

le 5/2/2004

Note sur les permutations minimales

Guo-Niu HAN

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France
guoniu@math.u-strasbg.fr

RÉSUMÉ. — La correspondance de Robinson-Schensted envoie une permutation sur une paire de tableaux standard de Young de même forme. La forme de ces deux tableaux est aussi appelée *forme* de la permutation. Récemment, à l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig, Hohlweg a caractérisé les permutations ayant le nombre d'inversions minimal sur l'ensemble des permutations de forme fixée. Dans cette Note on montre, par un argument combinatoire, que cette caractérisation est une conséquence de l'algorithme géométrique que Viennot avait construit pour la correspondance de Robinson-Schensted.

Note on the minimal permutations

ABSTRACT. — The Robinson-Schensted correspondence maps a permutation onto a pair of standard Young tableaux of the same shape. The shape of the two tableaux is referred to as the *shape* of the permutation. By using the theory of Kazhdan-Lusztig, Hohlweg has recently characterized the permutations with a fixed shape and a minimal inversion number. The present Note provides a combinatorial proof of this result by using Viennot's geometric algorithm of the Robinson-Schensted correspondence.

1. Introduction

La correspondance de Robinson-Schensted entre permutations et paires de tableaux standard de Young de même forme, se réalise par une suite d'insertions. On trouve des descriptions détaillées de cet algorithme dans de nombreux manuels classiques (voir, par exemple, [Kn, p.48-52], [Sa, p.97-100], [St, p.316-319]). Une des plus importantes propriétés de cette correspondance est la propriété de symétrie : Si la permutation σ correspond à la paire de tableaux (P, Q) , alors la permutation inverse σ^{-1} correspond à la paire de tableaux (Q, P) . Pour lever cette propriété mystérieuse, Viennot a imaginé une version "géométrique" de la correspondance de Robinson-Schensted [Vi], et c'est justement cette approche géométrique de Viennot qui fournit l'outil combinatoire utilisé dans cette Note.

On appelle *forme* d'une permutation la forme des tableaux associés par la correspondance de Robinson-Schensted. Les permutations ayant le nombre d'inversions minimal sur l'ensemble des permutations de même forme sont dites *minimales*. Le but de cette Note est de caractériser les permutations minimales. Comme il est de coutume, on appelle *composition*

de l'entier n toute suite $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ d'entiers strictement positifs de somme n . Lorsque la suite est décroissante $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k$, on parle plus volontiers de *partition* de n . En particulier, la forme d'un tableau standard, qu'on représente par un diagramme de Ferrer, peut être identifiée à une partition, donc à une composition particulière.

A toute composition $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ de n , on associe une permutation $\sigma_c = \sigma_c(1)\sigma_c(2) \dots \sigma_c(n)$, de longueur n , définie comme le produit de juxtaposition $\sigma_c = w_1 w_2 \dots w_k$ avec

$$w_j = u_j(u_j - 1) \dots (u_{j-1} + 2)(u_{j-1} + 1) \text{ où } u_j = c_1 + c_2 + \dots + c_j.$$

Par exemple, on a $\sigma_{(3,2,2)} = 321 \cdot 54 \cdot 76 = 3215476$. On vérifie bien que σ_c , vue comme l'application $i \mapsto \sigma_c(i)$ ($1 \leq i \leq n$), est une involution.

THÉORÈME 1. — *Soient λ une partition et $\lambda^t = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k)$ sa transposition. Alors l'ensemble des permutations minimales de forme λ est l'ensemble de toutes les involutions σ_c , où c est un réarrangement de $\lambda^t = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k)$.*

Par exemple, pour $\lambda = 331$, on a $\lambda^t = 322$. Les trois réarrangements de λ^t sont $322, 232, 223$. L'ensemble des permutations minimales de forme 331 est donc $\{3215476, 2154376, 2143765\}$. Le théorème 1 est dû à Hohlweg [Ho], qui l'a démontré en utilisant la théorie de Kazhdan-Lusztig [KL, Lu]. La démonstration combinatoire de ce résultat donnée ci-après s'inspire directement de l'algorithme géométrique de Viennot de la correspondance de Robinson-Schensted. On sait qu'il est facile de lire, à partir des tableaux associés, l'indice majeur de la permutation [FS]; cependant il est difficile de reconnaître le nombre d'inversions de cette manière. Néanmoins, l'algorithme de Viennot permet d'établir une relation d'*inégalité* entre le nombre d'inversions et la forme d'une permutation, ce qui permet de résoudre le problème facilement.

2. Démonstration du Théorème 1

Pour simplifier la présentation, on ne reproduit pas la description complète de l'algorithme de Viennot [Vi]. On utilise, cependant, les mêmes notations que lui, y compris son propre exemple illustratif. Pour la permutation $\sigma = 3641725$ (voir [Vi, Exemple 3.2]), les squelettes successifs de σ apparaissent dans la figure 1.

Les nombres de points dans chaque ligne forment un mot de Yamanouchi $\alpha(\sigma) = (1, 1, 2, 2, 1, 3, 2)$. Celui-ci correspond au tableau stan-

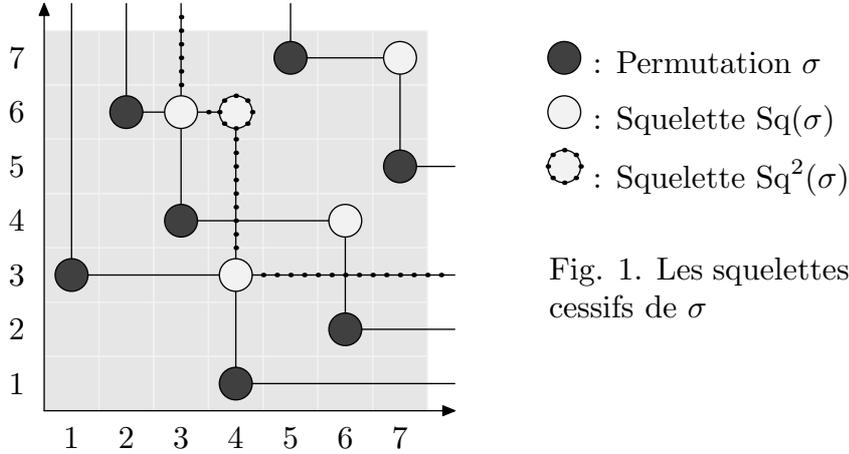


Fig. 1. Les squelettes successifs de σ

dard de Young P de façon classique [St, p.312-313] :

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Naturellement, la multiplicité du mot $\alpha(\sigma)$ est égale à la forme de la permutation σ . Dans cet exemple, $\alpha(\sigma)$ contient 3 fois la lettre 1, 3 fois la lettre 2 et une fois la lettre 3, sa multiplicité est alors la partition 331. Rappelons que la fonction $n(\lambda)$ est définie pour toute partition λ par (voir par exemple [Ma, p.3])

$$n(\lambda) = \sum \binom{\lambda'_i}{2} \quad \text{où } (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots) = \lambda^t \text{ est la transposée de } \lambda.$$

Notons $SB(\sigma)$ l'ensemble des points blancs dans la figure 1, c'est-à-dire l'union de tous les squelettes $Sq^k(\sigma)$ ($k = 1, 2, \dots$). Le résultat suivant est alors évident.

LEMME 2. — Soit λ la forme de la permutation σ . Alors $n(\lambda)$ est égal au cardinal de $SB(\sigma)$.

Dans la figure 2 suivante, notons $Rot(\sigma)$ l'ensemble des points blancs. Ce sont les points (x, y) tels qu'il existe deux autres points (x', y) et (x, y') de la permutation σ avec les conditions $x' < x$ et $y > y'$. La figure 2 est appelée diagramme de Rothe (voir [Vi]). Une propriété tout à fait élémentaire du diagramme de Rothe est que le nombre d'inversions de la permutation est égal au cardinal de $Rot(\sigma)$.

Il est clair que $SB(\sigma)$ est un sous-ensemble de $Rot(\sigma)$ comme on peut le voir en comparant les figures 1 et 2; on en déduit le lemme suivant.

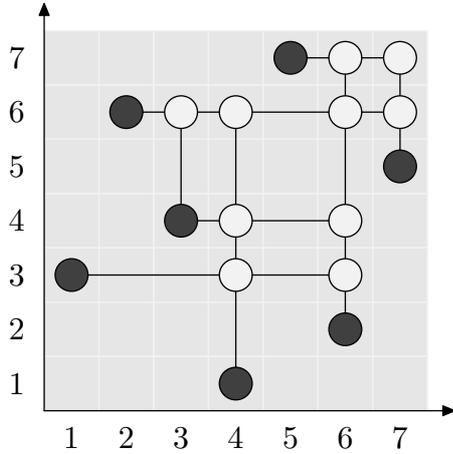


Fig. 2. Le diagramme de Rothe d'une permutation et le nombre d'inversions

LEMME 3. — Soit λ la forme de la permutation σ . Alors on a

$$\text{inv}(\sigma) \geq n(\lambda).$$

Pour tout réarrangement c de λ^t , on vérifie que σ_c est de forme λ et que $\text{inv}(\sigma_c) = n(\lambda)$. D'après le Lemme 3, σ_c est une permutation minimale de forme λ . Montrons que toutes les permutations minimales sont de ce type. Un point (x, y) de la permutation σ est dit *saillant* s'il n'y a pas de point (i, j) de la permutation tel que $i < x$ et $j < y$. Deux points saillants (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dits *consécutifs* s'il n'y a pas de point saillant (i, j) de la permutation tel que i est compris entre x_1 et x_2 .

LEMME 4. — Soit σ une permutation telle que $\text{inv}(\sigma) = n(\lambda)$. Si $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$ sont deux points saillants consécutifs de σ tels que $x_b < x_a$, alors $x_b = x_a - 1$ et $y_b = y_a + 1$.

Démonstration. — Si la conclusion du lemme est fautive, il existe un point de la permutation $c = (x_c, y_c)$ tel que $x_b < x_c < x_a$. Prenons pour y_c la plus petite valeur satisfaisant $y_c > y_b$, comme illustré dans la figure 3. On constate que le point $d = (x_a, y_c)$ appartient à $\text{Rot}(\sigma)$ mais pas à $\text{SB}(\sigma)$, i.e., on aurait $\text{inv}(\sigma) > n(\lambda)$. \square

Soit σ une permutation telle que $\text{inv}(\sigma) = n(\lambda)$. D'après le Lemme 4, on sait que l'ensemble des points saillants de la permutation σ est formé comme dans la figure 4. On vérifie que les régions b ne contiennent pas de point de la permutation, car σ est une permutation; la région c non plus, car sinon la région a ne pourrait pas contenir les points saillants; il en est de même pour les régions d , car autrement il y aurait d'autres points saillants dans ces régions. Autrement dit, tous les points non-saillants de la permutation sont dans la région e . En itérant ce raisonnement aux points

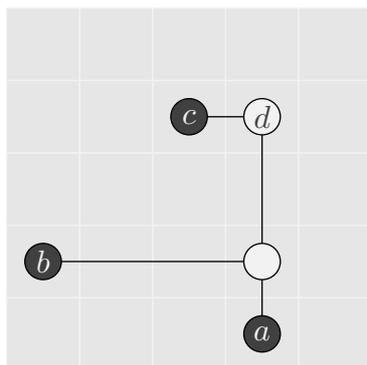


Fig. 3. Comparaison entre $SB(\sigma)$ et $Rot(\sigma)$

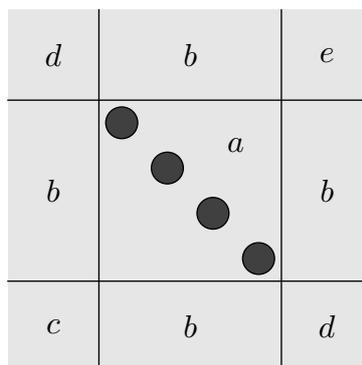


Fig. 4. Analyse des points non-saillants

de la région e , on démontre le Théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [FS] D. FOATA, M.P. SCHÜTZENBERGER. — Major Index and Inversion Number of Permutations, *Math. Nachr.*, **83** (1978), pp. 143–159.
- [Ho] CH. HOHLWEG. — Minimal and maximal elements in two-sided cells of S_n and Robinson-Schensted correspondence, preprint, 2003.
- [Kn] D.E. KNUTH. — *The Art of Computer Programming*, vol. 3, *Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, 1973.
- [KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG. — Representation of Coxeter groups and Hecke Algebras, *Inventiones math.*, **53** (1979), pp. 165-184.
- [Lu] G. LUSZTIG. — Cells in affine Weyl groups, II, *Journal of Algebra*, **109** (1987), pp. 536-548.
- [Ma] I.G. MACDONALD. — *Symmetric functions and Hall polynomials*, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [Sa] B.E. SAGAN. — *The Symmetric Group*, Brooks/Cole Publishing Company, 1991.
- [St] R.P. STANLEY. — *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge university press, 1999.
- [Vi] G. VIENNOT. — Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted, dans “Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique”, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, vol. **579**, 1976, p. 29–58.