Calcul combinatoire des q-analogues et des q-séries

Habilitation à diriger des recherches
Mémoire de synthèse

Guo-Niu HAN

Institut de Recherche Mathématique Avancée

Université Louis Pasteur et C.N.R.S., UMR 7501

7, rue René-Descartes

F-67084 Strasbourg Cedex

email:guoniu@math.u-strasbg.fr

Mes recherches depuis ma thèse de doctorat (janvier 1992) ont porté principalement sur l'étude des q-analogues et les problèmes s'y rapportant : statistiques sur les mots, les permutations, les bimots, les permutations signées, les arbres, les chemins latticiels et les tableaux de Young ; transformations bijectives sur ces classes d'objets ; algèbre des séries génératrices et équations aux différences ; évaluations de permanents et déterminants ; congruences de q-polynômes et fractions continues.

Table des matières

Habilitation à diriger des recherches

RESUME DES TRAVAUX

1. Etudes multiples autour de la statistique de Denert

La statistique de Denert pour les permutations a été introduite par Denert en 1990 dans l'étude de la fonction zêta attachée aux structures d'ordre de certaines algèbres semi-simples [De90]. Elle avait conjecturé que le couple (exc,den) était euler-mahonien sur le groupe symétrique, une conjecture qui fut prouvée par Foata et Zeilberger [FZ90]. Dans ma thèse de doctorat [5,9], j'ai pu prolonger ces résultats aux mots quelconques en introduisant une technique nouvelle : la *commutation contextuelle* sur les bimots. En 1994, Clarke et Foata ont étudié la k-extension de plusieurs statistiques classiques $(\mathrm{des}, \mathrm{maj}, \mathrm{inv}, \mathrm{exc}, \mathrm{den})$ sur les permutations et sur les mots [CF94,CF95]. Voici ma contribution dans ces études après ma thèse [12,19,22,26,29] :

1.1. k-Extension [12]. — La statistique "den" est particulièrement intéressante, car elle permet une première q-extension d'un cas particulier du "Master Theorem" de MacMahon [Ma13]. Le but ultime sera de trouver le bon q-analogue de l'identité de MacMahon elle-même. Les deux définitions équivalentes de "den" [5,9] et l'existence d'une k-extension "den_k" [CF95] de cette statistique ont suggeré qu'il y avait aussi une seconde definition de "den_k". C'est ce que nous avons construit dans [12]. Nous avons obtenu, pour tout mot w, la formule :

$$\mathrm{den}_k\, w = \sum \{i : \text{place } k\text{-excédante}\} + \mathrm{imv}_k(\mathrm{Exc}_k\, w) + \mathrm{inv}_k(\mathrm{Nexc}_k\, w).$$

1.2. Unification des algorithmes [19,26,29]. — Dans [19,26,29], nous avons étudié, en particulier, les bijections qui préservent les statistiques bivariées dites euler-mahoniennes. Sur la base d'une règle de commutation (Cartier-Foata [CF69], contextuelle [5,9] ou leurs k-extensions [CF94,CF95]), nous avons pu unifier les quatre algorithmes qui, jusqu'ici, reposaient sur des méthodes *ad doc*, en un seul. On redémontre ainsi que les statistiques $(\mathrm{exc}_k, \mathrm{den}_k)$ et $(\mathrm{des}_k, \mathrm{maj}_k)$ sont équivalentes.

Considérons le bimot $(h,b) = \binom{h_1\ h_2\ \dots\ h_m}{b_1\ b_2\ \dots\ b_m}$ sur un alphabet X. Une *commutation* est une règle de transformation d'un bimot en un autre $(h',b') = \binom{h'_1\ h'_2\ \dots\ h'_{m'}}{b'_1\ b'_2\ \dots\ b'_{m'}}$ de façon que, si elle agit à la place i, le bimot (h',b') a les mêmes éléments que le bimot (h,b) sauf aux places i et $i+1$, et en plus, $h'_{i+1} = h_i$ et $h'_i = h_{i+1}$. Autrement-dit, seuls les deux éléments b'_i et b'_{i+1} sont définis par la commutation. La seule commutation préservant les bilettres est la commutation dite de Cartier-Foata [CF69]. Une autre que nous avons défini est la k-extension de la commutation contextuelle. Pour une commutation donnée, on trie un bimot : on applique la commutation à la plus petite place i telle que $h_i > h_{i+1}$ et on répète jusqu'à ce que le mot du haut soit croissant. Nous avons étudié également l'inverse de "trier", qui définit une décomposion d'un circuit en produit de cycles. Pour étudier les propriétés d'équidistribution des statistiques, nous avons d'abord prolongé les définitions des statistiques $(\mathrm{exc}_k, \mathrm{den}_k)$ sur les bimots, ensuite nous avons démontré qu'elles sont invariantes par rapport à la commutation contextuelle. Cette propriété fondamentale permet de démontrer que les statistiques $(\mathrm{exc}_k, \mathrm{den}_k)$ et $(\mathrm{des}_k, \mathrm{maj}_k)$ sont équivalentes.

1.3. q-Analogues [22]. — Les statistiques mahoniennes servent à fabriquer des q-analogues pour les nombres et les polynômes classiques. Ce fait est bien connu dans le cas des statistiques "inv" et "maj"(voir par exemple [AF80, Fo81]). Pour certains autres modèles combinatoires, probablement il faut prendre la statistique "den". Dans [22], on a utilisé la statistique "den" pour obtenir des premiers q-analogues des polynômes de Gandhi. Les objets combinatoires sous-jacents sur lesquels la statistique "den" a pu être prolongée sont les permutations de Genocchi [Du74] et les pistolets de Dumont-Viennot [DV80].

A partir de l'opérateur de q-différence de Hahn [Ha49] :

$$\Delta_q f(x) = \frac{f(1+qx) - f(x)}{1+(q-1)x},$$

nous définissons un q-analogue des polynômes de Gandhi :

$$\begin{cases} D_1(x,y,q) = 1, \\ D_n(x,y,q) = \Delta_q(x^2 D_{n-1}(x,y,q)) + (y-1)xD_{n-1}(x,y,q) \quad (n\geq 2). \end{cases}$$

Nous montrons ensuite que $1 + xy\sum_{n\geq 1} D_n(x,y,q)t^n$, la série génératrice des polynômes $D_n(x,y,z)$, admet le développement en fraction continue formelle suivant

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{xyt}{1-\cfrac{(1+qx)t}{1-\cfrac{(1+qx)(y+q)t}{1-\cfrac{[2]_q([2]_q+q^2x)t}{1-\cfrac{([2]_q+q^2x)(y+q[2]_q)t}{1-\cfrac{[3]_q([3]_q+q^3x)t}{1-\cfrac{([3]_q+q^3x)(y+q[3]_q)t}{\ddots}}}}}}}}.$$

Nous retrouvons, par spécialisation des variables, plusieurs résultats antérieurs sur les polynômes de Gandhi [DR94], en particulier, sur les nombres de Genocchi [Vi80,DZ94,St95].

Nous avons obtenu deux interprétations combinatoirs des q-polynômes de Gandhi :

$$q^{n^2}xyD_n(x,y,q)=\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} x^{\operatorname{fex}\sigma}y^{\operatorname{sid}\sigma}q^{\operatorname{den}\sigma},$$

et

$$D_n(x,y,q)=\sum_{f\in\mathcal{P}_n} x^{\max f}y^{\operatorname{fnd} f}q^{n^2-\operatorname{den} f},$$

où la première sommation est faite sur toutes les permutations de Genocchi, et la seconde sur tous les *pistolets*.

1.4. ex-Conjecture. — La commutation contextuelle agit sur les bipermutations [9], et ce fait définit une relation d'équivalence sur le groupe symétrique. Etant donné deux permutations, il n'est pas facile de savoir si elles sont équivalentes ou non, car la commutation contextuelle peut se faire sur n'importe quel ordre, et elle ne préserve pas les bilettres. J'ai conjecturé que *deux permutations sont équivalentes si et seulement si elles admettent les mêmes statistiques bivariées* $(\operatorname{exc},\operatorname{den})$. En 1997, Clarke a démontré que cette conjecture est vraie [Cl97].

Liste des publication citées dans cette rubrique. Les articles avec le symbole ♡ se trouvent en annexe.

♡[12] G.-N. Han. — The k-extension of a mahonian statistic, *Adv. in Appl. Math.*, **16** (1995), pp. 297–305.

♡[19] D. Foata et G.-N. Han. — Transformations on words, *Journal of Algorithms*, **28** (1998), pp. 172–191.

♡ [22] G.-N. Han et J. Zeng. — q-Polynômes de Gandhi et statistique de Denert, *Discrete Math.*, **205** (1999), pp. 119–143.

♡ [26] D. Foata et G.-N. Han. — Word straightening and q-Eulerian Calculus, *Contemporary Mathematics*, **vol. 254**, q-Series from a Contemporary Perspective, M. E. H. Ismail, D. W. Stanton Ed., AMS. pp. 141–156, 2000.

[29] D. Foata et G.-N. Han. — Chapter 11. Transformation on Words and q-Calculus, dans *Algebraic Combinatorics on Words*, M. Lothaire, 2000, pp. 293–324.

2. Statistiques sur mots et bijections

Les statistiques qu'on étudie dans ce chapitre sont : la Z-statistique, les U-extensions de l'indice majeur et du nombre d'inversions. Certaines bijections servant à démontrer l'équidistribution des statistiques ont également été construites [6,13,18].

2.1. Z-Statistique [6]. — Pour démontrer la conjecture dite de q-Dyson proposée par Andrews [An75], Bressoud et Zeilberger [ZB85] ont introduit la Z-statistique définie pour les mots et démontré d'une façon analytique que cette statistique est mahonienne. Le problème posé par Zeilberger [Ze86] et aussi Bressoud [Br88] était de trouver une démonstration bijective. Dans [6], une bijection explicite a été construite [1].

Soient w un mot et x la dernière lettre du mot w. Nous avons défini deux opérations sur les mots : le *cyclage global* $C^x(w)$ et le *cyclage local* $C_x(w)$. Ces deux opérations jouissent de la propriété suivante

$$\operatorname{maj} w - \operatorname{maj} C^x(w) = Z(w) - Z(C_x(w)),$$

qui permet, à l'aide d'une autre propriété de changement de multiplicité sur les mots, de construire la bijection voulue.

2.2. Ordres bipartitionnaires [13]. — Soit U un ensemble de couples de lettres. Foata et Zeilberger [FZ96] ont introduit les U-statistiques pour les mots quelconques, qui sont des généralisations des k-statistiques [CF94,CF95]. Dans [13], on établit une condition nécessaire et suffisante pour que les deux définitions "maj_U" (définie comme la somme des indices) et "$\mathrm{maj2}_U$" (définie à l'aide des *intervalle cycliques*), qu'on rencontre dans le cas classique [9], soient équivalentes. Cette condition s'exprime simplement en disant : *le sous-ensemble U est un ordre bipartitionnaire.* Il est remarquable que cette condition est exactement la même que celle qui a été trouvée pour l'équidistribution des deux statistiques "maj_U" et "inv_U".

2.3. Inverses des mots [18]. — A partir de la décomposition d'un circuit en produit des *cycles* [CF69, Kn73], nous avons pu définir, d'une façon algorithmique, l'inverse (qui est une opération naturelle sur les permutations) d'un mot quelconque [18]. D'autre part, nous avons démontré qu'il existe en fait une autre correspondance ayant plus de propriétés, mais la difficulté est que celle-ci n'est pas explicite. Récemment Hohlweg et Reutenauer ont résolu complètement ce problème d'inversion des mots [HR01].

---

[1] Cette démonstration m'a permis d'obtenir le prix de Zeilberger (25 US$). Mais finalement ce prix a été partagé entre moi et ma banque ! Nous avons chacun eu la moitié en Francs français.

Liste des publication citées dans cette rubrique. Les articles avec le symbole ♡ se trouvent en annexe.

♡[6] G.-N. Han. — Une courte démonstration d'un résultat sur la Z-statistique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **314, Série I** (1992), pp. 969–971.

♡[13] G.-N. Han. — Ordres bipartitionnaires et statistiques sur les mots, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **3(2)**, #R3, 5 pages, 1996.

[18] D. Foata et G.-N. Han. — Inverses of Words, *39e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, [B39d], 1998, 8 pages.

3. Suites de nombres classiques et q-analogues

Dans cette rubrique, nous étudions les nombres classiques, en particulier, les nombres d'Euler (nombres tangents et sécants), les nombres de Genocchi, les polynômes d'André et les polynômes de Gandhi. Les modèles associés sont des permutations, les escaliers (pistolets) et les arbres. Les techniques utilisées sont les fonctions génératrices, relations de récurrence et fractions continues [8,17,20,23,30].

3.1. Escaliers évalués [8]. — L'article [8] est une tentative pour faire apparaître "tous" les nombres classiques comme des comptages d'objets dans un seul modèle combinatoire : les *escaliers évalués.* Bien que ce modèle trop général ne donne pas toutes les propriétés connues sur les nombres concernés, à partir d'une involution sur les escaliers décrite dans [8], nous pouvons néanmoins obtenir directement, pour les polynômes de type Gandhi, une *formule sommatoire*, à partir de la seule récurrence de définition de ces polynômes.

Considérons l'ensemble des couples $\mathcal{F} = \{(E, f)\}$, où E est un escalier et f une application dans E. Nous avons montré qu'il existe une involution $(E, f) \mapsto (E', f')$ sur l'ensemble $\mathcal{F}$ ayant les propriétés :

(1) l'ensemble des points fixes de cette involution est $\mathcal{F}_0$, qui est le sous-ensemble formé par les couples $\{(E, f)\}$ tels que E est un escalier *ordinaire* et que f est une *surjection.*

(2) si (E, f) n'est pas un point fixe, alors la hauteur de E est égale à celle de E' plus ou moins 1.

Cette involution nous permet d'établir une identité sur les fonctions génératrices. Dans [8] nous avons donné une série d'exemples. Nous en reproduisons seulement deux ici. Soit $S_{n,k}$ les nombres de Stirling de seconde espèce ; identité suivante

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^n k! \binom{b}{k} S_{n,k} = b^n$$

est immédiate. Dans le second exemple, on montre que le polynôme de Dumont-Foata [DF76] admet l'expression suivante :

$$\begin{aligned} F_n(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} t_{n,k} \big\{ &(x+y)(x+y+1)\dots(x+y+k-2) \\ &\times(x+z)(x+z+1)\dots(x+z+k-2) \big\}, \end{aligned}$$

une formule qui a été obtenue pour la première fois par Carlitz [Ca80].

3.2. q-Analogue de la matrice de Seidel [17]. — Dans [DR94] Dumont et Randrianarivony ont donné plusieurs interprétations combinatoires des coefficients de la matrice de Seidel associée à la suite $(n!)$. Nous avons construit le q-analogue de ces résultats en introduisant la q-matrice de Seidel [17], qui est défini par la relation suivante :

$$a_n^k(x,q) = xq^n a_n^{k-1}(x,q) + a_{n+1}^{k-1}(x,q), \quad (k \geq 1, n \geq 0).$$

Nous avons montré, dans le cas général, qu'il existe une relation très simple entre la fonction génératrice q-exponentielle de la suite initiale et celle de la suite finale :

$$\sum_{n\geq 0} a_0^n(x,q)\frac{t^n}{[n]_q!} = e_q(xt)\sum_{n\geq 0} a_n^0(x,q)\frac{t^n}{[n]_q!}.$$

L'étude de la q-matrice de Seidel associée aux nombres de q-dérrangements nous a permis de découvrir une nouvelle statistique mahonienne "maf" pour les permutations. Nous avons construit une bijection ϕ sur le groupe symétrique qui envoie le couple des statistiques (fix, maf) sur (fix, maj). L'interprétation combinatoire de tous les coefficients de cette matrice est donnée par la formule

$$a_n^k(x,q) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n^k} x^{\mathrm{fix}\,\sigma} q^{\mathrm{maf}\,\sigma}.$$

Si l'on regarde la suite finale de cette matrice, on obtient

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} x^{\mathrm{fix}\,\sigma} q^{\mathrm{maj}\,\sigma} = [n]_q!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-1)(x-q)\cdots(x-q^{i-1})}{[i]_q!}\right),$$

une formule qui a été obtenue par Gessel et Reutenauer [GR93] et par Wachs [Wa89] pour $x=0$.

3.3. q-Analogues des nombres d'Euler [20]. — Les fonctions génératrices ordinaires des nombres d'Euler (tangent et sécant) admettent des développements simples en fractions continues [Fl80]. Cependant les q-analogues classiques de ces nombres [AF80,AG78,Fo81] n'ont pas de q-analogues naturels en termes de fractions continues. Dans [20] nous avons introduit un autre q-analogue des nombres d'Euler en utilisant un opérateur de q-différence. La fonction génératrice de ce q-analogue a, elle, un développement simple en fraction continue.

Notre q-analogue des nombres d'Euler est défini par la relation de récurrence

$$P_n^{(\alpha)}(x,q) = [x,a]_q\frac{[x,b]_q P_{n-1}^{(\alpha)}([x,c]_q,q) - [x,d]_q P_{n-1}^{(\alpha)}(x,q)}{1+(q-1)x}.$$

Nous avons obtenu la fonction génératrice ordinaire des polynômes $P_n^{(\alpha)}(x,q)$ sous forme de développement en S-fraction continue :

$$\sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}(x,q)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{q^d[b-d][x,a]_q\,t}{1-\cfrac{q^a[c][x,b]_q\,t}{1-\cfrac{q^d[b-d+c][x,a+c]_q\,t}{1-\cfrac{q^a[2c][x,b+c]_q\,t}{1-\cfrac{q^d[b-d+2c][x,a+2c]_q\,t}{1-\cfrac{q^a[3c][x,b+2c]_q\,t}{\ddots}}}}}}}.$$

En spécialisant les paramètres x,q,a,b,c,d, on obtient les nombres d'Euler, d'Euler médians [Ar74,Du95], de Genocchi [Vi80], et certaines extensions de ces nombres connues [RZ94,RZ96]. Nous avons étudié l'aspect combinatoire de ces q-nombres en utilisant les chemins de Motzkin et les (k,r)-multipermutations [GS78, Pa94]. Nous avons également obtenu des propriétés de divisibilité de ces q-nombres d'Euler par $(1+q)$, qui sont comparables avec ceux obtenus par Andrews, Foata et Gessel [AF80, AG78, Fo81], en utilisant une méthode développée par Flajolet [Fl82].

3.4. Propriété de congruence des q-polynômes [23]. — Nous avons défini un q-analogue des nombres de Genocchi médians [22] et étudié, en particulièr, ses propriétés de congruence [23]. Nous obtenons ainsi un q-analogue d'un résultat de Barsky [Ba80] sur l'étude 2-adique des nombres de Genocchi médians.

Nous avons d'abord re-démontré le résultat de Barsky [Ba80] en utilisant la méthode de Flajolet [Fl82] : *Le nombre de Genocchi médian H_{2n+1} est divisible par 2^{n-1} et*

$$\frac{H_{2n+1}}{2^{n-1}} \equiv \begin{cases} 2 \pmod 4, & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ 3 \pmod 4, & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La version q-analogue de ce résultat que nous obtenons est la suivante : *Les q-polynômes $C_{2n+1}(1,q)$ $(n\geq 1)$ et $C_{2n+2}(1,q)$ $(n\geq 0)$ sont divisibles par $(1+q)^{2n+1}$. De plus,*

$$\left.\frac{C_{2n+1}(1,q)}{(1+q)^{2n+1}}\right|_{q=-1} = (-1)^{n+1}G_{2n+2}, \quad \left.\frac{C_{2n}(1,q)}{(1+q)^{2n-1}}\right|_{q=-1} = (-1)^{n+1}G_{2n}.$$

La méthode de tronquage des fractions continues de Flajolet ne marche pas ici. Nous avons dû recourir à une méthode d'itération des q-analogues pour obtenir le résultat.

3.5. Arbres minimax et polynômes d'André [30]. — Les arbres minimax sont des arbres binaires étiquetés, tels que chaque sommet porte une étiquette maximum ou minimum sur le sous-arbre dominé par ce sommet. Sur l'ensemble des arbres minimax, nous pouvons définir deux familles d'opérateurs : le complément et le retournement. Dans [30] nous avons étudié les actions de ces opérateurs sur les arbres minimax et montré que leurs orbites sont comptées par les objets combinatoires introduits auparavant, tels que les arbres de Hetyei-Reiner [HR98], les arbres croissants et les arbres d'André [FS74]. Nous avons également déduit les fonctions génératrices de ces arbres.

Liste des publication citées dans cette rubrique. Les articles avec le symbole ♡ se trouvent en annexe.

♡[8] G.-N. Han. — Escaliers évalués et nombres classiques, *Publ. l'I.R.M.A., Strasbourg, Actes 24e Séminaire Lotharingien* , **461/S-24** (1993), pp. 77–85.

♡[17] R. J. Clarke, G.-N. Han et J. Zeng. — A combinatorial interpretation of the Seidel generation of q-derangement numbers, *Annals of Combinatorics*, **4** (1997), pp. 313–327.

[20] G.-N. Han, A. Randrianarivony et J. Zeng. — Un autre q-analogue des nombres d'Euler, *The Andrews Festschrift. Seventeen Papers on Classical Number Theory and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001, pp. 139–158. [voir aussi *42e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B42e, 1999].

♡[23] G.-N. Han et J. Zeng. — On a q-sequence that generalizes the median Genocchi numbers, *Annal Sci. Math. Québec*, **23, no. 1** (1999), pp. 63–72.

[30] D. Foata, G.-N. Han. — Arbres minimax et polynômes d'André, à paraître dans *Adv. in Appl. Math.*.

4. Partitions, tableaux et fonctions symétriques

Les sujets dévéloppés dans ce chapitre sont liés aux partitions, tableaux de Young et fonctions symétriques [10,21,24,25].

4.1. Tableaux de Young . — Dans [10] nous avons reconsidéré la construction de Kerov-Kirillov-Reshetikhin [KK88, Ki88]. Ces trois auteurs ont inventé des nouveaux objets ("rigged configurations") qui sont en bijection avec les tableaux de Young. Les sources physiques qui ont conduit ces auteurs à introduire ces objets restent bien mystérieuses. En revanche, on peut donner une version très combinatoire de ceux-ci et rendre plus compréhensible l'approche de ces auteurs en utilisant des modèles géométriques, essentiellement des *chemins polygonaux.* L'objet que nous avons introduit est la *matrice des chemins*, qui est une matrice dont les coefficients sont des chemins. Dans [10] nous avons construit une bijection explicite entre les matrices des chemins et les tableaux de Young. Ce modèle géométrique a été utilisé et développé par [Da96] ultérieurement.

4.2. Triple produit de Jacobi. — Dans [21], on a étudié le triple produit de Jacobi [An76] et le produit quintuple de Watson [Wa29] d'une manière combinatoire. On a obtenu également une démonstration *élémentaire* de l'identité du produit septuple de Farkas-Kra [Fa99], qui avait été obtenue par ces auteurs en utilisant l'algèbre des fonctions theta d'ordre k. Cette identité s'exprime comm suit : Soit f (resp. g) un polynôme en avariable q (resp. x) à coefficients entiers. On pose

$$\Omega(f) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n\, q^{f(n)}; \quad \Omega(f,g) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n\, q^{f(n)}\, x^{g(n)}.$$

Alors l'identité de Farkas-Kra s'écrit

$$\begin{aligned}\prod_{n\geq 1} (1-q^{2n})^2(1-xq^{2n-2})(1-x^{-1}q^{2n})(1-x^2q^{4n-2})\\ \times (1-x^{-2}q^{4n-2})(1-x^2q^{4n-4})(1-x^{-2}q^{4n})\\ = \Omega(5n^2+n)\bigl(\Omega(5n^2+3n,5n+3)+\Omega(5n^2-3n,5n)\bigr)\\ -\Omega(5n^2+3n)\bigl(\Omega(5n^2+n,5n+2)+\Omega(5n^2-n,5n+1)\bigr).\end{aligned}$$

Cette identité se spécialise en les identités habituelles des triple et quintuple produits.

4.3. Permanents de type Scott. — Dans [25], on redémontre une identité de Scott de 1881 sur les permanents [Sc81], sans partir des expressions analytiques des racines, en opérant seulement dans l'algèbre des polynômes. On utilise des techniques sur les fonctions symétriques, notamment un théorème de Lascoux [La98], que celui-ci a établi dans son étude du modèle de la glace carrée en mécanique statistique. Cette nouvelle méthode nous permet de démontrer une généralisation de l'identité de Scott, qui possède plusieurs cas particuliers intéressants.

Dans [24], nous avons généralisé cette technique pour l'étendre à l'étude des permanents rectangulaires. Pour obtenir cette extension, nous avons dû prolonger le théorème de Lascoux pour deux familles de variables de tailles différentes.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les zéros de deux polynômes $P(x)$ et $Q(y)$. On note $\mathrm{PER}(P, Q)$ le permanent de la matrice rectangulaire dont le coefficient en (i, j) est $1/(x_i - y_j)$. Un tel permanant est appelé *permanent* de type Scott. En 1881 Scott a obtenu la formule suivante :

$$\mathrm{PER}(x^n-1, y^n+1) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{n(1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2))^2}{2^n}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous avons obtenu les expressions explicites pour certains cas plus généraux, en fait une collection importante d'identités non classiques sur les permanents, notamment

$$\begin{aligned} &\mathrm{PER}(x^n - 1, y^n + y - 1) = n^n, \\ &\mathrm{PER}(x^n - 1, y^n + ny - 1) = 1, \\ &\mathrm{PER}(x^n - 1, y^{2n} + y^n + 1) = (-1)^{n+1} n! \end{aligned}$$

Liste des publication citées dans cette rubrique. Les articles avec le symbole ♡ se trouvent en annexe.

♡[10] G.-N. Han. — Une version géométrique de la construction de Kerov-Kirillov-Reshetikhin, *Publ. l'I.R.M.A., Strasbourg, Actes 31e Séminaire Lotharingien*, **1994/021** (1994), pp. 71–85.

[21] D. Foata et G.-N. Han. — The Triple, Quintuple and Septuple Product Identities Revisited, *The Andrews Festschrift. Seventeen Papers on Classical Number Theory and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001, pp. 323–334. [voir aussi *42e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B42o, 1999].

♡[24] G.-N. Han et Ch. Krattenthaler. — Rectangular Scott-type permanents, *43e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, [B43g], 2000, 25 pages.

♡[25] G.-N. Han. — Généralisation de l'identité de Scott sur les permanents, *Linear Alg. Appl.*, **311** (2000), pp. 25–34.

5. Evaluations combinatoires et Fonctions génératrices

Les évaluations combinatoires sont souvent obtenues à l'aide d'un calcul explicite de la fonction génératrice (ordinaire, exponentielle ou de faculté) de polynômes, eux-mêmes générateurs d'ensembles finis (groupe symétrique, groupes de Weyl,...) Il s'agit de mettre au point des techniques efficaces pour le calcul de ces fonctions génératrices (résolution d'équations aux différences, codage de permutations, le MacMahon Verfahren, méthode itérative,...) [11,15,16,32].

5.1. Produit d'Hadamard [11]. — On présente deux méthodes *combinatoires* pour calculer la fonction génératrice du produit d'Hadamard de polynômes de Tchebichev. Les méthodes classiques sont soit *analytiques* (*cf.* Avanissian-Supper [AS91]) ou *algorithmiques* (*cf.* Cerlienco-Mignotte-Piras [CM87]).

On a obtenu des expressions explicites pour les produits d'Hadamard doubles et triples, comme par exemple :

$$\sum_{n\geq 0} u^n\, U_n(x)T_n(y) = \frac{1-u\,2xy+u^2(2y^2-1)}{1-u\,4xy+u^2(4x^2+4y^2-2)-u^3\,4xy+u^4}$$

et

$$\sum_{n\geq 0} u^n\, T_n(x)T_n(y) = \frac{1-u\,3xy+u^2(2x^2+2y^2-1)-u^3\,xy}{1-u\,4xy+u^2(4x^2+4y^2-2)-u^3\,4xy+u^4}.$$

5.2. Permutations signées [15,16]. — Le calcul basique des permutations signées I et II [16,15] se rattache à l'étude statistique des groupes de Coxeter [Re95]. Dans ces deux articles on calcule, pour les *permutations signées*, les fonctions génératrices de plusieurs statistiques multivariées, qui n'étaient connues jusqu'ici que pour le groupe symétrique [St76].

Soient L et l deux entiers positifs fixés et $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_L)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_l)$ deux suites de variables. Posons

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\binom{n}{2}} &= Q_1^{\binom{n}{2}} \ldots Q_L^{\binom{n}{2}},\\ (\mathbf{Q};\mathbf{Q})_n &= (Q_1;Q_1)_n \ldots (Q_L;Q_L)_n,\\ (\mathbf{q};\mathbf{q})_n &= (q_1,q_1)_n \ldots (q_l;q_l)_n.\end{aligned}$$

On définit la *fonction de Bessel à plusieurs bases* par

$$\mathbf{J}(u;\mathbf{Q},\mathbf{q}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\mathbf{Q}^{\binom{n}{2}}}{(\mathbf{Q},\mathbf{Q})_n} \frac{1}{(\mathbf{q};\mathbf{q})_n} u^n.$$

Nous avons obtenu une interprétation combinatoire des coefficients W_n dans le dévéloppement suivant :

$$\frac{(1-t)\,\mathbf{J}((1-t)X;\mathbf{Q},\mathbf{q})}{-t+\mathbf{J}((1-t)X;\mathbf{Q},\mathbf{q})\,\mathbf{J}((1-t)Y;\mathbf{Q},\mathbf{q})} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(\mathbf{Q};\mathbf{Q})_n(\mathbf{q};\mathbf{q})_n}\,W_n(X,Y,t,\mathbf{Q},\mathbf{q}).$$

Plus précisément, le coefficient $W_n(X,Y,t,\mathbf{Q},\mathbf{q})$ est le polynôme générateur des *multipermutations signées* $(\underline{\Sigma},\underline{\sigma},\varepsilon)$ par les statistiques "ddes," "inv" et "coinv." En d'autres termes, on a

$$W_n(X,Y,t,\mathbf{Q},\mathbf{q}) = \sum_{(\underline{\Sigma},\underline{\sigma},\varepsilon)} X^{\ell(\varepsilon|x)}Y^{\ell(\varepsilon|y)}t^{\mathrm{ddes}(\underline{\Sigma},\underline{\sigma},\varepsilon)}\mathbf{Q}^{\mathrm{inv}(\underline{\Sigma},\varepsilon)}\mathbf{q}^{\mathrm{coinv}(\underline{\sigma},\varepsilon)},$$

la sommation étant faite sur toutes les multipermutations signées de longueur n.

Ce résultat se spécialise en plusieurs identités établies précédemment par différents auteurs [CS76, St76]. Pour démontrer ce résultat, nous proposons une méthode *itérative.* Cette méthode nous sert aussi à démontrer la formule de Reiner [Re93, Re95] sur la fonction génératrice de la *longueur* dans B_n.

Dans [15], nous obtenons une extension de notre résultat à l'aide des *analogues finis* des fonctions de Bessel basiques en utilisant une approche différente. Cette extension peut être aussi considérée comme une extension d'un résultat de Fedou-Rawlings [FR94].

5.3. Nombres hyperharmoniques [32]. — Le problème de la fratrie du collectionneur fait appel aux techniques combinatoires classiques : transformation de Laplace inverse, résolution des équations aux différences finies, avec une intrusion dans les probabilités (théorème d'arrêt des martingales).

Nous avons été amenés à trouver une solution explicite à l'équation aux différences, à plusieurs variables

$$\begin{aligned}(x_0+x_1+x_2+\cdots)f(x_0,x_1,x_2,\ldots) = & x_0f(x_0-1,x_1+1,x_2,\ldots)\\ & x_1f(x_0,x_1-1,x_2+1,\ldots)\\ & x_2f(x_0,x_1,x_2-1,\ldots)+\cdots\end{aligned}$$

où le premier paramètre x_0 est un entier positif avec la condition initiale

$$f(0,x_1,x_2,\ldots) = 1-t+x_1t^1+x_2t^2+\cdots$$

Dans ce calcul "symbolique", il faut imaginer une méthode de résolution *ad hoc* qui conduit à l'expression

$$f(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \frac{x_0!}{(x_0 - t)(x_0 - 1 - t)\cdots(2 - t)}\left(1 + \frac{x_1 t + x_2 t^2 + \cdots}{x_0 + 1 - t}\right)$$

Liste des publication citées dans cette rubrique. Les articles avec le symbole ♡ se trouvent en annexe.

[11] D. Foata et G.-N. Han. — Nombres de Fibonacci et polynômes orthogonaux, *Leonardo Fibonacci : il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, M. Morelli et M. Tangheroni eds., Pacini, Roma, pp. 179–208, 1994.

[15] D. Foata et G.-N. Han. — Calcul basique des permutations signées, II: Analogues finis des fonctions de Bessel, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **4(2)**, #R9, 25 pages, 1997.

♡[16] D. Foata et G.-N. Han. — Calcul basique des permutations signées, I: Longueur et nombre d'inversions, *Adv. in Appl. Math.*, **18(4)** (1997), pp. 489–509.

[32] D. Foata, G.-N. Han et B. Lass. — Les nombres hyperharmoniques et la fratrie du collectionneur de vignettes, en cours de révision.

6. Programmation informatique et interactions avec d'autres disciplines

L'outil informatique est sans doute l'outil le plus révolutionnaire de ces dernières années. Je m'intéresse particulièrement à la programmation. Les langages que j'utilise principalement sont Maple pour le calcul formel et C++ pour une programmation plus sophistiquée. Ce chapitre témoigne de mes activités informatiques, à la fois en mathématique proprement dit, et aussi dans l'analyse d'image et la biologie [14,27,31,33].

6.1. Relation bipartitionnaire [14]. — Soit U une relation sur les entiers. Foata et Zeilberger ont défini des U-extensions des statistiques mahoniennes inv et maj [FZ96], et démontré que ces deux statistiques sont équidistribuées si et seulement si la relation U est bipartitionnaire. La démonstration originale de la partie “seulement si” consiste à étudier une série de propriétés que doit satisfaire U pour qu'il y ait équidistribution (7 lemmes !) et ensuite à les rassembler.

Dans [14], nous avons proposé une autre démonstration à l'aide d'un programme informatique. Par une simple analyse, on sait qu'il y a 512 relations possibles. Au lieu de chercher les propriétés, nous avons écrit un programme qui vérifie très rapidement que la propriété est vraie pour ces 512 relations, donc vraie en général.

6.2. Enumération des objets combinatoires [33]. — Dans l'étude des problèmes combinatoires, on a souvent besoin d'énumérer tous les éléments d'une classe d'objets, par exemple, énumérer toutes les permutations alternantes, ce qui est facile, ou encore énumérer tous les “gog” [Ze96] ou toutes les configurations de Kirillov [KK88, Ki88], ce qui est beaucoup plus difficile et nécessite des techniques fines de programmation.

La complexité des programmes et la fréquence de nos besoins m'ont obligé à développer un logiciel, nommé `fill` durant toutes mes années de recherche. Etant réalisé avec le langage de programmation orienté objet C++ sous forme de framework, `fill` a pour but de pouvoir créer rapidement et efficacement un programme qui, pour un nouvel objet combinatoire, énumère leurs éléments et les sélectionne, calcule les statistiques et compare leur équidistribution et fournit également leur fonction génératrice.

A l'aide de ce logiciel, on peut souvent et rapidement prouver qu'une conjecture est fausse, ce qui permet de re-conjecturer un autre énoncé ! Cela fait partie du cycle de recherche. Récemment, avec Krattenthaler, nous avons trouvé plusieurs conjectures sur les objets *gog* et *magog*. L'étude de ces conjectures fait partie de mon programme de recherche dans le futur immédiat. Une autre utilisation que j'ai pratiquée récemment est la vérification d'une conjecture de Perrin concernant les *ensembles* *inévitables.* Elle affirme que, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un ensemble inévitable de $U(n)$ mots binaires de longueur n où $U(n)$ est le nombre de colliers binaires de periode n. J'ai pu trouver deux exemples affirmatifs pour $n = 8$ et $n = 9$(voir [33]).

6.3. Analyse des images [27]. — Les moments des polynômes de Legendre jouent un rôle crutial dans l'analyse des images en informatique [Te80]. Cependant, le problème est que le calcul des moments est très complexe en temps. Dans [27], nous avons proposé une méthode efficace pour calculer les moments de Legendre. Cette méthode repose sur plusieurs identités, dont certaines semblaient assez compliquées. Nous avons pu les démontrer à l'aide d'outils informatiques en utilisant le programme Maple dévéloppé par Zeilberger [PWZe].

6.4. Biologie [31]. — Dans l'étude expérimentale sur l'origine des kinases Ser/Thr, les collègues micro-biologistes m'ont demandé de construire une distance entre chaque gène du génome et le génome entier de la chaine ADN, qui permet de tester quels sont les gènes qui sont *extérieurs* (apparus lors de l'évolution). Ce travail de gestion des données expérimentales a été realisé et a permis d'obtenir un résultat intéressant sur l'évolution des gènes extérieurs.

Liste des publication citées dans cette rubrique. Les articles avec le symbole ♡ se trouvent en annexe.

♡[14] G.-N. Han. — Une démonstration “vérificative” d'un résultat de Foata-Zeilberger sur les relations bipartitionnaires, *J. Computational and Applied Math.*, **68** (1996), pp. 159–162.

♡[27] H. Shu, L. Luo, X. Bao, W. Yu et G.-N. Han. — An Efficient Method for Computation of Legendre Moments, *Graphical Models*, **62(4)** (2000), pp. 237–262.

♡[31] G.-N. Han et C.-C. Zhang. — On the origin of Ser/Thr kinases in a prokaryote, *FEMS Microbiology Letters*, **200** (2001), pp. 79–84.

[33] G.-N. Han et D. Perrin. — Ensembles inévitables, en préparation.

BIBLIOGRAPHIE

[AF80] G. Andrews et D. Foata. — Congruences for the q-secant numbers, *Europ. J. Combinatorics*, **1** (1980), pp. 283–287.

[AG78] G. Andrews et I. Gessel. — Divisibility properties of the q-tangent numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **68** (1978), pp. 380–384.

[An75] G. E. Andrews. — Problems and prospects for basic hypergeometric function, *Theory and Applications of Special Functions*, Edité par R. A. Askey, 1975, Academic Press, New York, p. 191–224.

[An76] G. E. Andrews. — *The Theory of Partitions.* — Addison-Wesley, Reading, 1976 (*Encyclopedia of Math. and Its Appl.,* vol. **2**).

[Ar74] V. I. Arnold. — Bernoulli-Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics, *Duke Math. J.*, **63** (1974), pp. 537-555.

[Ba80] D. Barsky. — Congruences pour les nombres de Genocchi de deuxième espèce, *Groupe d'Étude d'Analyse Ultramétrique*, Paris, 8^{e} année, exposé $n^\circ 34$. 1980-81.

[Br88] D. M. Bressoud. — Problems on the Z-statistic, *Discrete Math.*, **73** (1988), pp. 37–48.

[Ca80] L. Carlitz. — Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomial, *Discrete. Math.*, **30** (1980), pp. 211-225.

[CF69] P. Cartier et D. Foata. — *Problèmes combinatoires de permutations et réarrangements.* — Berlin, Springer-Verlag, 1969 (*Lecture Notes in Math.,* **85**).

[CF94] R. J. Clarke and Dominique Foata. — Eulerian Calculus, I : univariable statistics, *Europ. J. Combinatorics*, **15** (1994), pp. 345–362.

[CF95] R. J. Clarke and Dominique Foata. — Eulerian Calculus, II: an extension of Han's fundamental transformation, *Europ. J. Combinatorics*, **16** (1995), pp. 221–252.

[Cl97] R. J. Clarke. — Han's conjecture on permutations, *Europ. J. Combinatorics*, **18** (1997), pp. 511–524.

[CS76] L. Carlitz, R. Scoville et T. Vaughan. — Enumeration of pairs of permutations, *Discrete Math.*, **14** (1976), pp. 215–239.

[Da97] S. Dasmahapatra. — On the combinatorics of row and corner transfer matrices of the $A^{(1)}_{n-1}$ restricted face models, *International J. of Modern Physics*, **12(20)** (1997), pp. 3551–3586.

[De90] M. Denert. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.*, **54** (1990), pp. 449–465.

[DF76] D. Dumont et D. Foata. — Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull. Soc. math. France*, **104** (1976), pp. 433-451.

[DR94] D. Dumont et A. Randrianarivony. — Dérangements et nombres de Genocchi, *Disc. Math.*, **132** (1994), pp. 37–49.

[Du74] D. Dumont. — Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke math. J.*, **41(2)** (1974), pp. 305–318.

[Du95] D. Dumont. — Further triangles of Seidel-Arnold type and continues fractions related to Euler and Springer numbers, *Adv. Appl. Math.*, **16** (1995), pp. 275-296.

[DV80] D. Dumont et G. Viennot. — A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Annals of Discrete Mathematics*, **6** (1980), pp. 77–87.

[DZ94] D. Dumont et J. Zeng. — Further results on the Euler and Genocchi numbers, *Aequationes mathematicae*, **47** (1994), pp. 31–42.

[Fa99] H. M. Farkas and I. Kra. — On the Quintuple Product Identity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1999), pp. 771–778.

[Fl80] P. Flajolet. — Combinatorial aspects of continued fractions, *Disc. Math.*, **32** (1980), pp. 125–161.

[Fl82] P. Flajolet. — On congruences and continued fractions for some classical combinatorial quantities, *Disc. Math.*, **41** (1982), pp. 145-153.

[Fo81] D. Foata. — Further divisibility of the q-tangent numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81** (1981), pp. 143–148.

[FR94] J.-M. Fedou and D. Rawlings. — More Statistics on Permutations Pairs, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **1**, 1994, R11, 17 pp.

[FS74] D. Foata et V. Strehl. — Rearrangements of the symmetric group and enumerative properties of the tangent and secant numbers, *Math. Z.*, **137** (1974), pp. 257–264.

[FZ90] D. Foata et D. Zeilberger. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, **83** (1990), pp. 31-59.

[FZ96] D. Foata et D. Zeilberger. — Graphical Major Indices, *J. of Computational and Applied Math.*, **68** (1996), pp. 79–101.

[GR93] I. Gessel et Ch. Reutenauer. — Counting Permutations with Given Cycle Structure and Descent Set, *J. Combin. Theory Ser. A*, **64** (1993), pp. 189–215.

[GS78] I. Gessel et R. Stanley. — Stirling polynomials, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **24** (1978), pp. 24-33.

[Ha49] W. Hahn. — Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen, *Math. Nachr*, **2** (1949), pp. 4–34.

[HC01] Ch. Hohlweg et Ch. Reutenauer. — Inverses of words and the parabolic structure of the symmetric group, 2001.

[HR98] G. Hetyei and E. Reiner. — Permutation Trees and Variation Statistics, *Europ. J. Combinatorics*, **19** (1998), pp. 847–866.

[Ki88] A. N. Kirillov. — On the Kostka-Green-Foulkes polynomials and Clebsch-Gordan numbers, *J. Geom. and Phys.*, **5** (1988), pp. 365–389.

[KK88] S. V. Kerov, A. N. Kirillov et N. Yu. Reshetikhin. — Combinatorics, Bethe Ansatz, and representations of the symmetric group, *J. Soviet Math.*, **41** (1988), pp. 916-924.

[Kn73] D.E. Knuth. — *The Art of Computer Programming*, vol. 3, *Sorting and Searching*. Addison-Wesley, Reading, 1973.

[La98] A. Lascoux. — Square-ice Enumeration, *The Andrews Festschrift. Seventeen Papers on Classical Number Theory and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001, pp. 335–348. [voir aussi *42e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B42p, 1999].

[Ma13] P. A. MacMahon. — The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects, *Amer. J. Math.*, **35** (1913), pp. 314–321.

[Pa94] S. Park. — The r-multipermutations, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **67** (1994), pp. 44-71.

[PWZe] M. Petkovsek, H. Wilf et D. Zeilberger. — *A=B*. — A K Peters, Ltd. 1996.

[Re93] V. Reiner. — Signed permutation statistics, *Europ. J. Combinatorics*, **14** (1993), pp. 553–567.

[Re95] V. Reiner. — The distribution of descents and length in a Coxeter group, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **2**, 1995, # R25.

[RZ94] A. Randrianarivony et J. Zeng. — Sur une extension des nombres d'Euler et les records des permutations alternantes, *J. Combin. Theory Ser. A*, **68** (1994), pp. 86-99.

[RZ96] A. Randrianarivony et J. Zeng. — Une famille de polynômes qui interpole plusieurs suites classiques de nombres, *Adv. Appl. Math.*, **17** (1996), pp. 1-26.

[Sc81] R. F. Scott. — Mathematical notes, *Messenger of Math.*, **10** (1881), pp. 142–149.

[St95] T. Stieltjes. — Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **9** (1895), pp. 1–47.

[St76] R. P. Stanley. — Binomial posets, Möbius inversion, and permutation enumeration, *J. Combinatorial Theory Ser. A*, **20** (1976), pp. 336–356.

[Te80] M. R. Teague. — Image analysis via the general theory of moments, *J. Opt. Soc. Am.*, **70** (1980), pp. 920–930.

[Vi80] G. Viennot. — *Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi*, (Séminaire de Théorie des nombres, 1980–1981, exposé No. 11, Publ. de l'Univ. Bordeaux I).

[Wa29] G. N. Watson. — Theorems stated by Ramanujan. VII: Theorems on continued fractions, *J. London Math. Soc.*, **4** (1929), pp. 39–48.

[Wa89] M. Wachs. — On q-derangement numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106** (1989), pp. 273–278.

[ZB85] D. Zeilberger et D. M. Bressoud . — A proof of Andrews' q-Dyson conjecture, *Discrete Math.*, **54** (1985), pp. 201–224.

[Ze86] D. Zeilberger. — Dans *Séance de problèmes*, *Combinatoire énumérative*, Lecture Notes in Mathematics, Edité par G. Labelle et P. Leroux, 1986, Springer-Verlag, t. **1234**, p. 387.

[Ze96] D. Zeilberger. — Proof of the alternating sign matrix conjecture, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **3(2)**, #R13, 84 pages, 1996.

LISTE DES TRAVAUX ET PUBLICATIONS

[1] G.-N. Han. — Distribution Euler-mahonienne : une correspondance, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **310, Série I** (1990), pp. 311–314.

[2] G.-N. Han. — Une nouvelle bijection pour la statistique de Denert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **310, Série I** (1990), pp. 493–496.

[3] G.-N. Han. — Croissance des polynômes de Kostka, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **311, Série I** (1990), pp. 269–272.

[4] G.-N. Han. — Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi, *Europ. J. Combinatorics*, **17** (1996), pp. 397–407.

[5] G.-N. Han. — *Calcul Denertien*, Thèse de Doctorat. Soutenue le 17 janvier 1992. Université Louis-Pasteur, Strasbourg (Jury : D. Foata, J.-P. Jouanolou, A. Lascoux, J. Désarménien, M. Mignotte), *Publ. l'I.R.M.A., Strasbourg*, 476/TS-29, 119 pages, 1991.

[6] G.-N. Han. — Une courte démonstration d'un résultat sur la Z-statistique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **314, Série I** (1992), pp. 969–971.

[7] G.-N. Han. — A statistical study of the Kostka-Foulkes Polynomials, *Adv. in Applied Math.*, **14** (1993), pp. 247–266.

[8] G.-N. Han. — Escaliers évalués et nombres classiques, *Publ. l'I.R.M.A., Strasbourg, Actes 24e Séminaire Lotharingien* , **461/S-24** (1993), pp. 77–85.

[9] G.-N. Han. — Une transformation fondamentale sur les réarrangements de mots, *Adv. in Math.*, **105(1)** (1994), pp. 26r–41.

[10] G.-N. Han. — Une version géométrique de la construction de Kerov-Kirillov-Reshetikhin, *Publ. l'I.R.M.A., Strasbourg, Actes 31e Séminaire Lotharingien*, **1994/021** (1994), pp. 71–85.

[11] D. Foata et G.-N. Han. — Nombres de Fibonacci et polynômes orthogonaux, *Leonardo Fibonacci : il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, M. Morelli et M. Tangheroni eds., Pacini, Roma, pp. 179–208, 1994.

[12] G.-N. Han. — The k-extension of a mahonian statistic, *Adv. in Appl. Math.*, **16** (1995), pp. 297–305.

[13] G.-N. Han. — Ordres bipartitionnaires et statistiques sur les mots, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **3(2)**, #R3, 5 pages, 1996.

[14] G.-N. Han. — Une démonstration "vérificative" d'un résultat de Foata-Zeilberger sur les relations bipartitionnaires, *J. Computational and Applied Math.*, **68** (1996), pp. 159–162.

[15] D. Foata et G.-N. Han. — Calcul basique des permutations signées, II: Analogues finis des fonctions de Bessel, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **4(2)**, #R9, 25 pages, 1997.

[16] D. Foata et G.-N. Han. — Calcul basique des permutations signées, I: Longueur et nombre d'inversions, *Adv. in Appl. Math.*, **18(4)** (1997), pp. 489–509.

[17] R. J. Clarke, G.-N. Han et J. Zeng. — A combinatorial interpretation of the Seidel generation of q-derangement numbers, *Annals of Combinatorics*, **4** (1997), pp. 313–327.

[18] D. Foata et G.-N. Han. — Inverses of Words, *39e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, [B39d], 1998, 8 pages.

[19] D. Foata et G.-N. Han. — Transformations on words, *Journal of Algorithms*, **28** (1998), pp. 172–191.

[20] G.-N. Han, A. Randrianarivony et J. Zeng. — Un autre q-analogue des nombres d'Euler, *The Andrews Festschrift. Seventeen Papers on Classical Number Theory and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001, pp. 139–158. [voir aussi *42e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B42e, 1999].

[21] D. Foata et G.-N. Han. — The Triple, Quintuple and Septuple Product Identities Revisited, *The Andrews Festschrift. Seventeen Papers on Classical Number Theory and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001, pp. 323–334. [voir aussi *42e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B42o, 1999].

[22] G.-N. Han et J. Zeng. — q-Polynômes de Gandhi et statistique de Denert, *Discrete Math.*, **205** (1999), pp. 119–143.

[23] G.-N. Han et J. Zeng. — On a q-sequence that generalizes the median Genocchi numbers, *Annal Sci. Math. Québec*, **23, no. 1** (1999), pp. 63–72.

[24] G.-N. Han et Ch. Krattenthaler. — Rectangular Scott-type permanents, *43e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, [B43g], 2000, 25 pages.

[25] G.-N. Han. — Généralisation de l'identité de Scott sur les permanents, *Linear Alg. Appl.*, **311** (2000), pp. 25–34.

[26] D. Foata et G.-N. Han. — Word straightening and q-Eulerian Calculus, *Contemporary Mathematics*, **vol. 254**, q-Series from a Contemporary Perspective, M. E. H. Ismail, D. W. Stanton Ed., AMS. pp. 141–156, 2000.

[27] H. Shu, L. Luo, X. Bao, W. Yu et G.-N. Han. — An Efficient Method for Computation of Legendre Moments, *Graphical Models*, **62(4)** (2000), pp. 237–262.

[28] D. Foata et G.-N. Han (Eds.). — *The Andrews Festschrift. Seventeen Papers on Classical Number Theory and Combinatorics*, ISBN: 3-540-41491-6, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001, 426 pages.

[29] D. Foata et G.-N. Han. — Chapter 11. Transformation on Words and q-Calculus, dans *Algebraic Combinatorics on Words*, M. Lothaire, 2000, pp. 293–324.

[30] D. Foata, G.-N. Han. — Arbres minimax et polynômes d'André, à paraître dans *Adv. in Appl. Math.*.

[31] G.-N. Han et C.-C. Zhang. — On the origin of Ser/Thr kinases in a prokaryote, *FEMS Microbiology Letters*, **200** (2001), pp. 79–84.

[32] D. Foata, G.-N. Han et B. Lass. — Les nombres hyperharmoniques et la fratrie du collectionneur de vignettes *43e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, [B47a], 2001, 20 pages.

[33] G.-N. Han et D. Perrin. — Ensembles inévitables, en préparation.