

UNE NOUVELLE TRANSFORMATION POUR LES STATISTIQUES EULER-MAHONIENNES ENSEMBLISTES

Dominique Foata et Guo-Niu Han (*)

EN HOMMAGE À PIERRE CARTIER,
POLYMATH, LOTHARINGIEN D'HONNEUR

Abstract. The construction of a bijection of the symmetric group onto itself is given that has the property of mapping a pair of set-statistics onto another pair. As a consequence, it is shown that a pair of Euler-mahonian statistics has a symmetric distribution.

Résumé. On donne la construction d'une bijection du groupe symétrique sur lui-même, qui a la propriété d'envoyer un couple de statistiques ensemblistes sur un autre couple. Comme conséquence, on montre qu'un couple de statistiques Euler-mahoniennes a une distribution symétrique.

Avant-propos

Nous sommes heureux de dédier le présent article de Combinatoire à Pierre Cartier, qui, dès les années soixante, a attiré l'attention de la communauté mathématique sur la renaissance de cette discipline; témoin son exposé de 1962 au Séminaire Bourbaki (*cf.* [Ca62]) sur l'identité exponentielle de Spitzer [Sp56] et ses applications aux fluctuations de sommes de variables aléatoires. Tout au long de sa carrière, il est resté attentif à tous les développements importants (*cf.* [Ca80, Ca82, Ca91]), en particulier au renouveau de l'étude des fonctions symétriques initialisé par Schützenberger [Sc77] et à la révolution philosophique que constitue la démonstration "automatique" des identités hypergéométriques due à Zeilberger [Ze90]. Il a lui-même contribué à cette discipline dans plusieurs travaux (*cf.* [CaFo69, Ca72, Ca90, Ca00]). Notons enfin que le mémoire sur les commutations [CaFo69] a donné un cadre mathématique utile aux problèmes de parallélisme (*cf.* Diekert [Di90]) et a fourni une version non-commutative à l'identité fondamentale du polynôme chromatique [St73] (*cf.* Lass [La01]).

La construction donnée ci-dessous d'une nouvelle transformation sur le groupe symétrique s'inscrit dans ce cadre de recherche, où les propriétés

(*) Ce travail de recherche a pu être effectué grâce au soutien financier du contrat européen "Algebraic Combinatorics", no. RTN2-2001-00059.

des statistiques définies sur ce groupe (comme le nombre de descentes, la longueur, l'indice majeur, ...) sont systématiquement explorées et étendues à certains groupes de Coxeter (cf. [AR01, ABR01, Br94, FH97, Re93a, Re93b, Re93c, Re95a, Re95b, StE93, St76, StJ92]). Il s'agit, en particulier, de trouver les expressions analytiques des séries génératrices de ces statistiques; si on ne peut le faire directement, il s'agit alors de construire des bijections sur ces groupes qui permettent de ramener le calcul à des cas classiques connus. Chemin faisant, la construction de ces bijections fait apparaître des propriétés nouvelles sur ces groupes.

1. Introduction

Appelons *ligne de route* d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(n)$ (écrite comme un mot en les lettres $1, 2, \dots, n$), l'*ensemble*, noté *Ligne* σ , de tous les entiers i tels que $1 \leq i \leq n - 1$ et $\sigma(i) > \sigma(i + 1)$. [Certains auteurs parlent d'*ensemble de descentes* ("descent set") et adoptent la notation $D(\sigma)$ ou $\text{DES } \sigma$) (cf. [AR01, Br94, Re95a, Re95b]). La *somme des éléments* de *Ligne* σ est notée $\text{maj } \sigma$ (l'*indice majeur* de σ).

Par ailleurs, la *ligne inverse de route*, *l*igne σ , de σ , est définie comme l'*ensemble* de toutes les lettres $\sigma(i)$, telles que la lettre égale à $1 + \sigma(i)$ soit à la *gauche* de $\sigma(i)$ dans le mot σ . Il est immédiat que la ligne inverse de route de σ n'est autre que la ligne de route de la permutation inverse σ^{-1} .

Rappelons que le *codage par inversions* (ou codage de Lehmer) (cf. [Le60]), *Invcode* σ , d'une permutation σ est défini comme le *mot* $w = x_1x_2 \dots x_n$, de longueur n , tel que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, la lettre x_i est donnée par

$$(1.1) \quad x_i := \#\{j : 1 \leq j \leq i - 1, \sigma(j) > \sigma(i)\}.$$

Par construction-même, on a :

$$(1.2) \quad 0 \leq x_i \leq i - 1 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Un mot $w = x_1x_2 \dots x_n$, dont les lettres sont des entiers satisfaisant les inégalités (1.2) est dit *sous-excédent*. On note SE_n l'ensemble des mots sous-excédents de longueur n . On définit la *ligne des montées*, *Rise* w , d'un mot quelconque (en particulier d'un mot sous-excédent) $w = x_1x_2 \dots x_n$, comme l'ensemble des indices i tels que $1 \leq i \leq n - 1$ et $x_i < x_{i+1}$.

Il est évident que "Invcode" est une bijection de \mathcal{S}_n sur SE_n . Une autre telle bijection est le *maj-codage* "Majcode", que l'on peut définir, par récurrence, de la façon suivante : le maj-codage de la permutation 1 est 0. Soient σ une permutation d'ordre $n \geq 2$ et σ^- la permutation déduite de σ par suppression de la lettre n dans σ . Si $x_1x_2 \dots x_{n-1}$ est le maj-codage de σ^- , alors on définit $\text{Majcode } \sigma := x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n$, avec $x_n := \text{maj } \sigma - \text{maj } \sigma^-$. Une autre définition de "Majcode" par étiquetage est proposée au paragraphe 5.

Le but de cet article est de démontrer qu'il existe une bijection $\phi : \sigma \mapsto \tau$ du groupe symétrique \mathcal{S}_n sur lui-même et surtout de construire une telle bijection, telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} w' & \xrightarrow{\text{Rise}} & B \\ \text{Majcode} \uparrow & & \uparrow \text{Iligne} \\ \tau & \xleftarrow{\phi} & \sigma \\ \text{Invcode} \downarrow & & \downarrow \text{Ligne} \\ w & \xrightarrow{\text{Rise}} & A \end{array} \quad \begin{array}{l} w, w' \in \text{SE}_n; \\ \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n; \\ A, B \subset \{1, 2, \dots, n-1\}. \end{array}$$

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Il existe une bijection ϕ qui satisfait :*

$$(1.4) \quad (\text{Ligne}, \text{Iligne}) \sigma = (\text{Rise} \circ \text{Invcode}, \text{Rise} \circ \text{Majcode}) \phi(\sigma).$$

Le lecteur souhaitant lire tout de suite la construction de la bijection ϕ est invité à se reporter au paragraphe 4, où deux descriptions en sont données. Il doit seulement se rappeler la définition de Majcode et, pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq n$, utiliser la bijection croissante de $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ sur $\{1, 2, \dots, n-1\}$ notée red_i (“red” pour “réduite”) et la bijection inverse red_i^{-1} .

En plus des statistiques “Ligne”, “Iligne” et “Rise” déjà définies, introduisons une quatrième statistique *ensembliste* “Eul”, dite *valeur Eulé-rienne*, qui associe à tout mot sous-excédent $w = x_1 x_2 \dots x_n$ un sous-ensemble, $\text{Eul } w$, de $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Si $n = 1$, on pose $\text{Eul } 0 := \emptyset$; si $n \geq 2$ et si l'on pose $w' := x_1 x_2 \dots x_{n-1}$, de sorte que $w' \in \text{SE}_{n-1}$ et $w = w' x_n$, on peut poser, par récurrence, $\text{Eul } w' := \{y_k < y_{k-1} < \dots < y_1\} \subset \{1, 2, \dots, n-2\}$. Notons alors $\{z_{k+1} < z_{k+2} < \dots < z_{n-1} = n-1\}$ l'ensemble complémentaire $\{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \text{Eul } w'$. Si $k \geq x_n \geq 0$, on définit :

$$(1.5) \quad \text{Eul } w' x_n := \{y_k, y_{k-1}, \dots, y_{x_n+1}, y_{x_n} + 1, \dots, y_2 + 1, y_1 + 1\}.$$

En particulier $\text{Eul } w' 0 = \text{Eul } w'$.

Posons, par commodité, $y_{k+1} := 0$ et $y_0 := n$. Si $n-1 \geq x_n \geq k+1$, il existe un entier unique p tel que $y_{p+1} < z_{x_n} < y_p$. En particulier, $x_n \geq k+1 \geq p+1$. On définit alors :

$$(1.6) \quad \text{Eul } w' x_n := \{y_k, \dots, y_{p+1}, x_n - p, y_p + 1, \dots, y_1 + 1\}.$$

Exemple. On a successivement : $\text{Eul}(0, 0) = \emptyset$; $\text{Eul}(0, 0, 1) = \{1\}$; $\text{Eul}(0, 0, 1, 0) = \{1\}$; $\text{Eul}(0, 0, 1, 0, 3) = \{1, 3\}$; $\text{Eul}(0, 0, 1, 0, 3, 1) = \{1, 4\}$. Avec $w' = 0, 0, 1, 0, 3, 1$, on obtient $\text{Eul } w'0 = \{1, 4\}$; $\text{Eul } w'1 = \{1, 5\}$; $\text{Eul } w'2 = \{2, 5\}$; $\text{Eul } w'3 = \{1, 2, 5\}$; $\text{Eul } w'4 = \{1, 3, 5\}$; $\text{Eul } w'5 = \{1, 4, 5\}$ et $\text{Eul } w'6 = \{1, 4, 6\}$.

Par définition-même du codage par inversions (*cf.*, par exemple, [Lo02], Proposition 11.4.2), on a, pour toute permutation σ ,

$$(1.7) \quad \text{Ligne } \sigma = \text{Rise} \circ \text{Invcode } \sigma.$$

On peut vérifier également (voir § 5) que l'on a :

$$(1.8) \quad \text{Ligne } \sigma = \text{Eul} \circ \text{Majcode } \sigma.$$

Désignons par \mathbf{i} la bijection définie sur \mathcal{S}_n , qui envoie toute permutation sur son inverse $\mathbf{i} \sigma := \sigma^{-1}$ et formons la chaîne

$$(1.9) \quad \begin{array}{ccccccc} & \mathbf{i} & \phi & \text{Majcode} & & \text{Invcode}^{-1} & \\ \sigma' & \mapsto & \sigma & \mapsto & \tau & \mapsto & w' & \mapsto & \tau' \\ \mathcal{S}_n & & \mathcal{S}_n & & \mathcal{S}_n & & \text{SE}_n & & \mathcal{S}_n \end{array}$$

De (1.4), (1.7) et (1.8), résultent, d'une part, les identités

$$(1.10) \quad \begin{array}{l} \text{Ligne } \sigma' = \text{Iligne } \sigma = \text{Rise} \circ \text{Majcode } \tau = \text{Rise } w' = \text{Ligne } \tau'; \\ \text{Iligne } \sigma' = \text{Ligne } \sigma = \text{Ligne } \tau = \text{Eul } w' = \text{Eul} \circ \text{Invcode } \tau', \end{array}$$

d'autre part, le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Les couples de statistiques ensemblistes (Ligne, Iligne), (Rise \circ Majcode, Ligne), (Ligne, Eul \circ Invcode) sur \mathcal{S}_n , ainsi que (Rise, Eul) sur SE_n ont même distribution.*

Le plan de l'article est le suivant. Dans le prochain paragraphe, nous donnons les applications du Théorème 1.1 à l'étude des statistiques numériques Euler-Mahoniennes. Dans le paragraphe 3, nous expliquons la démarche naturelle qui mène à la construction de la bijection du Théorème 1.1, qui est, elle, décrite dans le paragraphe 4. Les propriétés de cette bijection reposent sur une analyse fine du majcodage, qui est explicitée dans le paragraphe 5. Le paragraphe suivant contient un lemme fondamental sur les lignes de montée. Dans le paragraphe 8, nous calculons le polynôme générateur des permutations, de ligne de route fixée, par un couple Euler-Mahonien de statistiques. Pour terminer, nous donnons un exemple numérique, qui illustre, d'une part, la construction de la bijection ϕ , d'autre part, le calcul de toutes les statistiques utilisées.

2. Statistiques Euler-Mahoniennes

Si "Stat" est une statistique *ensembliste*, comme les quatre statistiques précédemment introduites, on forme les deux statistiques numériques $\# \text{Stat}$ et ΣStat , telles que $\# \text{Stat } w$ (resp. $\Sigma \text{Stat } w$) est définie comme le cardinal de (resp. la somme des éléments dans) $\text{Stat } w$.

Avec “Ligne”, on retrouve des $:= \# \text{Ligne}$ (*le nombre de descentes*) et $\text{maj} := \Sigma \text{Ligne}$ (*l’indice majeur*). Avec “Iligne”, on pose traditionnellement $\text{idés} := \# \text{Iligne}$, $\text{imaj} := \Sigma \text{Iligne}$. On introduit, en plus, les quatre statistiques définies sur SE_n : $\# \text{Eul}$, ΣEul , $\# \text{Rise}$, ΣRise . D’après la définition de la valeur Eulérienne donnée en (1.5) et (1.6), on observe que si $w = x_1 x_2 \dots x_n \in \text{SE}_n$, alors

$$(2.1) \quad \Sigma \text{Eul } w = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

une statistique que l’on note plus volontiers $\text{tot } w$ (“tot” pour “total”). Quant à la statistique $\# \text{Eul}$, que l’on note simplement “eul”, elle a déjà été introduite dans [Ha90] : soit $w = x_1 x_2 \dots x_n$ un mot sous-excédent. Si $n = 1$, on pose $\text{eul } w = 0$; si $n \geq 2$ et si l’on pose $w' := x_1 x_2 \dots x_{n-1} \in \text{SE}_{n-1}$, de sorte que $w = w' x_n$, alors

$$(2.2) \quad \text{eul}(w' x_n) := \begin{cases} \text{eul } w', & \text{si } x_n \leq \text{eul } w'; \\ 1 + \text{eul } w', & \text{si } x_n \geq 1 + \text{eul } w'. \end{cases}$$

On peut encore voir que $\text{eul } w$ est la longueur du plus long sous-mot $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$) tel que $1 \leq x_{i_1}$, $2 \leq x_{i_2}$, \dots , $k \leq x_{i_k}$.

Soit $\text{inv } \sigma$ le *nombre d’inversions* de la permutation σ . Par définition-même de Invcode , on a immédiatement :

$$(2.3) \quad \Sigma \text{Eul} \circ \text{Invcode} = \text{inv}.$$

On dit qu’une statistique bivariée (f, g) est *Euler-mahonienne*, si f et g sont définies sur un ensemble fini E_n , de cardinal $n!$ et si sa fonction génératrice $\sum t^{f(w)} q^{g(w)}$ ($w \in E_n$), écrite sous la forme $A_n(t, q) = \sum_{k \geq 0} A_{n,k}(q) t^k$, satisfait la relation de récurrence

$$(2.4) \quad A_{n,k}(q) = [k+1]_q A_{n-1,k}(q) + q^k [n-k]_q A_{n-1,k-1}(q)$$

pour $1 \leq k \leq n-1$, avec les conditions initiales : $A_{n,0}(q) = 1$ et $A_{n,k}(q) = 0$ pour $k \geq n$. Dans (2.4), on a posé $[k]_q := 0$ pour $k = 0$ et $[k]_q := 1 + q + \dots + q^{k-1}$ pour $k \geq 1$. Posons

$$(t; q)_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ (1-t)(1-tq) \dots (1-tq^{n-1}), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

De façon équivalente (l’équivalence est facile à voir), on peut dire que (f, g) est Euler-mahonienne si le polynôme $A_n(t, q)$ satisfait l’identité

$$(2.5) \quad \frac{A_n(t, q)}{(t; q)_{n+1}} = \sum_{r \geq 0} t^r ([r+1]_q)^n.$$

On sait depuis Carlitz [Ca54] que la statistique (des, maj) , égale encore à $(\# \text{Ligne}, \Sigma \text{Ligne})$, est Euler-mahonienne sur \mathcal{S}_n . La proposition suivante résulte alors de (1.9) et de (1.10).

Proposition 2.1. *Les couples (ides, imaj), (eul ◦ Invcod, inv) sur \mathcal{S}_n et (eul, tot), (#Rise, Σ Rise) sur SE_n sont des statistiques Euler-Mahoniennes.*

Se reportant toujours à la chaîne (1.9) et à (1.10), on obtient, en plus, les propriétés suivantes

Propriété 2.2. *La bijection $\sigma' \mapsto \tau'$ de \mathcal{S}_n sur \mathcal{S}_n satisfait*

$$(2.6) \quad (\text{Ligne, ides, imaj}) \sigma' = (\text{Ligne, eul} \circ \text{Invcod, inv}) \tau';$$

$$(2.7) \quad (\text{des, maj, ides, imaj}) \sigma' = (\text{des, maj, eul} \circ \text{Invcod, inv}) \tau'.$$

La statistique “eul ◦ Invcod” a été introduite par Skandera [Sk01] sous le nom de “st”. Il avait aussi conjecturé qu’il existait une bijection $\sigma' \mapsto \tau'$ satisfaisant (2.7). On peut donc répondre positivement à sa conjecture.

Propriété 2.3. *La bijection $\sigma' \mapsto w'$ de \mathcal{S}_n sur SE_n satisfait*

$$(2.8) \quad (\text{Ligne, ides, imaj}) \sigma' = (\text{Rise, eul, tot}) w';$$

$$(2.9) \quad (\text{des, maj, ides, imaj}) \sigma' = (\# \text{ Rise, } \Sigma \text{ Rise, eul, tot}) w'.$$

Posons

$$(u; q_1, q_2)_{r+1, s+1} := \prod_{0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s} (1 - uq_1^i q_2^j).$$

Comme démontré dans [GG78] (voir aussi [Ra80], [DF86]), l’identité

$$(2.10) \quad \sum_{r, s \geq 0} \frac{t_1^r t_2^s}{(u; q_1, q_2)_{r+1, s+1}} = \sum_{n \geq 0} u^n \frac{A_n(t_1, t_2, q_1, q_2)}{(t_1; q_1)_{n+1} (t_2; q_2)_{n+1}},$$

définit une suite de polynômes $(A_n(t_1, t_2, q_1, q_2))$ ($n \geq 0$) qui sont les fonctions génératrices de \mathcal{S}_n par le quadruplet (des, maj, ides, imaj). En d’autres termes, on a : $A_n(t_1, t_2, q_1, q_2) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} t_1^{\text{des } \sigma} t_2^{\text{ides } \sigma} q_1^{\text{maj } \sigma} q_2^{\text{imaj } \sigma}$. L’existence de la bijection $\sigma' \mapsto w'$ permet donc d’obtenir le résultat suivant, apparemment difficile à obtenir directement.

Théorème 2.4. *La fonction génératrice factorielle des polynômes générateurs des ensembles SE_n de mots sous-excédants ($n \geq 0$) par le quadruplet (# Rise, Σ Rise, eul, tot) est donnée par l’expression (2.10).*

Pour tout couple d’entiers $r, n \geq 0$, notons $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ le q -coefficient binomial défini par :

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} := \begin{cases} \frac{(q; q)_n}{(q; q)_{n-r} (q; q)_r}, & \text{si } 0 \leq r \leq n; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

TRANSFORMATION POUR STATISTIQUES ENSEMBLISTES

Soit $L = \{\ell_1 < \dots < \ell_k\}$ un sous-ensemble de l'intervalle $\{1, 2, \dots, n-1\}$. On pose $\ell_0 := 0$ et $\ell_{k+1} := n$ et on désigne par $N_r(L, n)$ la matrice $(k+1) \times (k+1)$:

$$N_r(L, n) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 - \ell_0 + r \\ r \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ell_2 - \ell_0 + r \\ r \\ \ell_2 - \ell_1 + r \\ r \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \ell_k - \ell_0 + r \\ r \\ \ell_k - \ell_1 + r \\ r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ell_{k+1} - \ell_0 + r \\ r \\ \ell_{k+1} - \ell_1 + r \\ r \end{bmatrix} \\ 0 & 1 & \dots & \begin{bmatrix} \ell_k - \ell_2 + r \\ r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ell_{k+1} - \ell_2 + r \\ r \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \begin{bmatrix} \ell_{k+1} - \ell_k + r \\ r \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $N_r(\emptyset, n) = \begin{bmatrix} n+r \\ r \end{bmatrix}$.

Il résulte des Propriétés 2.2 et 2.3 que pour tout sous-ensemble L de $\{1, 2, \dots, n-1\}$ on a les égalités :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \text{Ligne } \sigma = L} t^{\text{idés } \sigma} q^{\text{imaj } \sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \text{Ligne } \sigma = L} t^{\text{eul} \circ \text{Invcode } \sigma} q^{\text{inv } \sigma} = \sum_{w \in \text{SE}_n, \text{Rise } w = L} t^{\text{eul } w} q^{\text{tot } w}.$$

Désignons par $A_L(t, q)$ ce polynôme. Dans le dernier paragraphe, on établit le résultat suivant, qui entraîne d'ailleurs l'identité (2.5).

Théorème 2.5. *On a :*

$$(2.11) \quad \frac{A_L(t, q)}{(t; q)_{n+1}} = \sum_{r \geq 0} t^r \det N_r(L, n).$$

3. Comment construire la bijection ϕ ?

La construction de ϕ nécessite une analyse fine des propriétés du maj-codage. On la définit par récurrence sur n . Si $n \geq 2$ et si $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ est une permutation d'ordre n telle que $\sigma(n) = i$, on pose $\sigma = \sigma' i$, où, par conséquent, $\sigma' := \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n-1)$. Si la bijection ϕ a été construite pour les permutations d'ordre inférieur ou égal à $(n-1)$, on l'étend, de façon naturelle, aux permutations de la suite $1, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n$ à l'aide de la bijection réd_i définie dans l'introduction. En effet, si l'on pose $\phi_i := \text{réd}_i^{-1} \circ \phi \circ \text{réd}_i$, on définit

$$\phi(\sigma) = \phi(\sigma' i) := \gamma_i(\phi_i(\sigma')) i,$$

où γ_i est un *réarrangement* de la permutation $\phi_i(\sigma')$ qu'il faut préciser. Remarquons que cette définition de ϕ *préserve la dernière lettre* i .

La première étape de la construction de ϕ est donc de définir $\tau' := \gamma_i(\phi_i(\sigma'))$, puis $\tau := \tau' i$. Remarquons que $\phi \circ \text{réd}_i(\sigma')$ est une permutation

de $1, 2, \dots, n-1$, alors que τ' est une permutation de $1, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n$. Dans toute la suite, nous adoptons la convention : $\text{Majcode } \tau' := \text{Majcode } \phi \circ \text{rédi}_i(\sigma')$. Si l'on désigne par $x(1) \dots x(i-1)x(i+1) \dots x(n)$ le maj-codage de τ' , on définit aussi

$$(3.1) \quad \text{Majcode}_i \tau' := x(1) \dots x(i-1) \bullet x(i+1) \dots x(n),$$

où le gros point “ \bullet ”, placé dans la $i^{\text{ième}}$ position, satisfait l'inégalité $\bullet < 0$. Cette convention s'avèrera très utile dans la suite, car on montrera que l'on a, en fait,

$$(3.2) \quad \text{Iligne } \sigma = \text{Rise} \circ \text{Majcode}_i \tau'.$$

Pour $n \geq 2$, on partitionne \mathcal{S}_n en deux classes disjointes \mathcal{S}'_n et \mathcal{S}''_n . La première classe est formée de toutes les permutations σ telle que $\sigma(n-1) < \sigma(n)$ ou telles que $\sigma(n) = 1$ et donc \mathcal{S}''_n se compose de toutes les permutations σ telles que $\sigma(n-1) > \sigma(n) \geq 2$. Pour les permutations σ appartenant à \mathcal{S}'_n , le réarrangement γ_i est simplement l'application identique, de sorte que $\phi(\sigma) := \phi_i(\sigma') i$.

Pour les permutations σ appartenant à \mathcal{S}''_n , on détermine toujours $\tau' = \phi_i(\sigma')$ et $\tau = \tau' i$, une permutation qui appartient encore à \mathcal{S}''_n . Le réarrangement γ_i , qu'il faut appliquer à τ' , peut être visualisé en se reportant à la Figure 1, où l'on a reproduit la partie droite du graphe de la permutation τ . La lettre $\tau(j)$ est la lettre la plus à droite de la permutation τ qui soit inférieure à $\tau(n) = i \geq 2$. Cette lettre existe et est bien définie pour $n \geq 3$. Soient l la plus petite lettre entre $\tau(j)$ et i , puis L la seconde plus petite lettre, si elle existe; sinon, on pose $L := n+1$.

On forme alors les $(L-i-1)$ permutations

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \tau_{i+1} &:= (i+1, i+2) \cdots (l-2, l-1)(l-1, l) \tau \\ &\quad \cdots \quad \cdots \\ \tau_{l-2} &:= (l-2, l-1)(l-1, l) \tau \\ \tau_{l-1} &:= (l-1, l) \tau \\ \tau_l &:= \tau \\ \tau_{l+1} &:= (l+1, l) \tau \\ \tau_{l+2} &:= (l+2, l+1)(l+1, l) \tau \\ &\quad \cdots \quad \cdots \\ \tau_{L-1} &:= (L-1, L-2) \cdots (l+2, l+1)(l+1, l) \tau \end{aligned}$$

qui se déduisent de τ par application de ces produits de transpositions. Comme elles se terminent toutes par i , on pose $\tau_k := \tau'_k i$ pour $k = i+1, i+2, \dots, L-1$. La construction de ϕ utilise la propriété suivante.

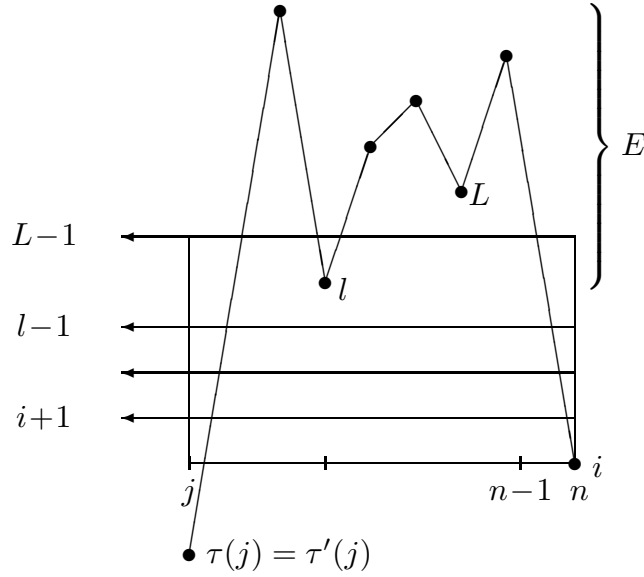


Fig. 1

Proposition 3.1. *Les permutation $\tau_{i+1}, \dots, \tau_{L-1}$ ont toutes même ligne de route (que τ). Leurs maj-codages sont tous distincts et il existe une bijection, que l'on peut explicitement construire, $\psi : l \mapsto p$ de l'intervalle $\{i+1, i+2, \dots, L-1\}$ sur lui-même, telle que*

$$(3.4) \quad \text{Rise} \circ \text{Majcode}_i \tau'_l = \text{Rise} \circ \text{Majcode} \tau_p.$$

Le fait que ces permutations aient même ligne de route est évident, puisque chaque transposition appliquée ne permute que deux entiers consécutifs, qui sont *non-adjacents* dans la permutation. Une fois qu'une bijection $l \mapsto p$ de l'ensemble $\{i+1, \dots, L-1\}$ sur lui-même est définie, la bijection ϕ cherchée est simplement donnée par : $\phi(\sigma) = \tau_p$, où $p = \psi(l)$. Compte-tenu de (3.2) et (3.4), elle a alors la propriété : $\text{ligne} \sigma = \text{Rise} \circ \text{Majcode} \phi(\sigma)$. Le réarrangement γ_i qu'il faut définir est donc $\gamma_i(\phi_i(\sigma')) = \tau'_p$.

Exemple. Considérons la permutation $\tau = 6, 4, 8, 7, 2, 1, 9, 5, 3$ qui appartient à \mathcal{S}_9'' . L'extrémité droite de son graphe est représentée dans la Figure 2. Les $L-i-1 = 5$ permutations du tableau (3.3) sont données par

$$\begin{aligned} \text{Ligne } \tau_k &= 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \\ \tau_4 &= (4, 5) \tau = 6, 5, 8, 7, 2, 1, 9, 4, 3 \\ \tau_5 &= \tau = 6, 4, 8, 7, 2, 1, 9, 5, 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_6 &= (6, 5) \tau = 5, 4, 8, 7, 2, 1, 9, 6, 3 \\ \tau_7 &= (7, 6) (6, 5) \tau = 5, 4, 8, 6, 2, 1, 9, 7, 3 \\ \tau_8 &= (8, 7) (7, 6) (6, 5) \tau = 5, 4, 7, 6, 2, 1, 9, 8, 3 \end{aligned}$$

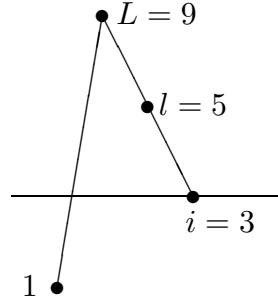


Fig. 2

Elles ont toutes la même ligne de route : 1, 3, 4, 5, 7, 8. En laissant tomber la lettre 3 de la fin, on obtient les permutations τ'_k . La détermination des $\text{Majcode}_3 \tau'_k$ et des $\text{Majcode} \tau_k$ donne le tableau suivant, où la ligne des montées, Rise w , apparaît au-dessus de chaque code w .

$\text{Majcode}_3 \tau'_4 = 0, 1, \bullet, \mathbf{0}, 2, 3, 2, 5, 7;$	$\text{Majcode} \tau_4 = 0, 1, 0, \mathbf{3}, 3, 4, 3, 6, 8;$
$\text{Majcode}_3 \tau'_5 = 0, 1, \bullet, 2, \mathbf{0}, 3, 2, 5, 7;$	$\text{Majcode} \tau_5 = 0, 1, 0, 2, \mathbf{4}, 4, 3, 6, 8;$
$\text{Majcode}_3 \tau'_6 = 0, 1, \bullet, 2, 3, \mathbf{0}, 2, 5, 7;$	$\text{Majcode} \tau_6 = 0, 1, 0, 2, 3, \mathbf{5}, 3, 6, 8;$
$\text{Majcode}_3 \tau'_7 = 0, 1, \bullet, 2, 3, 2, \mathbf{0}, 5, 7;$	$\text{Majcode} \tau_7 = 0, 1, 0, 2, 3, 2, \mathbf{6}, 6, 8;$
$\text{Majcode}_3 \tau'_8 = 0, 1, \bullet, 2, 3, 2, 5, \mathbf{0}, 7;$	$\text{Majcode} \tau_8 = 0, 1, 0, 2, 3, 2, 5, \mathbf{7}, 8.$

On constate que les ensembles des lignes de montées des maj-codages des τ'_k , d'une part, et des lignes de montées des maj-codages des τ_k , d'autre part, sont identiques. Reste à définir la bonne bijection (*cf.* § 6). On verra qu'elle repose sur la propriété classique qui veut que si l'on part d'une permutation de $1, 2, \dots, n$ et si l'on insère dans cette permutation, dans les $(n + 1)$ interstices possibles, un élément distinct de ces n entiers, disons $i + 1/2$ avec $i \geq 0$ entier, l'ensemble des lignes de montées des $(n + 1)$ réarrangements obtenus *ne dépend pas* de i , mais seulement de la permutation initiale.

On observe aussi les deux faits suivants :

on passe de $\text{Majcode}_i \tau'_k$ à $\text{Majcode}_i \tau_k$ en remplaçant le gros point par 0, le zéro reproduit en gras par $(k - 1)$ et en augmentant d'une unité les nombres à la droite de ce zéro gras.

on passe de $\text{Majcode}_i \tau'_k$ à $\text{Majcode}_i \tau'_{k+1}$ en transposant le zéro reproduit en gras et la lettre suivante;

Ces deux faits sont démontrés dans les Propositions 5.2 et 5.3.

4. Construction de la bijection ϕ

Cette construction fait appel à la réduction “ réd_i ” et au maj-codage, dont les définitions ont été données dans l’Introduction. Une autre définition du maj-codage par étiquetage sera donnée au paragraphe 5.

Description de la bijection ϕ . Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si $n = 1$ ou 2 , on pose $\phi(\sigma) = \sigma$. Si $n \geq 3$, on pose $i := \sigma(n)$, $\sigma' := \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n-1)$ et on définit $\tau' := \text{réd}_i \circ \phi \circ \text{réd}_i^{-1}(\sigma')$ et $\tau := \tau' i$.

Si $\tau(n-1) < \tau(n)$ ou si $\tau(n) = 1$, on pose : $\phi(\sigma) := \tau$.

Si $\tau(n-1) > \tau(n) \geq 2$, on détermine le plus grand entier j tel que $\tau(j) < i$, puis la plus petite lettre l de τ entre $\tau(j)$ et $\tau(n)$ et la seconde plus petite lettre L , aussi entre $\tau(j)$ et $\tau(n)$. Si cette seconde plus petite lettre n’existe pas, on pose : $L := n + 1$. (Voir Figure 1.)

Si $i + 1 = L - 1$, on pose aussi : $\phi(\sigma) := \tau$.

On forme alors $\text{Majcode}_i \tau' := x(1)\dots x(i-1) \bullet x(i+1)\dots x(n)$. Si $l = i + 1$ ou [si $i + 2 \leq l \leq L - 2$ et $x(l-1) \geq x(l+1)$], on détermine le *plus long facteur croissant strict* $x(l+1)x(l+2)\dots x(p)$ du mot $x(l+1)x(l+2)\dots x(L-1)$, de sorte que l’on a, ou bien $p = L - 1$, ou bien $l + 1 \leq p \leq L - 2$ et $x(p) \geq x(p+1)$. On pose alors :

$$(4.1) \quad \psi(l) := p;$$

$$(4.2) \quad \phi(\sigma) := \tau_p = (p, p-1) \cdots (l+2, l+1)(l+1, l) \tau.$$

Si $l = L - 1$ ou [si $i + 2 \leq l \leq L - 2$ et $x(l-1) < x(l+1)$], on détermine le *plus long facteur décroissant au sens large* $x(p)x(p+1)\dots x(l-1)$ de $x(i+1)x(i+2)\dots x(l-1)$, de sorte que l’on a, ou bien $p = i + 1$, ou bien $i + 2 \leq p \leq l - 1$ et $x(p-1) > x(p)$. On pose alors

$$(4.3) \quad \psi(l) := p;$$

$$(4.4) \quad \phi(\sigma) := \tau_p = (p, p+1) \cdots (l-2, l-1)(l-1, l) \tau.$$

Noter que l’on a deux expressions pour τ_p suivant que $l + 1 \leq p \leq L - 1$ ou $i + 1 \leq p \leq l - 1$.

Donnons encore une description algorithmique, qui permet une programmation informatique quasiment immédiate.

ALGORITHME- ϕ : une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ étant donnée, l’algorithme suivant fournit la permutation $\tau := \phi(\sigma)$.

- ($\phi 1$) Si $n = 1$, **RETURN** la permutation 1.
- ($\phi 2$) On pose
 $i := \sigma(n)$;
 $\sigma' := \sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(n-1)$;
 $\tau' := \text{réd}_i^{-1} \phi \text{réd}_i(\sigma')$;
 $\tau := \tau' i$;
- ($\phi 2.1$) Si $\tau(n-1) < i$ ou $i = 1$, **RETURN** τ ;
- ($\phi 2.2$) On pose
 $j := \max\{j' : 1 \leq j' \leq n-1, \tau(j') < i\}$;
 $E := \{\tau(j+1), \tau(j+2), \dots, \tau(n-1)\}$;
 $l := \min E$;
 $L := \min(E \setminus \{l\} \cup \{n+1\})$;
 $x := \text{Majcode}_i \tau' = x(1) \dots x(i-1) \bullet x(i+1) \dots x(n)$;
- ($\phi 2.2.1$) Si $i+1 = L-1$, **RETURN** τ ;
- ($\phi 2.2.2$) Si $l = i+1$ ou si $[i+2 \leq l \leq L-2$ et $x(l-1) \geq x(l+1)]$,
 $\tau := (l, l+1) \tau$;
 $p := l+1$;
 Tant que $[x(p) < x(p+1)$ et $p \leq L-2]$, faire
 $\{\tau := (p, p+1) \tau; \quad p := p+1;\}$
RETURN τ ;
- ($\phi 2.2.3$) Si $l = L-1$ ou si $[i+2 \leq l \leq L-2$ et $x(l-1) < x(l+1)]$,
 $\tau := (l, l-1) \tau$;
 $p := l-1$;
 Tant que $[x(p-1) \geq x(p)$ et $p \geq i+2]$, faire
 $\{\tau := (p, p-1) \tau; \quad p := p-1;\}$
RETURN τ ;

5. Propriétés du maj-codage

Rappelons la construction du maj-codage par *étiquetage*, tel qu'elle est bien exposée, par exemple, dans l'article de Rawlings [R81]. Soit σ une permutation d'ordre n . Si $n = 1$, on pose $\text{Majcode } 1 = 0$. Supposons $n \geq 2$ et notons $\sigma^- := \sigma^-(1)\sigma^-(2) \dots \sigma^-(n-1)$ la permutation d'ordre $(n-1)$ déduite de la permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(n)$ d'ordre n par suppression de la lettre n . Posons $\sigma^-(0) = \sigma^-(n) := 0$. Soit $(d+1)$ le nombre d'entiers i tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $\sigma^-(i) > \sigma^-(i+1)$ (on a toujours $\sigma^-(n-1) > \sigma^-(n) = 0$, de sorte que $d \geq 0$).

En lisant le mot $\sigma^-(0)\sigma^-(1) \dots \sigma^-(n-1)\sigma^-(n)$ de la droite vers la gauche, on maj-étiquette $0, 1, \dots, d$ les $(d+1)$ successions de deux lettres $\sigma^-(i)\sigma^-(i+1)$ telles que $\sigma^-(i) > \sigma^-(i+1)$ ($0 \leq i \leq n-1$). On lit ensuite

le mot $\sigma^-(0)\sigma^-(1)\dots\sigma^-(n-1)\sigma^-(n)$ de la gauche vers la droite et on maj-étiquette $(d+1), (d+2), \dots, (n-1)$, les $(n-1-d)$ successions restantes $\sigma^-(i) < \sigma^-(i+1)$. Or, on passe de σ^- à σ en insérant n dans l'une des successions $\sigma^-(i)\sigma^-(i+1)$ ($0 \leq i \leq n-1$) (et en supprimant les lettres $\sigma^-(0), \sigma^-(n)$). Soit y la maj-étiquette de la succession où n est inséré. On pose alors

$$\text{Majcode } \sigma := w^- y,$$

où, par récurrence, w^- est le maj-codage de σ^- .

Nous supposons $n \geq 2$ et nous nous servons de cette définition par étiquetage pour comparer les maj-codages des permutations τ' et τ , où $\tau' = \tau'(1)\dots\tau'(i-1)\tau'(i+1)\dots\tau'(n)$ est une permutation de $1, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n$ et où τ est la permutation de $1, 2, \dots, n$ obtenue en juxtaposant la lettre i à la droite de τ' , soit $\tau := \tau' i$. On note $x(1)x(2)\dots x(i-1)x(i+1)\dots x(n)$ le maj-codage de τ' .

Proposition 5.1. *Si $\tau'(n) < i$ et si*

$$\text{Majcode}_i \tau' = x(1)x(2)\dots x(i-1) \bullet x(i+1)\dots x(n),$$

alors

$$(5.1) \quad \text{Majcode } \tau' i = x(1)x(2)\dots x(i-1) 0 x(i+1)\dots x(n)$$

et les lettres $x(i+1), \dots, x(n)$ sont supérieures ou égales à 1.

Démonstration. La proposition est évidente pour $i = n$. Supposons $1 \leq i \leq n-1$ et notons $\text{Sub}_k \tau'$ le sous-mot de τ' réduit aux lettres de τ' , inférieures ou égales à k . Par définition du maj-codage, on a $\text{Majcode}_{\text{Sub}_{i-1} \tau'} = x(1)x(2)\dots x(i-1)$ and $\text{Majcode}_{\text{Sub}_i \tau' i} = x(1)x(2)\dots x(i-1)0$, puisque i est juxtaposé à la droite de $\text{Sub}_{i-1} \tau'$.

Supposons qu'il existe un entier j tel que $i+1 \leq j \leq n$ et $x(j) = 0$; considérons le plus grand entier j ayant cette propriété. Par définition du maj-codage, la permutation τ' aurait une dernière lettre égale à $j > i$. Ceci contredit l'hypothèse : $\tau'(n) < i$. Ainsi tous les entiers $x(i+1), \dots, x(n)$ sont supérieurs ou égaux à 1.

Pour chaque $j \geq i+1$, on a $\text{Sub}_{j-1}(\tau' i) = (\text{Sub}_{j-1} \tau') i$. Dans la construction du maj-codage de τ' (resp. de $\tau' i$), aucune lettre $j \geq i+1$ ne peut être insérée à la droite de $\text{Sub}_{j-1} \tau'$ (resp. à la droite de $\text{Sub}_{j-1} \tau' i$ ni juste avant la lettre finale i). Par conséquent, le maj-étiquetage des entiers $i+1, i+2, \dots, n$ est identique pour τ' et $\tau' i$. \square

Nous comparons maintenant les maj-codages de τ' et $\tau = \tau' i$ lorsque τ appartient à \mathcal{S}_n'' , c'est-à-dire lorsque $\tau(n-1) > \tau(n) \geq 2$. Les lettres l et L conservent les significations données dans la définition de ϕ ou dans la Figure 1.

Proposition 5.2. *Si τ appartient à \mathcal{S}_n'' , la comparaison des maj-codages de τ' (deuxième ligne) et de τ (troisième ligne) est indiquée dans la table suivante :*

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & l-1 & l & l+1 & \dots & L-1 & \dots & n \\ x(1) & \dots & x(i-1) & \bullet & x(i+1) & \dots & x(l-1) & 0 & x(l+1) & \dots & x(L-1) & \dots & x(n) \\ x(1) & \dots & x(i-1) & 0 & x(i+1) & \dots & x(l-1) & l-1 & \bar{x}(l+1) & \dots & \bar{x}(L-1) & \dots & \bar{x}(n) \end{array}$$

où $\bar{x}(k) := 1 + x(k)$. De plus, les lettres $x(i+1), \dots, x(L-1)$ sont toutes au moins égales à 1 ; enfin, si $L \leq n$, on a $x(L) = L - 2$ ou 0 ; si $l+1 \leq L-1$, on a $x(l+1) \leq l-2$.

Démonstration. Le sous-mot $\text{Sub}_{l-1} \tau'$ se termine par $\tau(j) < i$ (cf. Fig. 1). Il résulte de la Proposition 5.1 que le maj-codage de $\text{Sub}_{l-1} \tau$ vaut

$$x(1) \dots x(i-1) 0 x(i+1) \dots x(l-1)$$

et les lettres $x(i+1), \dots, x(l-1)$ sont toutes plus grandes que 1. Lorsque l'on construit le maj-codage de τ , la lettre l est insérée dans la montée la plus à droite $\tau(j) < i = \tau(n)$. On crée ainsi une nouvelle descente, qui obtient la maj-étiquette 1. Comme cette descente la plus à droite n'apparaît pas dans τ' , chaque lettre $m \geq l+1$ obtient une maj-étiquette $r+1$ dans le maj-codage de τ , chaque fois qu'elle obtient la maj-étiquette r dans τ' .

Maintenant, ou bien $L = n+1$, ou bien $L \leq n$ et cette lettre se trouve à droite de $\tau'(j)$ dans τ' . On a donc $x(L) = L - 2$ ou 0. Supposons enfin $i+1 < L-1$. Lors de la construction du maj-codage de τ' , la lettre $(l+1)$ n'a pas été insérée dans la montée la plus à droite $\tau'(j) < i$, qui a la maj-étiquette $(l-1)$. On a donc $x(l+1) \leq l-2$. \square

Proposition 5.3. *Si $\tau = \tau' i$ appartient à \mathcal{S}_n'' et si $l+1 \leq L-1$, la comparaison des maj-codages de τ' (deuxième ligne) et de $v' := (l, l+1) \tau'$ (troisième ligne) est donnée dans la table :*

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & l-1 & l & l+1 & \dots & L-1 & \dots & n \\ x(1) & \dots & x(i-1) & \bullet & x(i+1) & \dots & x(l-1) & 0 & x(l+1) & \dots & x(L-1) & \dots & x(n) \\ x(1) & \dots & x(i-1) & \bullet & x(i+1) & \dots & x(l-1) & x(l+1) & 0 & \dots & x(L-1) & \dots & x(n) \end{array}$$

Démonstration. Il existe deux mots w_1, w_2 , avec w_2 non-vidé, tels que

$$\text{Sub}_{l+1} \tau' = w_1 (l+1) w_2 l \quad \text{et} \quad \text{Sub}_l v' = w_1 l w_2.$$

Comme l'insertion de l dans $\text{Sub}_{l-1} \tau'$ crée une montée, de maj-étiquette maxima, le maj-étiquetage de $(l+1)$ dans $\text{Sub}_l \tau'$ et celui de l dans $\text{Sub}_{l-1} v'$ sont identiques, tous deux égaux à $x(l+1)$. Par ailleurs, la maj-étiquette de $(l+1)$ dans v' est 0. \square

De même, le maj-codage de $(l-1, l) \tau'$ vaut

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & l-2 & l-1 & l & \dots & L-1 & \dots & n \\ x(1) \dots x(i-1) & \bullet & x(i+1) \dots x(l-2) & 0 & x(l+1) \dots x(L-1) \dots x(n) \end{array}$$

et celui de $(i+1, i+2) \dots (l-2, l-1)(l-1, l) \tau'$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & l & l+1 & \dots & L-1 & \dots & n \\ x(1) \dots x(i-1) & \bullet & 0 & x(i+1) \dots x(l-1) & x(l+1) \dots x(L-1) \dots x(n) \end{array}$$

que l'on *réécrit* désormais :

$$y(1) \dots y(i-1) \bullet 0 \quad y(i+2) \dots y(l) \quad y(l+1) \dots y(L-1) \dots y(n)$$

Utilisant cette nouvelle expression et conservant les notations (2.3), on obtient ainsi le résultat suivant.

Proposition 5.4. *Les maj-codages des permutations $\tau'_{i+1}, \dots, \tau'_{l-1}, \tau'_l, \tau'_{l+1}, \dots, \tau'_{L-1}$ sont donnés par les lignes de la matrice*

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & l-1 & l & l+1 & \dots & L-1 & \dots & n \\ y(1) \dots y(i-1) \bullet & 0 & \dots y(l-1) & y(l) & y(l+1) \dots y(L-1) \dots y(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(1) \dots y(i-1) \bullet y(i+2) \dots & 0 & y(l) & y(l+1) \dots y(L-1) \dots y(n) \\ y(1) \dots y(i-1) \bullet y(i+2) \dots & y(l) & 0 & y(l+1) \dots y(L-1) \dots y(n) \\ y(1) \dots y(i-1) \bullet y(i+2) \dots & y(l) & y(l+1) & 0 & \dots y(L-1) \dots y(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(1) \dots y(i-1) \bullet y(i+2) \dots & y(l) & y(l+1) y(l+2) \dots & 0 & \dots y(n) \end{array}$$

tandis que les maj-codages des permutations $\tau_{i+1}, \dots, \tau_{l-1}, \tau_l, \tau_{l+1}, \dots, \tau_{L-1}$ sont donnés par les lignes de la matrice

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & l-1 & l & l+1 & \dots & L-1 & \dots & n \\ y(1) \dots y(i-1) 0 & i & \dots \bar{y}(l-1) & \bar{y}(l) & \bar{y}(l+1) \dots \bar{y}(L-1) \dots \bar{y}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(1) \dots y(i-1) 0 y(i+2) \dots & l-2 & \bar{y}(l) & \bar{y}(l+1) \dots \bar{y}(L-1) \dots \bar{y}(n) \\ y(1) \dots y(i-1) 0 y(i+2) \dots & y(l) & l-1 & \bar{y}(l+1) \dots \bar{y}(L-1) \dots \bar{y}(n) \\ y(1) \dots y(i-1) 0 y(i+2) \dots & y(l) & y(l+1) & l & \dots \bar{y}(L-1) \dots \bar{y}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(1) \dots y(i-1) 0 y(i+2) \dots & y(l) & y(l+1) y(l+2) \dots & L-2 & \dots \bar{y}(n) \end{array}$$

De plus, on a les inégalités suivantes :

$$(5.2) \quad 1 \leq y(i+2) \leq i-1, \quad 1 \leq y(i+3) \leq i, \quad \dots, \quad 1 \leq y(L-1) \leq L-4;$$

$$(5.3) \quad y(L) = 0 \quad \text{ou} \quad y(L) = L-2.$$

6. La correspondance entre lignes de montées

Se reportant à l'énoncé de la Proposition 5.4, nous nous proposons de montrer qu'à toute ligne du premier tableau correspond biunivoquement une ligne du second tableau ayant même ligne de route. Observons, tout d'abord, qu'avec la convention $\bullet < 0$ et l'inégalité $1 \leq y(i+2)$, il y a une descente en position $i-1$ et une montée en i dans *toutes* les lignes des deux tableaux.

Supposons $L \leq n$. Si $y(L) = 0$, alors $y(L-1)$ ou $0 \geq y(L)$ dans le premier tableau et $\bar{y}(L-1)$ ou $L-2 \geq 1 = \bar{y}(L)$ dans le second tableau, puisque $i \leq 2$ entraîne $L \geq 3$. Ainsi *toutes* les lignes des deux tableaux ont une descente en position $L-1$. Si $y(L) = L-2$, alors $y(L-2) < y(L)$, d'après (5.2) et donc $\bar{y}(L-2) < \bar{y}(L)$. Par ailleurs, $0 \leq y(L)$ et $L-2 < L-1 = \bar{y}(L)$, toujours d'après (5.2). *Toutes* les lignes des deux tableaux ont alors une montée en position $L-1$.

Il suffit donc de définir une bijection entre les lignes du premier et du second tableau réduites aux colonnes d'indices $i+1, i+2, \dots, L-1$. D'après (5.2), on a $y(i+2) \leq i-1$, d'où $i \geq \bar{y}(i+2)$. De même, pour $i+3 \leq l \leq L-2$, on a $y(l) \leq l-3$ et $y(l+1) \leq l-2$, d'où $y(l) < l-1$ et $l-1 \geq \bar{y}(l+1)$. Enfin, $y(L-1) < L-2$. Il en résulte qu'il suffit de définir une bijection, qui conserve la ligne de montées, entre les lignes notées $B'_{i+1}, \dots, B'_{L-1}$ et B_{i+1}, \dots, B_{L-1} , des matrices bordées

$$B' := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i+1 & i+2 & \dots & L-2 & L-1 \\ \begin{array}{c} i+1 \\ i+2 \\ \dots \\ L-2 \\ L-1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & y(i+2) & \dots & y(L-2) & y(L-1) \\ y(i+2) & 0 & \dots & y(L-2) & y(L-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(i+2) & y(i+3) & \dots & 0 & y(L-1) \\ y(i+2) & y(i+3) & \dots & y(L-1) & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i+1 & i+2 & \dots & L-2 & L-1 \\ \begin{array}{c} i+1 \\ i+2 \\ \dots \\ L-2 \\ L-1 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & y(i+2) & \dots & y(L-2) & y(L-1) \\ y(i+2) & \infty & \dots & y(L-2) & y(L-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(i+2) & y(i+3) & \dots & \infty & y(L-1) \\ y(i+2) & y(i+3) & \dots & y(L-1) & \infty \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

où on a supprimé les barres sur les lettres, devenues inutiles pour la seule comparaison des lignes de montées et aussi remplacé les coefficients diagonaux dans la seconde matrice par le symbole ∞ .

Pour obtenir les lignes de la matrice B' (resp. B), on part du mot $y(i+2)y(i+3)\dots y(L-1)$ et on insère la lettre 0 (resp. ∞) dans les différents $(L-i-1)$ interstices. Ceci implique, en particulier, que les lignes des matrice B' et B ont des lignes de montées *distinctes*.

La construction de la bijection s'inspire du principe bien connu pour les permutations, qui veut que si l'on insère une lettre quelconque, mais *distincte* de toutes les lettres présentes, dans les $(L-i-1)$ interstices, on obtient toujours le même ensemble de lignes de montées pour les $(L-i-1)$ mots ainsi formés.

On définit alors des lettres soulignées, que l'on entrelace avec les entiers de la façon suivante :

$$\underline{0} = 0 < 1 < \underline{1} < 2 < \underline{2} < \dots < L-3 < \underline{L-3} < L-2 < \underline{L-2} = \infty.$$

Soit $w a \underline{m} b w'$ la ligne déduite de B'_l par le remplacement du 0 par \underline{m} et où le symbole $-\infty$ a été mis en début et en fin de ligne, de sorte que les lettres a et b sont toujours définies et les mots w, w' éventuellement vides.

On pose alors

$$\delta(w a \underline{m} b w') = \begin{cases} w a m + 1 \underline{m + 1} b w', & \text{si } a, b \neq m + 1; \\ w a m + 1 \underline{m + 1} w', & \text{si } a \neq b = m + 1; \\ w \underline{m + 1} m + 1 b w', & \text{si } b \neq a = m + 1; \\ w m + 1 m + 1 \underline{m + 1} w', & \text{si } a = b = m + 1. \end{cases}$$

Il est immédiat que la transformation δ préserve la ligne des montées et est bijective. La bijection $\psi : l \mapsto p$ est simplement donnée par :

$$(6.1) \quad \psi(l) = p \text{ si et seulement si } \delta^{L-2}(B'_l) = B_p.$$

Exemple. Prenons $i = 2, L = 9$ et $B'_{i+1} = B'_3 = 0, 1, 4, 4, 5, 1$, de sorte que $B'_5 = 1, 4, 0, 4, 5, 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} \delta^3(B'_5) &= 1, 4, \underline{3}, 4, 5, 1 \\ \delta^4(B'_5) &= 1, 4, 4, \underline{4}, 5, 1 \\ \delta^5(B'_5) &= 1, 4, 4, 5, \underline{5}, 1 \\ \delta^7(B'_5) &= 1, 4, 4, 5, \underline{7}, 1 = B_7. \end{aligned}$$

d'où $\psi(5) = 7$. Avec cette bijection ψ bien définie, la Proposition 3.1 est démontrée. On peut vérifier que cette définition est exactement la même que celle donnée dans l'algorithme de ϕ au paragraphe 4.

7. Fin de la démonstration du Théorème 1.1

Reprenons la définition de ϕ donnée au paragraphe 3. On peut supposer $n \geq 3$. Partant d'une permutation σ d'ordre n se terminant par $\sigma(n) = i$, on définit une permutation $\tau = \tau' i$, se terminant aussi par la lettre i . Puisque, par induction, ϕ a été appliqué à la réduction de $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n-1)$, on a aussi : $\sigma(n-1) = \tau(n-1)$. Par conséquent,

$$(7.1) \quad \text{Ligne } \sigma = \text{Ligne } \tau.$$

D'autre part, $\text{Iligne } \sigma = (\text{réd}_i^{-1} \text{Iligne } \text{réd}_i \sigma') \cup \{i\} \setminus \{i-1\}$, de plus, par récurrence, on a : $\text{Iligne } \text{réd}_i \sigma' = \text{Rise} \circ \text{Majcode}(\text{réd}_i \tau')$. Comme i est aussi la dernière lettre de τ , on en déduit

$$\begin{aligned} \text{Iligne } \sigma &= \text{réd}_i^{-1} \text{Rise} \circ \text{Majcode}(\text{réd}_i \tau') \cup \{i\} \setminus \{i-1\} \\ &= \text{Rise} \circ \text{Majcode}_i \tau', \end{aligned}$$

qui est la relation (3.2).

Si σ appartient à \mathcal{S}'_n et se termine par i , alors $\phi(\sigma) = \tau = \tau' i$ et naturellement $\text{Rise} \circ \text{Majcode}_i \tau' = \text{Rise} \circ \text{Majcode} \tau$. La relation (1.4) est établie d'après (3.2) et (7.1).

Si σ appartient à \mathcal{S}''_n , on a $\phi(\sigma) = \tau_p$, où, avec les notations de la Proposition 3.1, on a $\tau_l := \tau$ et $p = \psi(l)$. La relation (1.4) résulte encore de (3.2) et (7.1) et du fait que τ_p a même ligne de route que τ .

Remarque. La transformation Ψ introduite dans [Fo68], définie sur toute classe de réarrangements de mots et à valeurs dans la même classe, satisfait $\text{imaj} w = \text{inv} \Psi(w)$. Lorsqu'on la restreint au groupe symétrique, on sait (cf. [FS78]) qu'elle satisfait l'identité

$$(\text{Ligne}, \text{imaj}) \sigma = (\text{Ligne}, \text{inv}) \Psi(\sigma).$$

Posons $w'' := \text{Invcode} \circ \Psi(\sigma)$. On en déduit l'identité

$$(\text{Ligne}, \text{imaj}) \sigma = (\text{Rise}, \text{tot}) w'',$$

mais, en général, $\text{idcs} \sigma \neq \text{eul} w''$. La bijection $\sigma' \mapsto w'$ définie dans la Propriété 2.3 a donc une propriété supplémentaire.

8. Un calcul analytique

Établissons le Théorème 2.5, lorsque le polynôme $A_L(t, q)$ est le polynôme générateur des permutations de ligne de route L par le couple $(\text{idcs}, \text{imaj})$. On réadapte une technique de calcul de fonctions symétriques, que Désarménien (cf. [Lo02], chap. 11) a utilisée dans le cas $t = 1$.

Il est bien connu (voir, par exemple, [Lo02], p. 333) ou vite vérifié que l'on a :

$$\begin{bmatrix} \ell + r \\ r \end{bmatrix} = \sum_{r \geq b_1 \geq \dots \geq b_\ell \geq 0} q^{b_1 + \dots + b_r}.$$

Reprenons les notations de l'introduction, où $L = \{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ désigne un sous-ensemble de l'intervalle $\{1, 2, \dots, n-1\}$ et où $\ell_0 := 0$ et $\ell_{k+1} := n$. Par ailleurs, désignons par $W_r(L, n)$ l'ensemble des mots $w = w_1 w_2 \dots w_n$, de longueur n , dont les lettres sont des entiers positifs qui satisfont les inégalités

$$\begin{aligned} (*)_{(L, n)} \quad & r \geq w_1 \geq \dots \geq w_{\ell_1} \geq 0; \quad r \geq w_{\ell_1+1} \geq \dots \geq w_{\ell_2} \geq 0; \quad \dots \\ & r \geq w_{\ell_k+1} \geq \dots \geq w_n \geq 0; \\ & w_{\ell_1} < w_{\ell_1+1}, \quad w_{\ell_2} < w_{\ell_2+1}, \quad \dots, \quad w_{\ell_k} < w_{\ell_k+1}. \end{aligned}$$

Proposition 8.1. *On a l'identité :*
$$\sum_{w \in W_r(L, n)} q^{\text{tot} w} = \det N_r(L, n).$$

Démonstration. La proposition est évidemment vraie pour $k = 1$. Pour $k \geq 2$, on développe le déterminant de $N_r(L, n)$ suivant les éléments de la dernière ligne. Par récurrence, on obtient

$$\det N_r(L, n) = \det N_r(\{\ell_1, \dots, \ell_{k-1}\}, \ell_k) \begin{bmatrix} \ell_{k+1} - \ell_k + r \\ r \end{bmatrix} - \det N_r(\{\ell_1, \dots, \ell_{k-1}\}, n).$$

La proposition est ainsi prouvée, puisque le premier (resp. le second) terme du membre de droite est le polynôme générateur des mots $w = w_1 w_2 \dots w_n$ satisfaisant les conditions $(*)_{(L, n)}$, sauf éventuellement (resp. sauf expressément) la sous-condition $w_{\ell_k} < w_{\ell_k+1}$. \square

Nous appliquons maintenant aux mots de $W_r(L, n)$ la bijection qui les envoie sur des couples (σ, s) , où σ est une permutation de $1, 2, \dots, n$, de ligne de route égale à L et où $s = s_1 s_2 \dots s_n$ est un mot décroissant ayant les propriétés :

$$(8.1) \quad r \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0; \text{ Ligne } \sigma = L; i \in \text{Iligne } \sigma \Rightarrow s_i > s_{i+1}.$$

Pour définir le couple (σ, s) correspondant à $w = w_1 w_2 \dots w_n \in W_r(L, n)$, on procède comme suit : supposons que le réarrangement croissant de w soit de la forme $i_1^{a_1} \dots i_m^{a_m}$, avec $i_1 < \dots < i_m$ et $a_1 \geq 1, \dots, a_m \geq 1$. On lit w de gauche à droite, en donnant les étiquettes $1, 2, \dots, a_m$ aux a_m lettres rencontrées égales à i_m ; on continue, toujours de gauche à droite, en donnant les étiquettes $a_m + 1, \dots, a_m + a_{m-1}$ aux a_{m-1} lettres rencontrées égales à i_{m-1} et ainsi de suite. La lecture finale de ces étiquettes de gauche à droite fournit une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$. Le mot s est simplement défini comme le réarrangement décroissant du mot w .

Exemple. Soient $n = 9, r = 8, L = \{2, 5, 7\}$ et $\begin{pmatrix} L \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & 7 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ un mot de $N_8(L, 9)$. La permutation σ s'écrit $\begin{pmatrix} L \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 8 & 7 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et le mot s par $\begin{pmatrix} \text{Iligne } \sigma \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ 7 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments de $\text{Iligne } \sigma$ ont été reproduits en gras.

On se persuade aisément que $w \mapsto (\sigma, s)$ est une bijection de $W_r(L, n)$ sur les couples (σ, s) ayant la propriété (8.1). Une démonstration en est donnée par Désarménien (voir [Lo02], Théorème 11.3.2), dans le cas où les lettres du mot w ne sont pas majorées par un entier r .

Compte tenu des Propriétés 2.2 et 2.3, pour démontrer le Théorème 2.5, il suffit d'établir la proposition suivante.

Proposition 8.2. *On a :*

$$\frac{\sum_{\sigma, \text{Ligne } \sigma=L} t^{\text{ides } \sigma} q^{\text{imaj } \sigma}}{(t; q)_{n+1}} = \sum_{r \geq 0} t^r \det N_r(L, n).$$

Démonstration. Là encore, c'est une technique déjà utilisée dans la théorie des fonctions symétriques qui conduit au résultat (voir [Lo02], pp. 371-372 pour la version dite non bornée et aussi [DF85], Théorème 4.1, ou encore [Ma95], p. 82, lorsque l'on manipule des tableaux). On part d'un couple (σ, s) ayant les propriétés (8.1) et on appelle $d = d_1 d_2 \dots d_n$ le mot dont les lettres d_i sont définies par

$$d_i := \begin{cases} s_i - s_{i+1} - \chi(i \in \text{ligne } \sigma), & \text{si } 1 \leq i \leq n-1; \\ s_n, & \text{si } i = n. \end{cases}$$

On a alors $d_1 + \dots + d_n + \text{ides } \sigma = s_1$; on peut donc poser $d_0 := r - s_1 \geq 0$ et ainsi $d_0 + d_1 + \dots + d_n + \text{ides } \sigma = r$. Par ailleurs, $1 \cdot d_1 + 2 \cdot d_2 + \dots + n \cdot d_n + \text{imaj } \sigma = \text{tot } s$. L'application $(\sigma, s) \mapsto (\sigma, (d_0, d_1, \dots, d_n))$ est une bijection des couples (σ, s) satisfaisant (8.1) sur les couples $(\sigma, (d_0, d_1, \dots, d_n))$ tels que $\text{Ligne } \sigma = L$ et où les entiers d_0, d_1, \dots, d_n sont positifs et satisfont $d_0 + d_1 + \dots + d_n + \text{ides } \sigma = r$. On en tire :

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 0} t^r \det N_r(L, n) &= \sum_{r \geq 0} t^r \sum_{w \in W_r(L, n)} q^{\text{tot } w} = \sum_{r \geq 0} t^r \sum_{(\sigma, s)} q^{\text{tot } s} \\ &= \sum_{r \geq 0} \sum_{\sigma} \sum_{d_0, \dots, d_n} t^{d_0 + \dots + d_n + \text{ides } \sigma} q^{1 \cdot d_1 + \dots + n \cdot d_n + \text{imaj } \sigma} \\ &= \sum_{\sigma} t^{\text{ides } \sigma} q^{\text{imaj } \sigma} \sum_{r \geq \text{ides } \sigma} \sum_{\substack{d_0 + \dots + d_n \\ = r - \text{ides } \sigma}} t^{d_0} (tq)^{d_1} \dots (tq^n)^{d_n} \\ &= \sum_{\sigma} t^{\text{ides } \sigma} q^{\text{imaj } \sigma} \frac{1}{(t; q)_{n+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. L'identité (2.11) a été ainsi démontrée lorsque le polynôme $A_L(t, q)$ est le polynôme générateur suivant le couple $(\text{ides}, \text{imaj})$. La Propriété 2.2 permet de conclure que l'identité est encore vraie lorsque $A_L(t, q)$ est le polynôme générateur suivant le couple $(\text{eul} \circ \text{Invcode}, \text{inv})$. Nous ne proposons pas de méthode de calcul direct dans ce dernier cas, alors que la spécialisation de (2.11) pour $t = 1$, à savoir $A_L(q)/(q; q)_n = \det N$, où $N = (N_{i,j})$ ($1 \leq i, j \leq k+1$) est la matrice $(k+1) \times (k+1)$ donnée par

$$N_{i,j} := \begin{cases} 1/(q; q)_{\ell_j - \ell_{i-1}}, & \text{si } i \leq j; \\ 1, & \text{si } i = j+1; \\ 0, & \text{autrement;} \end{cases}$$

peut être obtenue lorsque $A_L(q)$ est, ou bien le polynôme générateur suivant “imaj”, ou bien suivant “inv” (cf. [Lo02], chap. 11). Notons encore que le calcul de $A_L(q)$ suivant “inv” est aussi fait dans Stanley ([St86], p. 70) et qu’il q -généralise le vieux résultat de MacMahon ([Mac15], p. 190).

Remarquons, enfin, que si l’on somme l’identité de la Proposition 8.2, en remplaçant toutefois $\det N_r(L, n)$ par son expression de la Proposition 8.1, sur tous les sous-ensembles $L \subset \{1, \dots, n - 1\}$, on obtient, de nouveau, l’identité des polynômes q -Eulériens (2.5).

Un exemple numérique

La tableau suivant donne la construction complète de $\phi(\sigma)$ pour $\sigma = 649821753$ en utilisant l’algorithme- ϕ décrit dans la paragraphe 4. Il doit être lu colonne par colonne de la gauche vers la droite. On note que le calcul de $\phi(\text{red}_i(\sigma'))$ utilise la valeur obtenue dans la colonne suivante. On obtient $\phi(\sigma) = 658721943$.

σ	649821753	53872164	4376215	436521	32541	2143	213	21
i	3	4	5	1	1	3	3	1
$\text{red}_i(\sigma')$	53872164	4376215	436521	32541	2143	213	21	1
$\phi(\text{red}_i(\sigma'))$	53762184	4376215	436521	32541	2143	213	21	1
τ'	64872195	5387216	437621	43652	3254	214	21	2
τ	648721953	53872164	4376215	436521	32541	2143	213	21
$\tau(n-1) < i$ ou $i = 1$?	Non	Non	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Oui
(j, l, L)	(6, 5, 9)	(6, 6, 9)	–	–	–	(2, 3, 5)	–	–
$i+1 = L-1$?	Non	Non	–	–	–	Oui	–	–
x	01●203257	012●3025	–	–	–	–	–	–
RETURN par	$(\phi 2.2.3)$	$(\phi 2.2.2)$	$(\phi 2.1)$	$(\phi 2.1)$	$(\phi 2.1)$	$(\phi 2.2.1)$	$(\phi 2.1)$	$(\phi 2.1)$
$\phi(\sigma) = ?\tau$	$(45)\tau$	$(87)(76)\tau$	τ	τ	τ	τ	τ	τ
$\phi(\sigma)$	658721943	53762184	4376215	436521	32541	2143	213	21

Calcul des statistiques utilisées. Pour $\sigma = 649821753$, on obtient :

$$w = \text{Invcode } \sigma = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6;$$

$$v = \text{Majcode } \sigma = 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 4 \ 4 \ 6 \ 5 \ 6;$$

$$\text{Iligne } \sigma = \{1, 3, 5, 7, 8\};$$

$$\text{Rise } w = \text{Eul } v = \text{Ligne } \sigma = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\};$$

$$\text{Eul } w = \{1, 3, 4, 7, 8\}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \text{des } \sigma &= \# \text{ Ligne } \sigma = \# \text{ Eul } v = \# \text{ Rise } w = 6; \\
 \text{maj } \sigma &= \Sigma \text{ Ligne } \sigma = \Sigma \text{ Eul } v = \Sigma \text{ Rise } w = 28; \\
 \text{ides } \sigma &= 5; \quad \text{imaj } \sigma = 24; \\
 \text{inv } \sigma &= \text{tot } w = \Sigma \text{ Eul } w = 23; \\
 \text{eul } w &= \# \text{ Eul } w = 5.
 \end{aligned}$$

Le calcul suivant pour $\phi(\sigma) = 658721943$ illustre l'identité (1.4).

$$\begin{aligned}
 \text{Ligne } \phi(\sigma) &= \{1, 3, 4, 5, 7, 8\} = \text{Ligne } \sigma; \\
 t = \text{Majcode } \phi(\sigma) &= 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 3 \ 4 \ 3 \ 6 \ 8; \\
 \text{Rise } t &= \{1, 3, 5, 7, 8\} = \text{Iligne } \sigma.
 \end{aligned}$$

Remerciements. Le premier auteur remercie Doron Zeilberger pour d'utiles discussions, qui sont à l'origine de cet article. Il remercie également Jean-Pierre Bourguignon, Michel Broué, François Digne, Guy Henniart, Bernhard Keller, Yvette Kosmann-Schwarzbach et Marc Rosso d'avoir organisé ce beau Colloque des 17 et 18 juin 2002 à Paris en l'honneur de Pierre Cartier.

Bibliographie

- [AR01] Ron M. Adin and Yuval Roichman. — The flag major index and group actions on polynomial rings, *Europ. J. Combin.*, vol. **22**, 2001, p. 431–446.
- [ABR01] Ron M. Adin, Francesco Brenti and Yuval Roichman. — Descent Numbers and Major Indices for the Hyperoctahedral Group, *Adv. in Appl. Math.*, vol. **27**, 2001, p. 210–224.
- [Br94] Francesco Brenti. — q -Eulerian Polynomials Arising from Coxeter Groups, *Europ. J. Combinatorics*, vol. **15**, 1994, p. 417–441.
- [Ca54] L. Carlitz. — q -Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **76**, 1954, p. 332–350.
- [Ca62] Pierre Cartier. — Fluctuations dans les suites de variables aléatoires indépendantes, *Séminaire Bourbaki* [Exposés 241–258, Paris. 1962/1963], exposé n° 241, p. 241–01-18. — New York, Amsterdam, Benjamin, 1966.
- [Ca72] Pierre Cartier. — On the structure of free Baxter algebras, *Advances in Math.*, vol. **9**, 1972, p. 253–265.
- [Ca80] Pierre Cartier. — Arrangements d’hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire, *Séminaire Bourbaki* [Exposés 551–578, Paris. 1980/1981], exposé n° 561, p. 561–01-22. — Berlin, Springer-Verlag, 1982 (*Lecture Notes in Math.*, **901**).
- [Ca82] Pierre Cartier. — La théorie classique et moderne des fonctions symétriques, *Séminaire Bourbaki* [Exposés 597–600, Paris. 1982/1983], exposé n° 597, p. 597–01-24. — Paris, N. Bourbaki, 1983.
- [Ca90] Pierre Cartier. — Nouvelles aventures au pays des q -analogues, *Sém. Lothar. Comb.*, B23a, 1990, 28 pages. [<http://www.mat.univie.ac.at/~slc>].
- [Ca91] Pierre Cartier. — Démonstration “automatique” d’identités et fonctions hypergéométriques [d’après Zeilberger], *Séminaire Bourbaki* [Exposés 745–749, Paris. 1991/1992], exposé n° 746, p. 746–01-43. — Paris, N. Bourbaki, 1991.
- [Ca00] Pierre Cartier. — Mathemagics, *Sém. Lothar. Comb.*, B44d, 2000, 71 pages. [<http://www.mat.univie.ac.at/~slc>].
- [CaFo69] Pierre Cartier et Dominique Foata. — *Problèmes combinatoires de permutations et réarrangements*. — Berlin, Springer-Verlag, 1969 (*Lecture Notes in Math.*, **85**).
- [Di90] Volker Diekert. — *Combinatorics on Traces*. — Berlin, Springer-Verlag, 1990 (*Lecture Notes in Computer Science*, **454**).
- [DF85] Jacques Désarménien et Dominique Foata. — Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, *Bull. Soc. Math. France*, vol. **113**, 1985, p. 3–22.
- [Fo68] Dominique Foata. — On the Netto inversion number of a sequence, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. **19**, 1968, p. 236–240.
- [FH97] Dominique Foata et Guo-Niu Han. — Calcul basique des permutations signées, I : longueur et nombre d’inversions, *Adv. in Appl. Math.*, vol. **18**, 1997, p. 489–509.
- [FS78] Dominique Foata and Marcel-Paul Schützenberger. — Major Index and Inversion number of Permutations, *Math. Nachr.*, vol. **83**, 1978, p. 143–159.
- [GG79] Adriano M. Garsia and Ira Gessel. — Permutations Statistics and Partitions, *Adv. in Math.*, vol. **31**, 1979, p. 288–305.
- [Ha90] Guo-Niu Han. — Distribution Euler-mahonienne : une correspondance, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. **310**, 1990, p. 311–314.
- [La01] Bodo Lass. — Calcul Combinatoire Ensembliste, Thèse Univ. Strasbourg, 2001. Prépubl. IRMA 2000/043, 147 pages.
- [Le60] D. H. Lehmer. — Teaching combinatorial tricks to a computer, *Proc. Sympos. Appl. Math.*, vol. **10**, 1960, p. 179–193. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [Lo02] M. Lothaire. — *Algebraic Combinatorics on Words*. — Cambridge Univ. Press, 2002 (*Encyclopedia of Math. and its Appl.*, **90**).

- [Ma95] Ian G. Macdonald. — *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition. — Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [Mac15] P. A. MacMahon. — *Combinatory Analysis*, vol. 1. — Cambridge Univ. Press, 1915.
- [Ra81] Don P. Rawlings. — Generalized Worpitzky identities with applications to permutation enumeration, *Europ. J. Comb.*, vol. **2**, 1981, p. 67-78.
- [Re93a] V. Reiner. — Signed permutation statistics, *Europ. J. Combinatorics*, vol. **14**, 1993, p. 553–567.
- [Re93b] V. Reiner. — Signed permutation statistics and cycle type, *Europ. J. Combinatorics*, vol. **14**, 1993, p. 569–579.
- [Re93c] V. Reiner. — Upper binomial posets and signed permutation statistics, *Europ. J. Combinatorics*, vol. **14**, 1993, p. 581–588.
- [Re95a] V. Reiner. — Descents and one-dimensional characters for classical Weyl groups, *Discrete Math.*, vol. **140**, 1995, p. 129–140.
- [Re95b] V. Reiner. — The distribution of descents and length in a Coxeter group, *Electronic J. Combinatorics*, vol. **2**, 1995, # R25.
[<http://www.emis.de/journals/EJC/>].
- [Sc77] M.-P. Schützenberger. — La correspondance de Robinson, *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique*. [Actes Table Ronde Strasbourg. 1976], p. 59–113. Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Math.*, **579**).
- [Sk01] Mark Skandera. — An Eulerian partner for inversions, *Sém. Lothar. Combin.*, vol. **46**, B46d, 2001, 19 pages. [<http://www.mat.univie.ac.at/~slc>].
- [Sp56] Frank Spitzer. — A combinatorial lemma and its applications to Probability Theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **82**, 1956, p. 323–339.
- [St73] Richard P. Stanley. — Acyclic orientations of graphs, *Discrete Math.*, vol. **5**, 1973, p. 171–178.
- [St76] Richard P. Stanley. — Binomial posets, Möbius inversion, and permutation enumeration, *J. Combinatorial Theory Ser. A*, vol. **20**, 1976, p. 336–356.
- [St86] Richard P. Stanley. — *Enumerative Combinatorics*, vol. 1. — Wadsworth & Brooks, 1986.
- [StE94] Einar Steingrímsson. — Permutation Statistics of Indexed Permutations, *Europ. J. Combinatorics*, vol. **15**, 1994, p. 187–205.
- [StJ92] John Stembridge. — Eulerian numbers, tableaux, and the Betti numbers of a toric variety, *Discrete Math.*, vol. **99**, 1992, p. 307–320.
- [Ze90] D. Zeilberger. — A holonomic system approach to special functions identities, *J. Comput. and Appl. Math.*, vol. **32**, 1990, p. 321–368.

Dominique Foata
 Département de mathématique
 Université Louis Pasteur
 7, rue René-Descartes
 F-67084 Strasbourg, France
 foata@math.u-strasbg.fr

Guo-Niu Han
 I.R.M.A. UMR 7501
 Université Louis Pasteur et CNRS
 7, rue René-Descartes
 F-67084 Strasbourg, France
 guoniu@math.u-strasbg.fr