathcal{P}_{n,k}^r(g)$ , on a :

$$\text{den } f - \text{den } g = \sum_{i \in \text{PPH } f} (i + \text{dinv}(f, i)) - \sum_{i \in \text{PPH } g} (i + \text{dinv}(g, i)). \quad (26)$$

On se propose de calculer la différence ci-dessus. Pour ce faire, on distingue les deux cas suivants.

- Si  $r \geq 1$ , on pose  $m = \min f^{-1}(2n) = \min g^{-1}(2n-2)$  et  $m' = \min f^{-1}(2n-2)$  (voir la figure 1). On a :

$$\begin{aligned}
& \text{PPH } f = \text{PPH } g + \{m'\}; \\
& \text{dinv}(f, i) - \text{dinv}(g, i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in \text{PPH } g \text{ et } i \neq m; \\ \ell + 2 - k, & \text{si } i = m; \end{cases} \\
& \text{dinv}(f, m') = \#\{j \mid m' < j \leq 2n, 2n - 2 < f(j)\} \\
& \quad = (2n - m') - (k - r + \ell - k + 1) \\
& \quad = 2n + r - m' - \ell - 1.
\end{aligned}$$

- Si  $r = 0$  (voir la figure 2), on pose  $m' = \min f^{-1}(2n)$ . On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \text{PPH } f = \text{PPH } g + \{m'\}; \\
& \text{dinv}(f, i) - \text{dinv}(g, i) = 0, \quad \text{pour tout } i \in \text{PPH } g; \\
& \text{dinv}(f, m') = \#\{j \mid m' < j \leq 2n, 2n < f(j)\} \\
& \quad = (2n - m') - (k - 1) = 2n - m' - k + 1.
\end{aligned}$$



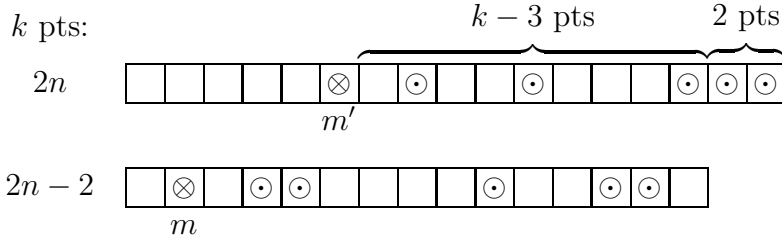


Fig. 2. Les lignes  $2n - 2$  et  $2n$  du graphe de  $f \in \mathcal{P}_{n,k}^0(g)$ .

Compte tenu des deux cas précédents, on déduit de (26) que pour tout  $r \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{den } f - \text{den } g &= \sum_{i \in \text{PPH}_g} (\text{div}(f, i) - \text{div}(g, i)) + m' + \text{div}(f, m') \\ &= 2n + 1 + r - k. \end{aligned}$$

D'autre part, si  $g \in \mathcal{P}_{n-1,\ell}$ , alors  $\# \mathcal{P}_{n,k}^r(g) = \binom{\ell-r-1}{k-r-2}$ . Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}(g)} q^{\text{den } f - \text{den } g} &= \sum_{r=0}^{k-2} \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}^r(g)} q^{\text{den } f - \text{den } g} \\ &= \sum_{r=0}^{k-2} \binom{\ell-r-1}{k-r-2} q^{2n+1+r-k}. \end{aligned} \quad (27)$$

Considérons maintenant les points fixes non-doublés de  $f \in \mathcal{P}_{n,k}^r(g)$ .

Si  $k - 1 < \ell$ , comme  $f^{-1}(2n - 2)$  contient au moins deux points, on a  $\text{FND } f = \text{FND } g$ . D'où (25) pour  $k - 1 < \ell$ .

Si  $k - 1 = \ell$ , on a

$$\text{FND } f = \begin{cases} \text{FND } g + \{2n - 2\}, & \text{si } r = k - 2, \\ \text{FND } g, & \text{si } r < k - 2. \end{cases}$$

En fait  $\mathcal{P}_{n,k}^{k-2}(g)$  ne contient qu'un seul élément  $f$ , et ce dernier vérifie

$$\text{fnd } f - \text{fnd } g = 1, \quad \text{den } f - \text{den } g = 2n - 1.$$

D'où

$$\sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}(g)} q^{\text{den } f - \text{den } g} y^{\text{fnd } f - \text{fnd } g} = \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}(g) \setminus \mathcal{P}_{n,k}^{k-2}(g)} q^{\text{den } f - \text{den } g} + y q^{2n-1}$$

$$= \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}(g)} q^{\text{den } f - \text{den } g} + (y-1)q^{2n-1}.$$

La formule (25) pour  $k-1 = \ell$  en découle alors en vertu de (27).  $\square$

**Remarque 1** (i) Dans le lemme 13, si l'on pose  $q = y = 1$ , alors :

$$\# \mathcal{P}_{n,k}(g) = \binom{\ell}{k-2} = \sum_{r=0}^{k-2} \binom{\ell-r-1}{k-r-2}.$$

(ii) Le fait que le second membre de (25) est un invariant par rapport à  $g$  appartenant à  $\mathcal{P}_{n-1,\ell}$ , est crucial dans la démonstration du théorème 11.

**Démonstration du théorème 11.** Posons

$$Z_n(x, y, q) = \sum_{f \in \mathcal{P}_n} x^{\max f+2} y^{\text{fnd } f} q^{\text{den } f} = \sum_{k=2}^{n+1} Z_{n,k} x^k. \quad (28)$$

Le théorème 11 équivaut alors à l'identité :

$$D_n(x, y, q) = \frac{q^{n^2}}{x^2} Z_n(x, y, 1/q). \quad (29)$$

D'après (2), il suffit de vérifier

$$Z_n(x, y, q) = x^2 q^{2n-1} \Delta_{1/q} Z_{n-1}(x, y, q) + x q^{2n-1} (y-1) Z_{n-1}(x, y, q). \quad (30)$$

En effet, le lemme 13 implique que

$$\begin{aligned} Z_{n,k} &= \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}} q^{\text{den } f} y^{\text{fnd } f} \\ &= \sum_{\ell=k-1}^n \sum_{g \in \mathcal{P}_{n-1,\ell}} \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}(g)} q^{\text{den } f} y^{\text{fnd } f} \\ &= \sum_{\ell=k-1}^n \sum_{g \in \mathcal{P}_{n-1,\ell}} q^{\text{den } g} y^{\text{fnd } g} \sum_{f \in \mathcal{P}_{n,k}(g)} q^{\text{den } f - \text{den } g} y^{\text{fnd } f - \text{fnd } g} \\ &= \sum_{\ell=k-1}^n \sum_{r=0}^{k-2} \binom{\ell-r-1}{k-r-2} q^{r+1-k+2n} Z_{n-1,\ell} + (y-1) q^{2n-1} Z_{n-1,k-1}. \quad (31) \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{\ell=k-1}^n \sum_{r=0}^{k-2} \binom{\ell-r-1}{k-r-2} q^{r+1-k+2n} Z_{n-1,\ell} x^k \\
&= q^{2n+1} \sum_{\ell=1}^n \sum_{r=0}^{\ell-1} \left\{ \sum_{k=r+2}^{\ell+1} \binom{\ell-r-1}{k-r-2} \left(\frac{x}{q}\right)^k \right\} q^r Z_{n-1,\ell} \\
&= q^{2n+1} \sum_{\ell=1}^n \sum_{r=0}^{\ell-1} \left\{ \left(\frac{x}{q}\right)^{r+2} \left(1 + \frac{x}{q}\right)^{\ell-r-1} \right\} q^r Z_{n-1,\ell} \\
&= x^2 q^{2n-1} \sum_{\ell=1}^n \frac{(1+x/q)^\ell - x^\ell}{1+x/q-x} Z_{n-1,\ell} \\
&= x^2 q^{2n-1} \Delta_{1/q} Z_{n-1}(x, y, q). \tag{32}
\end{aligned}$$

Enfin, en substituant (31) dans (28) et tenant compte de (32), on obtient (30).  $\square$

## 5 Seconde interprétation de $D_n(x, y, q)$ dans $\mathcal{G}_n$

Notre définition (23) de “den” pour les applications excédantes nous a été inspirée par la définition de “den” pour les permutations [5]. On se propose de préciser ce point dans ce paragraphe. Cette définition nous permet de donner une seconde interprétation de  $D_n(x, y, q)$  sur  $\mathcal{G}_n$ .

**Lemme 14** *Soient  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une permutation et  $j \in [n]$  un entier fixés. On a*

- (i)  $\#\{i \mid i \geq j > \sigma(i)\} = \#\{i \mid \sigma(i) \geq j > i\}$ .
- (ii) si  $\sigma(j) < j$ , alors il existe un unique entier  $k$  tel que  $\sigma(k) \geq j > k$  et

$$\#\{i \mid i > j > \sigma(j) > \sigma(i)\} = \#\{i \mid \sigma(i) > \sigma(k) \geq j > i\}.$$

**Démonstration.** (i) Posons  $\mathcal{A} = \{i \mid i \geq j > \sigma(i)\}$  et  $\mathcal{B} = \{i \mid \sigma(i) \geq j > i\}$ . Alors

$$\begin{aligned}
\#\mathcal{A} + \#\{i \mid i \geq j, j \leq \sigma(i)\} &= \#\{i \mid i \geq j\}, \\
\#\mathcal{B} + \#\{i \mid i \geq j, j \leq \sigma(i)\} &= \#\{i \mid \sigma(i) \geq j\}.
\end{aligned}$$

On a en outre  $\#\{i \mid i \geq j\} = \#\{i \mid \sigma(i) \geq j\} = n - j + 1$ . D'où  $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{B}$ .

(ii) Si  $\sigma(j) < j$ , on pose  $\mathcal{C} = \{i \mid i > j > \sigma(j) > \sigma(i)\} \subseteq \mathcal{A}$ . Comme  $j \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}$ , on a

$$0 \leq \#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{A} - 1 = \#\mathcal{B} - 1.$$

D'autre part, pour tout  $k \in \mathcal{B}$ , on pose  $\mathcal{H}(k) = \{i \mid \sigma(i) > \sigma(k) \geq j > i\} \subseteq \mathcal{B}$ . De façon évidente  $k \notin \mathcal{H}(k)$ , donc

$$0 \leq \#\mathcal{H}(k) \leq \#\mathcal{B} - 1.$$

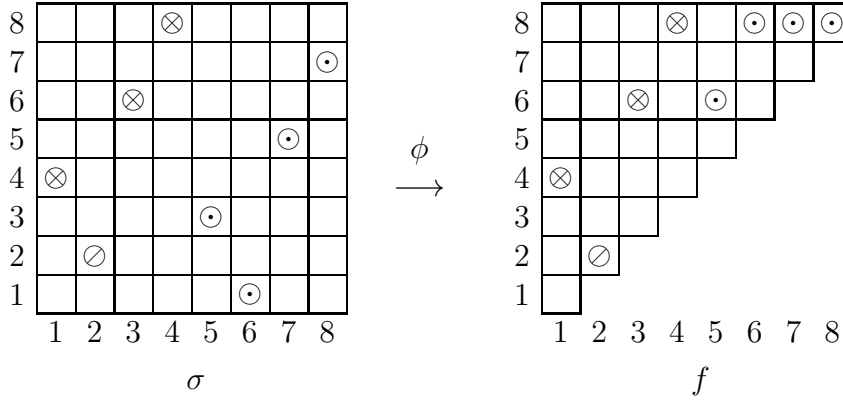
De plus, pour  $k, k' \in \mathcal{B}$  et  $k \neq k'$ , on a  $\#\mathcal{H}(k) \neq \#\mathcal{H}(k')$ , d'où  $\{\#\mathcal{H}(k) \mid k \in \mathcal{B}\} = \{0, 1, 2, \dots, \#\mathcal{B} - 1\}$ . Par conséquent, il existe un unique entier  $k \in \mathcal{B}$  satisfaisant  $\#\mathcal{H}(k) = \#\mathcal{C}$ .  $\square$

Pour toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , on construit une application excédante  $f = \phi(\sigma)$  dans  $\mathcal{F}_n$  comme suit :

$$f(j) = \begin{cases} \sigma(j), & \text{si } \sigma(j) \geq j, \\ \sigma(k), & \text{si } \sigma(j) < j, \end{cases}$$

où  $k$  est l'entier déterminé par la condition (ii) du lemme 14. On vérifie sans peine que  $\phi$  est une bijection de  $\mathcal{S}_n$  dans  $\mathcal{F}_n$  (voir [6] pour plus de détail).

**Exemple 3** Pour la permutation  $\sigma = 42683157$ , on trouve  $f = \phi(\sigma) = 42686888$ . La construction de  $f$  est illustrée dans les deux figures suivantes :



La vérification des propriétés suivantes de  $\phi$  est laissée au lecteur.

**Proposition 15** Soit  $f = \phi(\sigma) \in \mathcal{F}_n$  avec  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , alors

- (i)  $\text{FND } f = \text{FIX } \sigma$ .
- (ii)  $\text{PPH } f = \text{EXC } \sigma + \text{FIX } \sigma$ .
- (iii) Pour  $i \notin \text{PPH } f$ , on a

$$\#\{j \in \text{PPH } f \mid j < i, f(j) > f(i)\} = \#\{j \mid j > i, \sigma(j) < \sigma(i)\}.$$

- (iv) Si  $n$  est un entier pair, alors  $f \in \mathcal{P}_{n/2}$  si et seulement si  $\sigma^{-1} \in \mathcal{G}_{n/2}$ .

A chaque permutation  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n) \in \mathcal{S}_n$ , on associe les trois permutations suivantes :

$$\mathbf{i}(\sigma) = \sigma^{-1},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\sigma) &= \sigma(n)\sigma(n-1)\cdots\sigma(1), \\ \mathbf{c}(\sigma) &= (n+1-\sigma(1))(n+1-\sigma(2))\cdots(n+1-\sigma(n)).\end{aligned}$$

Il est clair que  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{c}$  définissent trois *involutions* sur  $\mathcal{S}_n$ .

**Théorème 16** *Soit  $f = \phi(\sigma) \in \mathcal{F}_n$  avec  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , alors*

$$\sum_{i \in \text{PPH } f} \text{dinv}(f, i) = \text{ine } \mathbf{i}\sigma = \text{ine } \sigma = \text{ine } \mathbf{r}\mathbf{c}(\sigma) = \text{ine } \mathbf{i}\mathbf{r}\mathbf{c}(\sigma).$$

**Démonstration.** Par (22), on peut écrire

$$\sum_{i \in \text{PPH } f} \text{dinv}(f, i) = \#\{(i, j) \mid i < j, f(i) > f(j), i \in \text{PPH } f\}.$$

D'autre part, d'après la proposition 15, on a :

$$\begin{aligned}\text{inv}(\mathbf{i}\sigma)_{\text{nexc}} &= \#\{(i, j) \mid i < j, f(i) > f(j), i \in \text{PPH } f, j \in \text{PPH } f\}; \\ \text{inv}(\mathbf{i}\sigma)_{\text{exc}} &= \sum_{\sigma(j) < j} \#\{i \mid i > j, \sigma(i) < \sigma(j)\} \\ &= \sum_{j \notin \text{PPH } f} \#\{i \mid i < j, f(i) > f(j), i \in \text{PPH } f\} \\ &= \#\{(i, j) \mid i < j, f(i) > f(j), i \in \text{PPH } f, j \notin \text{PPH } f\}.\end{aligned}$$

D'où la première identité. Pour la seconde identité, en utilisant le lemme 14, on a :

$$\begin{aligned}\text{ine } \sigma &= \text{inv } \sigma_{\text{exc}} + \text{inv } \sigma_{\text{nexc}} \\ &= \text{inv } \sigma_{\text{exc}} + \#\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j); \sigma(i) \leq i, \sigma(j) \leq j\} \\ &= \text{inv } \sigma_{\text{exc}} + \#\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j); \sigma(i) < i, \sigma(j) < j\} \\ &\quad + \sum_{\sigma(i)=i} \#\{j \mid j > i > \sigma(j)\} \\ &= \text{inv } \sigma_{\text{exc}} + \text{inv}(\mathbf{i}\sigma)_{\text{exc}} + \sum_{\sigma(i)=i} \#\{j \mid \sigma(j) > \sigma(i) > j\} = \text{ine } \mathbf{i}\sigma.\end{aligned}$$

La troisième identité se démontre de la même façon, et on se permet de ne pas reproduire sa démonstration. Enfin, la dernière identité est une conséquence immédiate des deux précédentes.  $\square$

**Théorème 17** *Soit  $f = \phi(\sigma) \in \mathcal{F}_{2n}$  avec  $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ .*

- (i) *Si  $f \in \mathcal{P}'_n$ , alors  $\text{den } f = \text{den } \sigma$ ;*
- (ii) *Si  $f \in \mathcal{P}_n$ , alors  $\text{den } f = \text{den } \mathbf{r}\mathbf{c}(\sigma)$ .*

**Démonstration.** (i) D'après la proposition 15 et le théorème 16, on a :

$$\begin{aligned} \text{den } f &= \sum_{i \in \text{PPH } f} (i + \text{dinv}(f, i)) \\ &= \sum_{i \in \text{EXC } \sigma} i + \sum_{i \in \text{FIX } \sigma} i + \text{ine } \sigma = \text{den } \sigma + \sum_{i \in \text{FIX } \sigma} i. \end{aligned}$$

Si  $f \in \mathcal{P}'_n$ , alors  $\text{FIX } \sigma = \emptyset$ . On a  $\text{den } f = \text{den } \sigma$ .

(ii) Il est clair que  $2n + 1 - i$  est un point d'excédance de  $\mathbf{rc}(\sigma)$  ssi  $\sigma(i) < i$ . D'où

$$\text{den } \mathbf{rc}(\sigma) = \sum_{i \in \text{EXC } \mathbf{rc}(\sigma)} i + \text{ine } \sigma = \sum_{\sigma(i) < i} (2n + 1 - i) + \text{ine } \sigma.$$

Si  $f \in \mathcal{P}_n$ , on a  $\# \text{PPH } f = \#\{i \mid \sigma(i) < i\} = \#\{i \mid \sigma(i) \geq i\} = n$ . Donc

$$\text{den } \mathbf{rc}(\sigma) = \sum_{\sigma(i) < i} (2n + 1 - i) + \text{ine } \sigma = n(2n + 1) - \sum_{\sigma(i) < i} i + \text{ine } \sigma.$$

Comme  $n(2n + 1) = \sum_{\sigma(i) < i} i + \sum_{\sigma(i) \geq i} i$ , on en déduit  $\text{den } \mathbf{rc}(\sigma) = \text{den } f$ .  $\square$

Soit  $\sigma \in \mathcal{G}_n$  une permutation de Genocchi. On dit que  $i$  ( $i \in [2n]$ ) est un point *saillant particulier* si  $\sigma(j) < \sigma(i)$  pour tout  $j < i$ , et  $\sigma(2n) < \sigma(i) < 2n$ . On note "sap  $\sigma$ " le nombre des *points saillants particuliers* de  $\sigma$ . On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 18** *L'application  $\phi \mathbf{i} : \sigma \mapsto f$  est une bijection de  $\mathcal{G}_n$  sur  $\mathcal{P}_n$  telle que*

$$\max f = \text{sap } \sigma, \text{ fnd } f = \text{fix } \sigma \text{ et } \text{den } f = \text{den } \mathbf{irc}(\sigma).$$

Rappelons que si  $\sigma \in \mathcal{G}_n$  est une permutation de Genocchi, alors  $\text{den } \sigma = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + \text{ine } \sigma$ . La proposition suivante montre qu'on peut définir  $\text{den } \mathbf{irc}(\sigma)$  d'une façon "duale".

**Proposition 19** *Soit  $\sigma \in \mathcal{G}_n$  une permutation de Genocchi. On a :*

$$\text{den } \mathbf{irc}(\sigma) = \sigma(2) + \sigma(4) + \dots + \sigma(2n) + \text{ine } \sigma.$$

**Démonstration.** Soit  $\sigma \in \mathcal{G}_n$  et  $i \in [2n]$ , il est aisé de vérifier que  $i$  est une place d'excédance de  $\mathbf{irc}(\sigma)$  ssi  $\sigma^{-1}(2n + 1 - i)$  est une place d'excédance de  $\sigma$ . Il résulte du théorème 16 que :

$$\begin{aligned}
\text{den } \mathbf{irc}(\sigma) &= \sum_{i \in \text{EXC } \mathbf{irc}\sigma} i + \text{ine } \mathbf{irc}\sigma \\
&= \sum_{i \in \text{EXC } \sigma} (2n + 1 - \sigma(i)) + \text{ine } \sigma \\
&= n(2n + 1) - [\sigma(1) + \sigma(3) + \cdots + \sigma(2n - 1)] + \text{ine } \sigma.
\end{aligned}$$

La proposition en résulte, du fait que  $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(2n) = n(2n + 1)$ .  $\square$

Compte tenu du corollaire 18, de la proposition 19 et du théorème 11, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 20** *Les  $q$ -polynômes de Gandhi  $D_n(x, y, q)$  ont l'interprétation combinatoire suivante :*

$$D_n(x, y, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} x^{\text{sap } \sigma} y^{\text{fix } \sigma} q^{n^2 - \text{den } \mathbf{irc}(\sigma)} \quad (33)$$

Soit  $\mathcal{G}_n'' = \{\sigma \in \mathcal{G}_n \mid \text{fix } \sigma = 0\}$ . En posant  $y = 1$  et  $y = 0$  dans le théorème 20, on obtient immédiatement les interprétations combinatoires des  $q$ -polynômes de Gandhi  $B_n(x, q)$  et  $C_n(x, q)$ .

**Corollaire 21** *On a :*

$$B_n(x, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} x^{\text{sap } \sigma} q^{n^2 - \text{den } \mathbf{irc}(\sigma)}, \quad C_n(x, q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n''} x^{\text{sap } \sigma} q^{n^2 - \text{den } \mathbf{irc}(\sigma)}.$$

Comme  $B_n(x, q)$  est un polynôme en  $q$ , on déduit de la proposition 19 et le corollaire 21 le résultat suivant :

**Corollaire 22** *Pour tout  $\sigma \in \mathcal{G}_n$ , on a*

$$\sigma(2) + \sigma(4) + \cdots + \sigma(2n) + \text{ine}(\sigma) \leq n^2. \quad (34)$$

On peut aussi vérifier ce dernier corollaire par la correspondance  $\psi$  du paragraphe 2. En effet, pour tout  $\sigma \in \mathcal{G}_n$ , on a  $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(2n) = n(2n + 1)$ . Si  $\delta = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{2n}) = \psi(\sigma)$  est le chemin de Dyck correspondant, on vérifie sans peine que

$$\sum_{i=1}^n \sigma(2i - 1) - \sum_{i=1}^n \sigma(2i) = \sum_{i=0}^{2n} \delta_i. \quad (35)$$

D'où

$$\sigma(2) + \sigma(4) + \cdots + \sigma(2n) = \frac{1}{2}n(2n + 1) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2n} \delta_i. \quad (36)$$

Par ailleurs, si  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  est la suite des hauteurs des  $n$  montées de  $\delta$ , alors  $(d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_n - 1)$  est la suite des hauteurs des  $n$  descentes de  $\delta$ . D'où  $\sum_{i=0}^{2n} \delta_i = 2(d_1 + d_2 + \dots + d_n) - n$ . D'après le lemme 7, on a :

$$\text{ine}(\sigma) \leq \sum_{i=1}^n \lceil \frac{d_i + 1}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n \lceil \frac{d_i - 2}{2} \rceil. \quad (37)$$

Comme  $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil + \lceil \frac{d-2}{2} \rceil = d - 1$  pour tout entier  $d$ , on a donc

$$\text{ine}(\sigma) \leq d_1 + d_2 + \dots + d_n - n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2n} \delta_i - \frac{n}{2}. \quad (38)$$

Compte tenue de (36) et (38), on obtient (34).

Pour conclure, on notera que d'après les théorèmes 9 et 20, il doit exister une bijection  $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$  sur  $\mathcal{G}_n$  telle que

$$\text{sap } \sigma = \text{fex } \hat{\sigma} - 1, \text{ fix } \sigma = \text{sid } \hat{\sigma} - 1, n^2 - \text{den } \mathbf{irc} \sigma = \text{den } \hat{\sigma} - n^2. \quad (39)$$

Il serait intéressant de construire une telle bijection de façon algorithmique.



## 6 Appendice

### 6.1 Les quatre premières valeurs des $q$ -polynômes de Gandhi et des polynômes associés

Les  $q$ -polynômes de Gandhi de première espèce :

$$\begin{aligned} B_1(x, q) &= 1, \\ B_2(x, q) &= 1 + (q + 1)x, \\ B_3(x, q) &= 2 + q + (2 + 4q + 2q^2)x + (1 + 2q + 2q^2 + q^3)x^2, \\ B_4(x, q) &= 5 + 7q + 4q^2 + q^3 + (5 + 16q + 19q^2 + 11q^3 + 3q^4)x \\ &\quad + (3 + 10q + 17q^2 + 17q^3 + 10q^4 + 3q^5)x^2 \\ &\quad + (1 + 3q + 5q^2 + 6q^3 + 5q^4 + 3q^5 + q^6)x^3. \end{aligned}$$

Les  $q$ -nombres de Genocchi  $B_n(1, q)$  :

$$\begin{aligned} B_1(1, q) &= 1, \\ B_2(1, q) &= 2 + q, \\ B_3(1, q) &= 5 + 7q + 4q^2 + q^3, \\ B_4(1, q) &= 14 + 36q + 45q^2 + 35q^3 + 18q^4 + 6q^5 + q^6. \end{aligned}$$

Les  $q$ -polynômes de Gandhi de seconde espèce :

$$\begin{aligned} C_1(x, q) &= 1, \\ C_2(x, q) &= 1 + qx, \\ C_3(x, q) &= 1 + q + (2q + 2q^2)x + (q^2 + q^3)x^2, \\ C_4(x, q) &= 1 + 3q + 3q^2 + q^3 + (3q + 8q^2 + 8q^3 + 3q^4)x \\ &\quad + (3q^2 + 7q^3 + 7q^4 + 3q^5)x^2 + (q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6)x^3. \end{aligned}$$

Les  $q$ -nombres de Genocchi médians  $C_n(1, q)$  :

$$\begin{aligned} C_1(1, q) &= 1, \\ C_2(1, q) &= 1 + q, \\ C_3(1, q) &= (1 + q)^3, \\ C_4(1, q) &= (1 + q)^3(1 + 3q + 2q^2 + q^3). \end{aligned}$$

Les  $q$ -polynômes de Gandhi :

$$\begin{aligned} D_1(x, y, q) &= 1, \\ D_2(x, y, q) &= 1 + qx + xy, \\ D_3(x, y, q) &= C_3(x, q) + (1 + 2x + 2qx + 2qx^2 + q^2x^2)y + x^2y^2, \\ D_4(x, y, q) &= C_4(x, q) + (3 + 4q + q^2)y + (3 + 10q + 11q^2 + 3q^3)xy \\ &\quad + (6q + 11q^2 + 10q^3 + 3q^4)x^2y + (3q^2 + 3q^4 + q^5)x^3y \\ &\quad + y^2 + (2 + 3q)xy^2 + (3 + 4q + 3q^2)x^2y^2 \\ &\quad + (3q + 2q^2 + q^3)x^3y^2 + x^3y^3. \end{aligned}$$

Un calcul plus poussé montre que  $C_n(1, q)$  est divisible par  $(1 + q)^{n-1}$  si  $n$  est pair, et par  $(1 + q)^n$  si  $n \geq 3$  est impair. Lorsque  $q = 1$ , ce problème a été étudié par Barsky [2] et plus récemment par Kreweras [22]. Nous traitons cet aspect arithmétique et d'autres propriétés remarquables des  $C_n(1, q)$  dans un article ultérieur [20].

6.2 Illustration de la construction de  $\psi$  étape par étape

Pour la permutation de Genocchi  $\sigma = 42716583 \in \mathcal{G}_4$ , on a :

$$\sigma_{\text{exc}} = \begin{pmatrix} i & = & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \sigma(i) & = & 4 & 7 & 6 & 8 \\ p_i & = & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_{\text{nexc}} = \begin{pmatrix} i & = & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \sigma(i) & = & 2 & 1 & 5 & 3 \\ p_i & = & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\delta = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}) = \psi(\sigma)$  le chemin de Dyck correspondant. Dans le tableau suivant on note  $\sigma_k$  la  $k$ -ième restriction de  $\sigma$  et  $\lambda_k$  le nombre des points libres dans  $\sigma_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, 8$ . On voit que  $\lambda_k = \delta_k$  si  $k$  est pair, et  $\lambda_k = \delta_k + 1$  si  $k$  est impair, ce qui est d'ailleurs confirmé par le lemme 6.

$k$	$\sigma_k$	$(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k)$	$\delta_k$	$\lambda_k$
1			1	2
2			2	2
3			3	4
4			2	2
5			3	4
6			2	2
7			1	2
8			0	0

### 6.3 Table des statistiques

Dans la table ci-dessous, on énumère les permutations de Genocchi d'ordre 3, les pistolets et les statistiques correspondantes. On note  $D = \text{den } f = \text{den } \mathbf{irc}\sigma$ ,  $X = \max f = \text{sap } \sigma$ ,  $Y = \text{fnd } f = \text{fix } \sigma$ ,  $Z = 3^2 - \text{den } f = 3^2 - \text{den } \mathbf{irc}\sigma$ ,  $x = \text{fex } \sigma - 1$ ,  $y = \text{sid } \sigma - 1$ ,  $z = \text{den } \sigma - 3^2 = \text{ine } \sigma$ . On observe que les statistiques  $(X, Y, Z)$  et  $(x, y, z)$  sont équidistribuées sur  $\mathcal{G}_3$ , ce qui est d'ailleurs confirmé par la relation (39).

$\sigma \in \mathcal{G}_3$	$f = \phi(\mathbf{i}\sigma)$	$\mathbf{irc}\sigma$	$D$	$\text{den } \sigma$	$(X, Y, Z)$	$(x, y, z)$
214365	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \times \times \end{array}$	214365	9	9	(0, 0, 0)	(2, 2, 0)
314265	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	214635	8	9	(0, 0, 1)	(1, 1, 0)
514362	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	264315	8	11	(1, 0, 1)	(1, 0, 2)
324165	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	214653	9	10	(0, 1, 0)	(2, 1, 1)
524361	$\begin{array}{c} \times \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \end{array}$	264351	9	12	(1, 1, 0)	(2, 0, 3)
215364	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \times \end{array}$	241365	8	9	(1, 0, 1)	(1, 1, 0)
315264	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	241635	7	9	(1, 0, 2)	(0, 0, 0)
415362	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	246315	7	10	(2, 0, 2)	(0, 0, 1)
215463	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \times \end{array}$	243165	9	10	(1, 1, 0)	(2, 1, 1)
514263	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	264135	7	10	(1, 0, 2)	(1, 1, 1)
315462	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	243615	8	10	(2, 1, 1)	(1, 0, 1)
325164	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	241653	8	10	(1, 1, 1)	(1, 0, 1)
425361	$\begin{array}{c} \times \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \end{array}$	246351	8	11	(2, 1, 1)	(1, 0, 2)
524163	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	264153	8	11	(1, 1, 1)	(2, 1, 2)
325461	$\begin{array}{c} \times \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \end{array}$	243651	9	11	(2, 2, 0)	(2, 0, 2)
415263	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	246135	6	9	(2, 0, 3)	(0, 1, 0)
425163	$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \times \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \times \times \times \times \\ \times \cdot \end{array}$	246153	7	10	(2, 1, 2)	(1, 1, 1)

## Références

- [1] G. Andrews, *q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatoris, Physics, and Computer Algebra*, CBMS Regional conference lecture series, 66, Amer. Math. Soc. 1986.
- [2] D. Barsky, Congruences pour les nombres de Genocchi de deuxième espèce, *Groupe d'étude d'analyse ultramétrique*, Paris, **34** (1980-81) 1–13.
- [3] P. Biane, Permutations Suivant le Type d'Excédance et le Nombre d'Inversions et Interprétation Combinatoire d'une Fraction Continue de Heine, *Europ. J. Combin.* **14** (1993) 277–284.
- [4] L. Carlitz, A conjecture concerning Genocchi numbers, *K. Norske Vidensk. Selsk. Sk.* **9** (1971) 1–4.
- [5] M. Denert, The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.* **54** (1990) 449–465.
- [6] D. Dumont, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math. J.* **41(2)** (1974) 305–318.
- [7] D. Dumont, Communication orale, septembre 1995.
- [8] D. Dumont et D. Foata, Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull. Soc. Math. France* **104** (1976) 433–451.
- [9] D. Dumont et A. Randrianarivony, Dérangements et nombres de Genocchi, *Disc. Math.* **132** (1994) 37–49.
- [10] D. Dumont et G. Viennot, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Annals of Disc. Math.* **6** (1980) 77–87.
- [11] D. Dumont et Zeng, Further results on the Euler and Genocchi numbers, *Aequationes mathematicae* **47** (1994) 31–42.
- [12] P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Disc. Math.* **41** (1982) 145–153.
- [13] D. Foata, Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe des permutations, *Higher Combinatorics* [1976. Berlin, M. Aigner, ed.], Boston, Dordrecht (1977) 27–49.
- [14] D. Foata et G.-N. Han, Calcul basique des permutations signes, II: Analogues finis des fonctions de Bessel, *Electron. J. Combin.* Vol. 4, No. 2 (1997), R9, 25pp.
- [15] D. Foata et D. Zeilberger, Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies Appl. Math.* **83** (1990) 31–59.
- [16] J. M. Gandhi, A conjectured representation of Genocchi numbers, *Amer. Math. Monthly* **77(1)** (1970) 505–506.

- [17] W. Hahn, Über Orthogonalpolynome, die  $q$ -Differenzgleichungen genügen, *Math. Nachr* **2** (1949) 4–34.
- [18] G.-N. Han, Distribution Euler-mahonienne : une correspondance, *C. R. Acad. Sci. Paris* **310** Série I (1990) 311–314.
- [19] G.-N. Han, Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi, *Europ. J. Combin.* **17** (1996) 397–407.
- [20] G.-N. Han et J. Zeng, On a  $q$ -sequence that generalizes the median Genocchi numbers, preprint available at <http://cartan.u-strasbg.fr/~guoniu/papers>, 1997.
- [21] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis* (Vol. II, Wiley Interscience, 1977).
- [22] G. Kreweras, Sur les Permutations Comptées par les Nombres de Genocchi de 1-ière et 2-ième Espèce, *Europ. J. Combin.* **18** (1997) 49–58.
- [23] E. Lucas, *Théorie des nombres* (Gauthier-Villars, 1891).
- [24] A. Randrianarivony, Fractions continues,  $q$ -nombres de Catalan et  $q$ -polynômes de Genocchi, *Europ. J. Combin.* **18** (1997) 75–92.
- [25] A. Randrianarivony et J. Zeng, Some equidistributed statistics on Genocchi permutations, *Electron. J. Combin.* Vol. 3, No. 2 (1996), R22, 12pp.
- [26] J. Riordan et P. Stein, Proof of a conjecture on Genocchi numbers, *Disc. Math.* **5** (1973) 381–388.
- [27] T. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **9** (1895) 1–47.
- [28] J. Touchard, Sur un problème de configurations et sur les fractions continues, *Can. J. Math.* **4** (1952) 2–25.
- [29] G. Viennot, *Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi*, (Séminaire de Théorie des nombres, 1980–1981, exposé No. 11, Publ. de l'Univ. Bordeaux I).
- [30] H. S. Wall, Continued fractions and totally monotone sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.* **48** (1940) 165–184.
- [31] J. Zeng, Sur quelques propriétés de symétrie des nombres de Genocchi, *Disc. Math.* **153** (1996) 319–333.