Dominique FOATA et Guo-Niu HAN

PRINCIPES DE COMBINATOIRE CLASSIQUE

Cours et exercices corrigés

Université Louis Pasteur, Strasbourg
Département de mathématique
2008

AVANT-PROPOS

Ces Notes de Cours ont été rédigées à la fin des années 1990, lorsque les deux auteurs assuraient le cours d'algèbre et combinatoire, qui faisait partie à l'époque du cursus de la maîtrise de mathématiques discrètes. Le mot “Principes” aurait pu être remplacé par “Éléments,” suivant l'exemple d'une collection célèbre, pour mieux indiquer que ces Notes recouvrent une très faible partie de ce que l'on pourrait enseigner au niveau de la maîtrise dans le domaine des mathématiques tournées vers les problèmes de nature combinatoire. On ne trouvera donc que quatre chapitres, de longueur très inégale, de choix très arbitraire, dont la liste apparaît ci-dessous. Les exercices proposés dans les trois premiers chapitres sont presque tous donnés avec solutions. Pas de solutions, en revanche, pour les exercices du chapitre 4. On espère cependant que les indications données sont suffisantes.

Les auteurs ont par ailleurs rédigé une première version du mémoire “The q-series in Combinatorics ; Permutation Statistics”, qui utilise les éléments des présentes Notes et pensent que la version finale dûment actualisée sera prochainement disponible.

D. Foata et G.-N Han — Strasbourg, 8 octobre 2008

CHAPITRE PREMIER

SÉRIES GÉNÉRATRICES ORDINAIRES ET EXPONENTIELLES

Sommaire

Avant de manipuler les séries génératrices, il importe de maîtriser l'algèbre des séries formelles. Le but de ce chapitre est de décrire cette algèbre (on se limite aux séries d'une variable), qu'on enrichit par l'étude des opérations complémentaires que sont la substitution, le calcul de la dérivée ou de l'intégrale, la réversion.

`foata@math.u-strasbg.fr` ou `guoniu@math.u-strasbg.fr`.

Muni de ce bagage, on peut alors entrer dans l'étude des fonctions hypergéométriques. On se limite ici à une brève introduction en s'efforçant de démontrer certaines identités fondamentales comme celles de Chu-Vandermonde et de Pfaff-Saalschütz, par des arguments de nature purement combinatoire.

On trouve également un aperçu sur l'algèbre des matrices de Seidel, un outil commode pour la manipulation de plusieurs suites classiques de nombres, puis un traitement du composé partitionnel qui fournit un cadre global pour l'étude de nombreuses identités combinatoires faisant intervenir la fonction exponentielle. On explique également pourquoi les composés partitionnels des permutations et des endofonctions rendent compte de la structure de plusieurs polynômes orthogonaux classiques.

On trouve enfin une étude sommaire sur les partitions et une ouverture vers le triple produit de Jacobi, après avoir donné auparavant le matériel nécessaire sur les familles multipliables, en vue d'un traitement rigoureux de l'algèbre des produits infinis dans le cadre formel.

1. L'algèbre des séries formelles

On peut définir l'algèbre des séries formelles en un ensemble quelconque de variables, fini ou infini et le passage d'un ensemble fini à un ensemble infini se fait sans difficulté. Cependant, beaucoup de questions abordées dans cet ouvrage pouvant être traitées à l'aide de l'algèbre des séries formelles à *une seule* variable, il a paru intéressant de commencer l'étude de ces seules séries, quitte à donner plus tard des indications dans le cas où l'ensemble des variables n'est plus un singleton. Toutefois, les coefficients des séries à une variable que nous considérons peuvent être pris dans n'importe quel anneau, par exemple, un anneau de polynômes à une *infinité de variables.*

Soit Ω un anneau commutatif, ayant un élément unité. On appelle *série formelle*, à coefficients dans Ω et en une indéterminée (ou variable) u, toute suite $a = (a(n))$ $(n \ge 0)$ d'éléments de Ω. La variable u ne joue aucun rôle dans cette définition, mais pour des exigences qui apparaîtront naturelles dans la suite, on adopte la notation :

$$a = \sum_{n\ge 0} a(n)\, u^n \quad \text{ou bien} \quad a = \sum_{n\ge 0} u^n\, a(n),$$

ou même encore

$$a = a(0) + a(1)u + a(2)u^2 + \cdots$$

On dit que $a(n)$ est le *coefficient* de u^n dans a $(n \ge 0)$. Le coefficient $a(0)$ est dit *terme constant* de la série formelle a. Si $a(0) = 0$, on dit aussi que a

est *sans terme constant* et l'on écrit a sous la forme :

$$a = \sum_{n\ge 1} a(n)\, u^n.$$

Plus généralement, soit M un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{N}$; si tous les coefficients $a(n)$ sont nuls, lorsque n n'est pas dans M, on adopte la notation :

$$a = \sum_{n\in M} a(n)\, u^n.$$

Si $M = \{n\}$, on écrit simplement : $a = a(n)\, u^n$, en faisant disparaître le signe sigma.

Remarque. — Lorsque les coefficients $a(n)$ ont une forme explicite, comme par exemple $1/n!$ $(n = 0, 1, \dots)$, il est commode et souvent utile de faire apparaître la variable u dans la notation de la série formelle. On pose ainsi

$$\exp(u) := \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n!}\, u^n; \tag{1.1}$$

$${}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}; u\Bigr) := 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}\, u^n, \tag{1.2}$$

où α appartient à Ω. De plus, dans ces deux définitions, on suppose que l'anneau Ω contient le corps des rationnels. Dans la formule (1.2) on reconnaît la notation de la fonction hypergéométrique, qui sera explicitée dans le paragraphe 8.

L'*addition* et la *multiplication* de deux séries formelles a, b sont définies de la même façon que pour les polynômes. On pose :

$$a + b = \sum_{n\ge 0} a(n)\, u^n + \sum_{n\ge 0} b(n)\, u^n := \sum_{n\ge 0} c(n)\, u^n = c, \tag{1.3}$$

où pour tout $n \ge 0$ le coefficient $c(n)$ est défini par : $c(n) := a(n) + b(n)$. De même, le produit $d = a\cdot b$ des deux séries a, b est défini par

$$a\cdot b = \Bigl(\sum_{n\ge 0} a(n)\, u^n\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{n\ge 0} b(n)\, u^n\Bigr) := \sum_{n\ge 0} d(n)\, u^n = d, \tag{1.4}$$

où, pour tout $n \ge 0$, on pose :

$$d(n) := a(0)b(n) + a(1)b(n-1) + \dots + a(n)b(0). \tag{1.5}$$

En règle générale, le produit de deux séries sera matérialisé par un point et le produit dans l'anneau Ω par une simple juxtaposition. On s'affranchira, à plusieurs occasions, de cette règle lorsqu'il n'y a aucune ambiguité sur le type de produit. On écrira, par exemple, a^n pour a à la puissance n. Enfin, la *multiplication par un scalaire* est définie par

$$\omega \sum_{n\ge 0} a(n)\, u^n := \sum_{n\ge 0} \bigl(\omega a(n)\bigr)\, u^n.$$

L'ensemble de toutes les séries formelles à coefficients dans Ω et en une variable u est noté $\Omega[[u]]$. On vérifie, sans aucune difficulté, que $\Omega[[u]]$ muni de l'addition et de la multiplication est un anneau commutatif admettant un élément unité. Ce dernier est la série formelle

$$1 = \sum_{n\ge 0} a(n)\, u^n, \quad \text{où } a(n) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0\,; \\ 0, & \text{si } n \ge 1. \end{cases}$$

Le zéro de $\Omega[[u]]$ est la série formelle qui a tous ses coefficients nuls. Lorsqu'on munit aussi $\Omega[[u]]$ de l'opération de la précédente multiplication par un scalaire, on obtient une *algèbre commutative*, en ce sens que les identités suivantes sont satisfaites pour tout ω, $\omega' \in \Omega$ et a, $b \in \Omega[[u]]$:

$$\begin{gathered} \omega(a\cdot b) = (\omega\, a)\cdot b; \\ \omega(a+b) = \omega\, a + \omega\, b; \\ (\omega+\omega')a = \omega\, a + \omega'\, a; \\ (\omega\,\omega')a = \omega(\omega'\, a); \\ 1\, a = a; \end{gathered}$$

l'unité dans la dernière relation étant l'élément unité de Ω.

L'algèbre des polynômes à coefficients dans Ω et à une variable u est le sous-ensemble $\Omega[u]$ formé de toutes les séries formelles $a = \sum_{n\ge 0} a(n)\, u^n$, où tous les $a(n)$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. L'ensemble $\Omega[u]$ est une *sous-algèbre* de $\Omega[[u]]$.

Revenons à la définition du produit de deux séries formelles introduit en (1.4) et (1.5). La série-produit $a^2 = a\cdot a$ est donnée par

$$a^2 = \sum_{n\ge 0} a^2(n)\, u^n, \quad \text{avec} \quad a^2(n) = \sum_{\substack{0\le i,\, 0\le j \\ i+j=n}} a(i)a(j).$$

De même, pour tout entier $m \ge 2$, le coefficient de u^n dans la série-puissance a^m est égal à

$$a^m(n) = \sum_{\substack{0\le i_1,\ldots,0\le i_m \\ i_1+\cdots+i_m=n}} a(i_1)\cdots a(i_m). \tag{1.6}$$

La lecture du matériel sous le signe sigma devient difficile ! On voit qu'il est utile d'introduire de nouvelles notations. Considérons l'ensemble $\mathbb{N}^m$ de toutes les suites de m entiers $s = (i_1, \ldots, i_m)$. A chaque $s \in \mathbb{N}^m$ on associe son *poids* $\|s\| := i_1 + \cdots + i_m \in \mathbb{N}$ et son **a**-*poids* $\mathbf{a}(s) := a(i_1) \cdots a(i_m)$. Au lieu d'écrire

$$a^m = \sum_{n \geq 0} u^n \sum_{\|s\|=n} \mathbf{a}(s), \tag{1.7}$$

on veut pouvoir écrire :

$$a^m = \sum_{s \in \mathbb{N}^m} u^{\|s\|}\, \mathbf{a}(s). \tag{1.8}$$

On dit que a^m est la *fonction génératrice des suites finies d'entiers de longueur m par le* **a**-*poids*. Ce langage sera de plus en plus présent dans les paragraphes ultérieurs (*cf.* Exemple 1 dans le prochain paragraphe).

2. Familles de séries formelles

Nous introduisons la topologie des séries formelles à l'aide de la notion de *famille sommable*. Rappelons qu'étant donné un ensemble S quelconque (fini ou infini), on appelle *famille* de séries formelles une application $s \mapsto a_s$ de S dans $\Omega[[u]]$. On a coutume de la noter (a_s) $(s \in S)$. Étant donnée une telle famille, on se propose de donner un sens à la somme

$$\sum_{s \in S} a_s,$$

c'est-à-dire d'imposer des conditions pour que cette expression soit effectivement une série formelle.

Définition. — Une famille (a_s) $(s \in S)$ de séries formelles est dite *sommable*, si pour tout $n \geq 0$, on a $a_s(n) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de s dans S.

Si (a_s) $(s \in S)$ est une famille sommable, on pose, pour tout $n \geq 0$,

$$a(n) := \sum_{s \in S} a_s(n),$$

où la sommation est faite dans Ω et ne fait intervenir qu'un ensemble fini d'éléments. La série formelle $\sum_{n \geq 0} a(n)\, u^n$ est donc bien définie. On l'appelle *somme de la famille* (a_s) $(s \in S)$ et on la note :

$$a = \sum_{s \in S} a_s.$$

Remarque. — Soit $\sum_{n\ge 0} a(n)\,u^n$ une série formelle. Pour tout $n \ge 0$, on pose $b_n = a(n)\,u^n$; en d'autres termes, b_n est la série formelle

$$b_n = \sum_{m\ge 0} b_n(m)\,u^m,$$

où

$$b_n(m) = \begin{cases} a(n), & \text{si } m = n\,; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Pour tout $m \ge 0$ il n'y a qu'un nombre fini de séries formelles b_n (au plus une !) telles que $b_n(m) \ne 0$. La famille (b_n) $(n \ge 0)$ est donc sommable, de somme :

$$a = \sum_{n\ge 0} b_n = \sum_{n\ge 0} a(n)\,u^n.$$

Toute série formelle a est donc la somme de la famille constituée par ses différents termes $a(n)\,u^n$.

Les deux prochaines propriétés sont données sans démonstrations (il est aisé de les reconstruire). On démontre, en fait, que les propriétés d'associativité et de commutativité de la somme sont préservées pour des sommes infinies. Par *partition* $\{S_t : t \in T\}$ d'un ensemble S, on entend une famille de sous-ensembles S_t de S, *disjoints deux à deux*, de réunion S. Les sous-ensembles S_t, tout comme l'ensemble T des indices, peuvent être finis ou infinis.

Proposition 2.1. (Associativité ou sommation par paquets). — *Soit $\{S_t : t \in T\}$ une partition de l'ensemble S. On suppose que la famille (a_s) $(s \in S)$ est sommable. Alors toute sous-famille (a_s) $(s \in S_t)$ est sommable et si, pour tout t dans T, on pose $b_t = \sum_{s\in S_t} a_s$, la famille (b_t) $(t \in T)$ est également sommable et l'on a :*

$$\sum_{t\in T} b_t = \sum_{s\in S} a_s.$$

Proposition 2.2. (Distributivité). — *Soient (a_s) $(s \in S)$ et (b_t) $(t \in T)$ deux familles sommables. Alors la famille $(a_s \cdot b_t)$ $((s,t) \in S \times T)$ est sommable et l'on a :*

$$\sum_{(s,t)\in S\times T} a_s \cdot b_t = \Bigl(\sum_{s\in S} a_s\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{t\in T} b_t\Bigr).$$

Comme cas particulier de la dernière proposition, on a la propriété de *distributivité généralisée*

$$a \cdot \sum_{t\in T} b_t = \sum_{t\in T} a \cdot b_t,$$

lorsque la famille (b_t) $(t \in T)$ est sommable.

Exemple 1. — Considérons la famille $(\mathbf{a}(s)\, u^{\|s\|})$ $(s \in \mathbb{N}^m)$, de séries réduites à un seul terme, introduite en (1.7) et (1.8). Pour tout entier $n \geq 0$ il n'y a qu'un nombre fini de $s \in \mathbb{N}^m$ tels que $\|s\| = n$, donc de séries $\mathbf{a}(s)\, u^{\|s\|}$ ayant un coefficient de u^n non nul. La famille $(\mathbf{a}(s)\, u^{\|s\|})$ $(s \in \mathbb{N}^m)$ est donc sommable. Considérons la partition $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}^m$ définie pour chaque entier $n \geq 0$ par $T_n := \{s \in \mathbb{N}^m : \|s\| = n\}$. D'après la Proposition 2.1 on peut écrire :

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{\|s\|=n} \mathbf{a}(s)\, u^{\|s\|} = \sum_{s\in\mathbb{N}^m} \mathbf{a}(s)\, u^{\|s\|}.$$

Par conséquent

$$a^m = \sum_{n\geq 0} u^n \sum_{\|s\|=n} \mathbf{a}(s) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\|s\|=n} \mathbf{a}(s)\, u^{\|s\|} = \sum_{s\in\mathbb{N}^m} \mathbf{a}(s)\, u^{\|s\|}.$$

L'écriture de (1.8) est donc bien justifiée.

Définition. — L'*ordre* d'une série formelle a non nulle est le plus petit entier $n \geq 0$ pour lequel $a(n) \neq 0$. On note $o(a)$ l'ordre de a. Par convention, l'ordre de la série formelle nulle est supposé égal à $+\infty$.

Proposition 2.3. — *Soient a et b deux séries formelles. Alors*

$$o(a \cdot b) \geq o(a) + o(b). \tag{2.1}$$

Si Ω est intègre (i.e., ne contient pas de diviseurs de zéro), alors

$$o(a \cdot b) = o(a) + o(b). \tag{2.2}$$

De plus, $\Omega[[u]]$ est intègre.

Démonstration. — Les deux relations (2.1) et (2.2) sont triviales lorsque l'une au moins des deux séries est nulle. Supposons $o(a) = p$ et $o(b) = q$, avec p, q finis. Posons, d'autre part, $c = a \cdot b$. Tous les produits $a(n)b(m)$ sont nuls si $n \leq p - 1$ ou $m \leq q - 1$. Par conséquent, $c(p + q) = a(p)\, b(q)$ et $c(n) = 0$ pour $n \leq p + q - 1$. L'inégalité (2.1) est donc vérifiée.

Si Ω est intègre, $c(p + q)$ est non nul et par conséquent l'ordre de c est exactement égal à $(p+q)$. De là, l'hypothèse $a \neq 0$ et $b \neq 0$ entraîne $c \neq 0$, ce qui montre que $\Omega[[u]]$ est intègre. $\square$

Remarques.

(i) Toute famille (a_s) $(s \in S)$ de séries formelles, où S est *fini*, est évidemment sommable.

(ii) Lorsque $S = \mathbb{N}$ et que la famille (a_s) $(s \in S)$ est sommable, la somme $a = \sum_{s\in S} a_s$ peut être écrite $a = \sum_{n\geq 0} a_n$. On dit aussi que la série $\sum a_n$ de séries formelles *converge vers* a.

(iii) Lorsque $S = \mathbb{N}$, la propriété de sommabilité de la famille (a_s) $(s \in S)$ peut être visualisée comme suit. On écrit dans un tableau (infini !) le coefficient $a_s(n)$ de u^n dans la série a_s, dans la $s^{\text{ième}}$ ligne et la $n^{\text{ième}}$ colonne, si $a_s(n) \neq 0$. Si $a_s(n) = 0$, on n'écrit rien dans cet emplacement.

Dire que la famille (a_s) $(s \in S)$ est sommable revient à dire que lorsqu'on fait l'addition des termes de la $n^{\text{ième}}$ colonne, on ne trouve qu'un nombre *fini* de termes pour tout $n \geq 0$. La somme de ces termes non nuls est alors le coefficient $a(n)$.

Proposition 2.4. — *Soit (a_s) une famille de séries formelles telle que $S = \mathbb{N}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la famille (a_s) $(s \in S)$ est sommable ;*

(2) *l'ordre $o(a_s)$ de a_s tend vers l'infini lorsque s tend vers l'infini.*

Soit a la somme de la famille. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $t(n)$ tel que pour tout $t \geq t(n)$, on a : $a_0(n) + a_1(n) + \cdots + a_t(n) = a(n)$.

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $S(n)$ l'ensemble de tous les $s \in \mathbb{N}$ tels que $a_s(n) \neq 0$. Si la condition (1) est vérifiée, alors $S(n)$ est fini. On peut poser : $t(n) := \max S(n)$ et $T(n) := \max S(0) \cup S(1) \cup \cdots \cup S(n)$. Pour tout $t \geq 1 + T(n)$, on a $a_t(0) = a_t(1) = \cdots = a_t(n) = 0$ et donc $o(a_t) \geq n + 1$. Par conséquent, (2) est vérifiée.

Réciproquement, si la condition (2) est satisfaite, pour tout entier n, il n'y a qu'un nombre *fini* d'entiers s tels que $o(a_s) < n$, donc un ensemble fini d'entiers s tels que $a_s(n) \neq 0$ et la condition (1) est vérifiée.

Le coefficient $a(n)$ étant défini comme la somme de tous les coefficients $a_s(n)$ tels que $s \in S(n)$, on a $a_t(n) = 0$ pour tout $t \geq t(n) + 1$ et ainsi $a_0(n) + a_1(n) + \cdots + a_t(n) = a(n)$ pour tout $t \geq t(n)$. $\square$

Remarque. — Dans la topologie des séries *numériques*, le fait que a_n tende vers 0 est une condition *nécessaire* pour que la série numérique de terme général a_n soit convergente. Pour la topologie des séries formelles, la propriété (1) de la proposition précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum a_n$ de séries formelles soit convergente.

3. Substitution dans les séries formelles

La relation (2.1) entraîne que, pour tout entier $m \geq 0$, on a :

$$o(b^m) \geq m\, o(b). \tag{3.1}$$

Par conséquent, lorsque b est *sans terme constant*, (i.e., $o(b) \geq 1$), la famille $(a(m)b^m)$ $(m \geq 0)$ est sommable pour toute suite $(a(m))$ de scalaires. La série formelle

$$\sum_{m\geq 0} a(m)\, b^m,$$

qui est la somme de la famille $(a(m)b^m)$ $(m \geq 0)$, est dite *être obtenue par substitution de b dans la série $a = \sum_{m\geq 0} a(m)\, u^m$*. On pose :

$$a \circ b := \sum_{m\geq 0} a(m) b^m. \tag{3.2}$$

Comme b est sans terme constant, le coefficient de u^n dans la série b^m est nul si $m \geq n+1$. Par conséquent, le coefficient de u^n dans $a \circ b$ est égal au coefficient de u^n dans la somme *finie* $a(0)b^0 + a(1)b^1 + \cdots + a(n)b^n$ $(n \geq 0)$. En d'autres termes, si $o(b) \geq 1$ et si on désigne par $b^m(n)$ le coefficient de u^n dans la série puissance b^m, on a :

$$(a \circ b)(n) = \sum_{0\leq m\leq n} a(m) b^m(n) \qquad (n \geq 0). \tag{3.3}$$

Remarque. — Il ne faut pas confondre le coefficient $b^m(n)$ de u^n dans la série puissance b^m avec la puissance $m^{\text{ième}}$ du *coefficient* $b(n)$, qu'on notera plus volontiers $(b(n))^m$ pour qu'il n'y ait aucune confusion.

Proposition 3.1. — *Soit b une série sans terme constant. L'application $a \mapsto a \circ b$ est un homomorphisme de $\Omega[[u]]$ dans lui-même. En d'autres termes, on a :*

$$(a_1 + a_2) \circ b = a_1 \circ b + a_2 \circ b\,; \tag{3.4}$$

$$(a_1 \cdot a_2) \circ b = (a_1 \circ b) \cdot (a_2 \circ b); \tag{3.5}$$

et donc

$$a^n \circ b = (a \circ b)^n \quad (n \geq 1).$$

De plus,

$$1 \circ b = 1. \tag{3.6}$$

Démonstration. — Les relations (3.4) et (3.6) sont immédiates. Pour (3.5), on peut écrire :

$$(a_1 \circ b) \cdot (a_2 \circ b) = \Bigl(\sum_{n\geq 0} a_1(n) b^n\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{m\geq 0} a_2(m) b^m\Bigr),$$

soit, d'après la Proposition 2.2,

$$(a_1 \circ b) \cdot (a_2 \circ b) = \sum_{n,m\geq 0} a_1(n) a_2(m) b^{n+m}.$$

Comme on peut sommer par paquets, on obtient :

$$(a_1 \circ b) \cdot (a_2 \circ b) = \sum_{n \geq 0} b^n \sum_{0 \leq j \leq n} a_1(j) a_2(n-j) = (a_1 \cdot a_2) \circ b. \quad \square$$

En fait, la substitution $a \mapsto a \circ b$ est un homomorphisme *continu*, dans le sens donné dans la proposition ci-après.

PROPOSITION 3.2. — *Pour toute famille sommable* (a_s) $(s \in S)$ *et toute série* b *sans terme constant, la famille* $(a_s \circ b)$ $(s \in S)$ *est sommable. On a, de plus,*

$$\Big(\sum_{s \in S} a_s\Big) \circ b = \sum_{s \in S} (a_s \circ b). \tag{3.7}$$

Démonstration. — Considérons la famille $(u^n (a_s \circ b)(n))$ $((s,n) \in S \times \mathbb{N})$ et pour m fixé, notons $S(m)$ l'ensemble fini des s dans S tels que $a_s(m) \neq 0$. Si s n'appartient pas à l'ensemble $T(n) = \bigcup_{0 \leq m \leq n} S(m)$, les quantités $b^m(n) a_s(m)$ $(0 \leq m \leq n)$ sont nulles. D'après (3.3), on obtient donc $(a_s \circ b)(n) = 0$. Par conséquent, si (s, m) n'appartient pas à l'ensemble *fini* $T(n) \times \{ n \}$, la valeur de $u^n (a_s \circ b)(n)$ en (s, m) est nulle. La famille $(u^n (a_s \circ b)(n))$ $((s,n) \in S \times \mathbb{N})$ est donc sommable. D'après la Proposition 2.1, la famille

$$\Big(\sum_{n \geq 0} u^n (a_s \circ b)(n)\Big) \ (s \in S),$$

c'est-à-dire $(a_s \circ b)$ $(s \in S)$ est sommable. Il en est de même de la famille

$$\Big(\sum_{s \in S} u^n (a_s \circ b)(n)\Big) \ (n \geq 0).$$

On en déduit :

$$\sum_{s \in S} \sum_{n \geq 0} u^n (a_s \circ b)(n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{s \in S} u^n (a_s \circ b)(n).$$

Cette identité peut être récrite :

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in S} a_s \circ b = \sum_{n \geq 0} u^n \sum_{s \in S} (a_s \circ b)(n) &= \sum_{n \geq 0} u^n \sum_{s \in T(n)} (a_s \circ b)(n) \\
&= \sum_{n \geq 0} u^n \Big(\Big(\sum_{s \in T(n)} a_s\Big) \circ b\Big)(n) \qquad \text{[par (3.4)]} \\
&= \sum_{n \geq 0} u^n \Big(\Big(\sum_{s \in S} a_s\Big) \circ b\Big)(n) \qquad \text{[par définition de } T(n)\text{]} \\
&= \Big(\sum_{s \in S} a_s\Big) \circ b. \quad \square
\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.3. — *Si b et c sont deux séries formelles sans terme constant, on a :*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c). \tag{3.8}$$

Autrement dit, si l'on substitue b dans la série a, puis la série c dans la série obtenue, on obtient le même résultat en substituant d'abord c dans b, puis la série ainsi formée dans a.

Démonstration. — D'abord $o(b \circ c) \geq 1$. Les deux membres de (3.8) ont donc un sens. On peut donc écrire : $(a \circ b) \circ c = \big(\sum_{n \geq 0} b^n a(n)\big) \circ c$. Comme la famille $(b^n a(n))$ $(n \geq 0)$ est sommable et que c est sans terme constant, on a d'après (3.7) et (3.5) :

$$(a \circ b) \circ c = \sum_{n \geq 0} (b^n \circ c) a(n) = \sum_{n \geq 0} (b \circ c)^n a(n) = a \circ (b \circ c). \quad \square$$

Définition. — Une série a dans $\Omega[[u]]$ est dite *inversible* s'il existe une série b satisfaisant $a \cdot b = b \cdot a = 1$. On dit alors que b est l'*inverse* de a.

Terminons ce paragraphe par l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série formelle soit inversible dans $\Omega[[u]]$.

LEMME 3.4. — *La série $\sum\limits_{n \geq 0} u^n$ a un inverse dans $\Omega[[u]]$ donné par $(1 - u)$.*

Démonstration. — En effet, posons

$$1 - u = \sum_{n \geq 0} u^n a(n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \geq 0} u^n c(n) = (1 - u) \cdot \sum_{n \geq 0} u^n.$$

On a $c(0) = 1$ et pour tout $n \geq 1$ les relations : $c(n) = a(0) \cdot 1 + a(1) \cdot 1 = 1 - 1 = 0$. D'où $(1 - u) \cdot \sum\limits_{n \geq 0} u^n = 1$. $\square$

PROPOSITION 3.5. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la série a ait un inverse dans $\Omega[[u]]$ est que $a(0)$ soit inversible dans Ω.*

Démonstration. — Si l'on a $a \cdot b = 1$, nécessairement $a(0)b(0) = 1$. Le coefficient $a(0)$ est donc inversible dans Ω.

Réciproquement, supposons cette dernière condition vérifiée. Alors la série formelle $b = 1 - a(0)^{-1}a$ est sans terme constant. On peut donc substituer b dans l'identité

$$(1 - u) \cdot \sum_{n \geq 0} u^n = 1,$$

et l'on obtient :

$$(1 - b) \cdot \sum_{n \geq 0} b^n = 1 \circ b = 1.$$

Il en résulte que $1 - b = a(0)^{-1}a$ a un inverse et il en est de même de $a(0)a(0)^{-1}a = a$. $\square$

4. Dérivée et intégrale en 0 d'une série formelle

4.1. *La factorielle montante.* — Pour tout élément ω d'un anneau (commutatif ayant un élément unité) Ω et tout entier $n \geq 0$, on définit la *factorielle montante* $(\omega)_n$, comme étant l'expression :

$$(\omega)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0\,; \\ \omega(\omega+1)\dots(\omega+n-1), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Les propriétés de cette factorielle montante qui sont constamment utilisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (\omega)_{n+m} &= (\omega)_n\,(\omega+n)_m; \\ (\omega)_n &= (-1)^n(1-n-\omega)_n; \\ (1)_n &= n! \end{aligned}$$

On note encore la relation qui la lie au coefficient binomial $\binom{\omega}{n}$:

$$\binom{\omega}{n} = (-1)^n \frac{(-\omega)_n}{n!}.$$

4.2. *Dérivée.* — Par définition, la *dérivée* d'une série formelle

$$a = \sum_{n \geq 0} u^n a(n)$$

est donnée par :

$$a' := \sum_{n \geq 1} n u^{n-1} a(n) \ \Bigl(= \sum_{n \geq 0} (n+1)\, u^n a(n+1)\Bigr).$$

On utilise aussi la notation Da. On a immédiatement :

$$(a+b)' = a' + b'\,; \tag{4.1}$$

et pour tout scalaire ω

$$(\omega a)' = \omega a'. \tag{4.2}$$

L'application $a \mapsto a'$ est donc *linéaire.*

Par récurrence sur m, on obtient :

$$D^m a = \sum_{n \geq 0} (n+1)_m\, u^n\, a(n+m) \tag{4.3}$$

Soit (a_s) $(s \in S)$ une famille sommable de somme a. Alors

$$a' = \sum_{s \in S} a'_s. \tag{4.4}$$

Ceci provient du fait que la famille $(nu^{n-1}a_s(n))$ $((s,n) \in S \times \mathbb{N})$ est sommable et que l'on peut sommer par paquets (démonstration analogue à celle de la proposition 3.2). En particulier, dans une *série* de séries formelles, on peut *dériver terme à terme*.

On a encore la formule habituelle

$$(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b', \tag{4.5}$$

qui se vérifie comme suit :

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)' &= \sum_{n+m \geq 1} (n+m) u^{n+m-1} a(n) b(m) \\
&= \sum_{n \geq 1, m \geq 0} u^{n+m-1} n a(n) b(m) + \sum_{n \geq 0, m \geq 1} u^{n+m-1} a(n)\, m b(m) \\
&= a' \cdot b + a \cdot b'.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$(a^n)' = n\, a^{n-1} \cdot a'. \tag{4.6}$$

Enfin, supposons la série b sans terme constant. D'après (4.4), la dérivée de $a \circ b = \sum_{n \geq 0} b^n a(n)$ est égale à :

$$\begin{aligned}
(a \circ b)' &= \sum_{n \geq 0} (b^n)'\, a(n) \\
&= \sum_{n \geq 1} n\, b^{n-1} \cdot b' a(n) && \text{[d'après (4.6)]} \\
&= \Bigl(\sum_{n \geq 1} n b^{n-1} a(n) \Bigr) \cdot b',
\end{aligned}$$

soit

$$(a \circ b)' = (a' \circ b) \cdot b'. \tag{4.7}$$

Exemple. — Considérons de nouveau la série $\exp u$ définie en (1.1) :

$$\exp u = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}.$$

On a immédiatement $(\exp u)' = \exp u$. Si b est sans terme constant, on a, en faisant la substitution $u \leftarrow b$, la formule

$$(\exp b)' = \exp b \cdot b'. \tag{4.8}$$

4.3. *Le développement du binôme.* — Supposons que Ω soit un corps ou un anneau de polynômes à coefficients dans un corps. Pour tout $m \ge 0$, on note $(1-u)^{-m}$ la série formelle $((1-u)^{-1})^m$. Par dérivation de l'identité

$$(1-u)^m \cdot (1-u)^{-m} = 1,$$

on obtient :

$$m(1-u)^{m-1} \cdot (-1)(1-u)^{-m} + (1-u)^m \cdot D(1-u)^{-m} = 0.$$

D'où

$$D(1-u)^{-m} = m(1-u)^{-m-1},$$

soit en particulier

$$D(1-u)^{-1} = (1-u)^{-2}\,;$$

de même

$$D^2(1-u)^{-1} = D(1-u)^{-2} = 2(1-u)^{-3},$$

et par récurrence

$$D^{m-1}(1-u)^{-1} = (m-1)!\,(1-u)^{-m}. \tag{4.9}$$

On en tire, d'après le Lemme 3.4, l'identité valable dans $\mathbb{Q}[[u]]$:

$$(1-u)^{-m} = \frac{1}{(m-1)!}\, D^{m-1}\Bigl(\sum_{n\ge 0} u^n\Bigr).$$

Comme $n!\,(n+1)_{m-1} = (m-1)!\,(m)_n$, la formule (4.3) fournit alors l'identité :

$$(1-u)^{-m} = \sum_{n\ge 0} (m)_n \frac{u^n}{n!} \qquad (m \ge 0), \tag{4.10}$$

qui est la formule usuelle du binôme, lorsque m est un entier positif. Avec les notations de (1.2), on a donc

$$(1-u)^{-m} = {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix} m \\ - \end{matrix}; u\Bigr).$$

En revanche, lorsque α n'est pas entier, la formule

$$(1-u)^{-\alpha} := {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix} \alpha \\ - \end{matrix}; u\Bigr) \tag{4.11}$$

ne peut être qu'une *définition*. Le membre de gauche de (4.11) suggère la propriété

$${}_1F_0\Bigl(\begin{matrix} \alpha+\beta \\ - \end{matrix}; u\Bigr) = {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix} \alpha \\ - \end{matrix}; u\Bigr) \cdot {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix} \beta \\ - \end{matrix}; u\Bigr), \tag{4.12}$$

mais il faut la *démontrer*, par exemple à l'aide de l'identité de Chu-Vandermonde (voir § 8).

4.4. *L'intégrale en* 0. — Supposons que l'anneau de base Ω contient le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. On peut alors définir l'*intégrale en* 0 de la série formelle $a = \sum_{n\ge 0} u^n\, a(n)$ comme étant la série

$$\mathrm{Int}_0\, a := \sum_{n\ge 0} u^{n+1}\, \frac{a(n)}{n+1}. \tag{4.13}$$

Naturellement, si a est une série sans terme constant, on a :

$$\mathrm{Int}_0\ D\, a = D\ \mathrm{Int}_0\ a.$$

Exemple. — A l'aide de la formule (4.11) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et la substitution $u \leftarrow u^2$, on définit la série formelle

$$(1-u^2)^{-1/2} := {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}1/2\\ -\end{matrix}; u^2\Bigr) = \sum_{n\ge 0} u^{2n} \Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)_n \frac{1}{n!}.$$

On définit ensuite la série "Arcsinus" par

$$\mathrm{Arcsin}\, u := \mathrm{Int}_0 (1-u^2)^{-1/2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{Arcsin}\, u &:= \sum_{n\ge 0} u^{2n+1}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)_n \frac{1}{(2n+1)\, n!}\\ &= \sum_{n\ge 0} u^{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{n+1}\\ &= u + \sum_{n\ge 1} u^{2n+1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{1}{2n+1}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

On verra dans le paragraphe 8 une autre manière d'exprimer $\mathrm{Arcsin}(u)$ comme une série hypergéométrique à trois paramètres ${}_2F_1$.

Remarque 1. — On *définit* également les séries $\sin u$ et $\cos u$ par leurs développements habituels, ainsi que $\mathrm{tg}\, u := \sin u/\cos u$, $\sec u := 1/\cos u$ (voir chap. 3, § 13) et les séries hyperboliques $\mathrm{sh}\, u := -i\, \sin iu$, $\mathrm{ch}\, u := \cos iu$, $\mathrm{th}\, u := -i\ \mathrm{tg}\, iu$, $\mathrm{Argsh}\, u := -i\ \mathrm{Arcsin}\, iu$, $\mathrm{Argth}\, u := -i\ \mathrm{Arctg}\, iu$. Le nombre imaginaire i est ici une commodité d'écriture. Il disparaît lorsque les coefficients de la série sont effectivement écrits. Par exemple,

$$\begin{aligned}\mathrm{Argsh}\, u &= -i\ \mathrm{Arcsin}\, iu\\ &= -i\Bigl(iu + \sum_{n\ge 1} (iu)^{2n+1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{1}{2n+1}\Bigr)\\ &= u + \sum_{n\ge 1} (-1)^n u^{2n+1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{1}{2n+1}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Remarque 2. — Pour déterminer les coefficients d'une série formelle, on peut être amené à combiner les opérateurs D et Int_0. Par exemple, pour obtenir les coefficients $a(n)$ de la série $a = \sum_{n\geq 1} a(n)u^n :=$ $\operatorname{Arcsin} u \cdot (1-u^2)^{-1/2}$, on dérive cette équation pour obtenir : $a' = (1-u^2)^{-1} + \operatorname{Arcsin} u \cdot (1-u^2)^{-3/2}u$; d'où $1 = (1-u^2)\cdot a' - u\,a$.

On en tire : $1 = a(1) + 2a(2)u + \sum\limits_{n\geq 3}(na(n)-(n-1)a(n-2))u^{n-1}$. D'où $a(1)=1$ et pour $n\geq 1$, on a successivement $a(2n)=0$, $a(2n+1) = \dfrac{2n}{2n+1}a(2n-1) = \cdots = \dfrac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$ et ainsi :

$$\operatorname{Arcsin} u \cdot (1-u^2)^{-1/2} = u + \sum_{n\geq 1} u^{2n+1}\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}. \tag{4.16}$$

Comme $D\,(\operatorname{Arcsin} u)^2 = 2\,\operatorname{Arcsin} u\cdot(1-u^2)^{-1/2}$, on en déduit :

$$(\operatorname{Arcsin} u)^2 = u^2 + \sum_{n\geq 1} u^{2n+2}\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\frac{1}{n+1}, \tag{4.17}$$

qu'on écrit encore sous la forme :

$$(\operatorname{Arcsin} u)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\frac{(k!)^2}{(2k)!}(2u)^{2k}. \tag{4.18}$$

5. La réversion des séries

On a vu dans la Proposition 3.3 que l'opération "$\circ$" était une opération associative dans l'ensemble des séries formelles sans terme constant. D'autre part, si a est une telle série, on a

$$a\circ u = u\circ a = a. \tag{5.1}$$

Ainsi, la série u se comporte comme élément neutre par rapport à "$\circ$". Le problème naturel qu'on peut se poser est de savoir si toute série a sans terme constant admet un inverse pour cette opération et, si oui, comment on peut calculer ses coefficients. Pour éviter toute confusion, on parle de série "réverse."

Désignons par $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\Omega[[u]]$ formé des séries a sans terme constant mais telles que $a(1)\neq 0$ (ou encore des séries d'ordre égal à 1).

THÉORÈME 5.1. — *Si l'anneau de base Ω est un corps, l'ensemble $\mathcal{S}$ muni de l'opération "$\circ$" est un groupe.*

Démonstration. — Nous savons déjà que l'opération "$\circ$" est associative et que u est l'élément unité. Il s'agit donc de prouver que tout a dans $\mathcal{S}$

admet une série réverse b dans $\mathcal{S}$. D'après (3.3), en permutant les rôles de a et b, on a $b \circ a = u$ si et seulement si

$$(b \circ a)(n) = \sum_{0 \le m \le n} a^m(n)\, b(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1\,; \\ 0, & \text{si } n = 0, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

ou encore si et seulement si
(1) $a^0(0)b(0) = 0$;
(2) $a^0(1)b(0) + a^1(1)b(1) = 1$;
(3) $a^0(n)b(0) + a^1(n)b(1) \cdots + a^n(n)b(n) = 0$ pour $n = 2, 3, \ldots$
Le précédent système est encore équivalent à
(1′) $b(0) = 0$ [puisque $a^0(0) = 1$] ;
(2′) $a(1)b(1) = 1$ [en utilisant (1′) et $a^1(1) = a(1)$] ;
(3′) $a(n)b(1) + \cdots + a^n(n)b(n) = 0$ pour $n = 2, 3, \ldots$
Comme $a^n(n) = (a(1))^n \neq 0$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, la récurrence ci-dessus a une solution *unique* $(b(1), b(2), \ldots)$ telle que $b(1) \neq 0$, c'est-à-dire une série $b \in \mathcal{S}$.

Cette série b réverse de a étant définie, on peut trouver, de même, une série unique $c \in \mathcal{S}$ telle que $c \circ b = u$. De là, $c \circ b \circ a = (c \circ b) \circ a = u \circ a = a$, mais aussi $c \circ b \circ a = c \circ (b \circ a) = c \circ u = c$, d'où $c = a$. Ainsi, pour tout $a \in \mathcal{S}$ il existe une série $b \in \mathcal{S}$ unique telle que l'on ait $b \circ a = u$ et $a \circ b = u$. Tout élément $a \in \mathcal{S}$ a donc un élément réverse à gauche et à droite. □

Définition. — Soit a une série sans terme constant telle que $a(1) \neq 0$. On appelle série *réverse* de a l'unique série sans terme constant, notée $a^{[-1]}$ satisfaisant

$$a \circ a^{[-1]} = a^{[-1]} \circ a = u. \tag{5.2}$$

Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, on écrit aussi $a^{[n]} = a \circ a \circ \cdots \circ a$ (n fois).

Donnons encore un résultat reliant la dérivée, la réversion et l'inversion.

Théorème 5.2. — *Si $a \in \mathcal{S}$ et $b = a^{[-1]}$, alors*

$$b' = (a' \circ b)^{-1}.$$

Démonstration. — Par simple dérivation de l'identité $a \circ b = u$, on obtient $(a' \circ b) \cdot b' = 1$, d'où $\big(a' \circ b\big)^{-1} = b'$. □

Corollaire 5.3. — *On conserve les mêmes notations que dans le précédent théorème. Si de plus il existe une série formelle c telle que $a' = c \circ a$, alors $a^{[-1]} = \mathrm{Int}_0\, c^{-1}$.*

Démonstration. — En effet, $b' = (a' \circ b)^{-1} = (c \circ a \circ b)^{-1} = c^{-1}$ et donc $a^{[-1]} = \mathrm{Int}_0\, c^{-1}$. □

6. Séries de Laurent formelles

Pour déterminer la série réverse $a^{[-1]}$ d'une série a (sans terme constant et telle que $a(1) \neq 0$), nous recourons à une technique matricielle très commode, permettant de transférer le calcul des séries en un calcul de produit de matrices. Soit a une série sans terme constant. On lui associe la suite (a^k) $(k = 1, 2, \dots)$ de toutes les puissances de a, puis à l'aide des coefficients $a^k(n)$ de u^n dans les séries puissances

$$a^k = \sum_{n \geq k} u^n \, a^k(n),$$

on forme la matrice infinie triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a^1(1) & a^1(2) & a^1(3) & \dots \\ 0 & a^2(2) & a^2(3) & \dots \\ 0 & 0 & a^3(3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Naturellement, l'application $a \mapsto A$ est une *injection* de l'ensemble des séries formelles a sans terme constant et telles que $a(1) \neq 0$ dans l'ensemble des matrices infinies triangulaires supérieures à coefficients dans Ω, dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Si A est une telle matrice, elle admet un *inverse* A^{-1} dont les coefficients peuvent être calculés de proche en proche.

LEMME 6.1. — *Si $a \mapsto A$ et $b \mapsto B$ (pour l'injection précédente), alors*

$$a \circ b \mapsto A \cdot B.$$

Démonstration. — Lorsque $l \leq n$, le coefficient en (l, n) dans la matrice produit $A \cdot B$ (nécessairement triangulaire supérieure) est égal à

$$\begin{aligned}(A \cdot B)_{l,n} &= a^l(l) b^l(n) + a^l(l+1) b^{l+1}(n) + \cdots + a^l(n) b^n(n) \\ &= \sum_{l \leq m \leq n} a^l(m) \, b^m(n),\end{aligned}$$

qui est donc, d'après (3.3) le coefficient de u^n de la série $a^l \circ b$, donc de la série $(a \circ b)^l$, d'après (3.5). Enfin, le coefficient de u^n dans la série $(a \circ b)^l$ est précisément le coefficient en (l, n) de la matrice C telle que $a \circ b \mapsto C$ dans l'injection précédente. $\square$

Puisque $u \mapsto I$ (matrice identité) pour l'injection précédente, le Lemme 6.1 entraîne que si $a \mapsto A$ et $a^{[-1]} \mapsto B$, la relation $a \circ a^{[-1]} = u$ entraîne $A \cdot B = I$. Donc

$$a \mapsto A \Longleftrightarrow a^{[-1]} \mapsto A^{-1}.$$

Définition. — Une *série de Laurent formelle* est une série formelle de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u^n\, a(n)$, telle que tous les coefficients $a(n)$ avec n négatif sont nuls sauf un nombre *fini* d'entre eux.

Toute série de Laurent formelle non nulle s'écrit donc

$$a = u^k a(k) + u^{k+1} a(k+1) + \cdots$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et $a(k) \neq 0$.

Il n'y a aucune difficulté à étendre la définition de l'addition et de la multiplication de deux séries formelles au cas des séries de Laurent formelles. Naturellement, $\Omega[[u]]$ est un sous-anneau de l'anneau des séries de Laurent formelles, anneau que l'on note $\mathrm{Laurent}(\Omega, u)$. Dans le prochain théorème, on voit que si Ω est un corps, $\mathrm{Laurent}(\Omega, u)$ joue le rôle du corps des fractions de $\Omega[[u]]$.

Théorème 6.2. — *Si Ω est un corps, alors* $\mathrm{Laurent}(\Omega, u)$ *est aussi un corps.*

Démonstration. — Dans $\mathrm{Laurent}(\Omega, u)$, on a $u \cdot u^{-1} = 1$. La série u a donc un inverse. De même, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série u^k admet l'inverse u^{-k}. Soit maintenant $a = u^k a(k) + u^{k+1} a(k+1) + \cdots$ une série de Laurent formelle avec $k \in \mathbb{Z}$ et $a(k) \neq 0$. Alors la série formelle $b = a(k) + ua(k+1) + \cdots$ appartient à $\Omega[[u]]$ et comme $a(k) \neq 0$, elle admet un inverse dans cet anneau d'après la Proposition 3.5. Soit b^{-1} cet inverse. On a : $(b^{-1} \cdot u^{-k}) \cdot a = b^{-1} \cdot u^{-k} \cdot u^k \cdot b = 1$. Donc $b^{-1} \cdot u^{-k}$ est un inverse pour a. ∎

Comme décrit dans la précédente démonstration, il est commode de noter la formule suivante : *si $a = u^k a(k) + u^{k+1} a(k+1) + \cdots$ est une série de Laurent avec $a(k) \neq 0$, alors son inverse est donné par*

$$a^{-1} = u^{-k} \cdot \big(a(k) + a(k+1)u + a(k+2)u^2 + \cdots\big)^{-1}. \tag{6.1}$$

La notion de dérivée se prolonge aussi à tout $\mathrm{Laurent}(\Omega, u)$. Les règles de la somme et du produit sont aussi conservées.

Définition. — Soit $a = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u^n a(n)$ une série de Laurent formelle. Le coefficient $a(-1)$ est appelé le *résidu* de a et noté

$$\mathrm{res}(a) := a(-1).$$

Théorème 6.3. — *Une série de Laurent formelle est une dérivée si et seulement si son résidu est nul.*

Démonstration. — Soit a une série de Laurent formelle. Le coefficient de u^{-1} dans a' est nul. Réciproquement, si $b = \sum_n u^n b(n)$ est une série de Laurent formelle telle que $\mathrm{res}(b) = b(-1) = 0$ et si l'on pose

$$a(n) := \begin{cases} \dfrac{1}{n} b(n-1), & \text{si } n \neq 0\,; \\ \text{coefficient arbitraire } a(0), & \text{si } n = 0\,; \end{cases}$$

alors $b = a'$ avec $a = \sum_n u^n a(n)$. □

7. La formule de réversion de Lagrange-Bürmann

Cette formule est plus connue sous le nom de formule d'*inversion*. Elle a reçu de multiples démonstrations dans des contextes divers, théorie des fonctions analytiques, combinatoire des mots de Lukasiewicz. Nous nous plaçons ici dans l'algèbre des séries formelles en utilisant les techniques matricielles introduites dans le paragraphe précédent.

Soit a une série formelle sans terme constant et telle que $a(1) \neq 0$. La formule de réversion de Lagrange-Bürmann explicite les différentes puissances b^m $(m \geq 1)$ de la série réverse $b = a^{[-1]}$ à l'aide des puissances a^k $(k \in \mathbb{Z})$ de la série a.

En écrivant $a = a(1)u(1 + a(1)^{-1}a(2)u + \cdots) = a(1)uc$, où c est une série formelle de terme constant égal à 1, on voit que pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a : $a^r = a(1)^r u^r c^r$, d'où $a^r(r) = (a(1))^r$.

On note encore que, si $n \geq m \geq 1$, on a $a^{-n} = \sum_{k\geq 0} a^{-n}(-n+k)u^{-n+k}$ et $u^{m-1}a^{-n} = \sum_{k\geq 0} a^{-n}(-n+k)u^{-n+k+m-1}$. Le résidu de cette dernière série est le coefficient de $a^{-n}(-n+k)$, avec $-n+k+m-1 = -1$, soit $k = n-m$. Ainsi $\mathrm{res}(u^{m-1}a^{-n}) = a^{-n}(-n+n-m) = a^{-n}(-m)$.

De même, comme la dérivée a' est de terme constant non-nul, en posant $a' \cdot a^{-n-1} = d$, on peut écrire : $a' \cdot a^{-n-1} = \sum_{k\geq 0} d(-n-1+k)u^{-n-1+k}$ et $u^m a' \cdot a^{-n-1} = \sum_{k\geq 0} d(-n-1+k)u^{-n-1+k+m}$. D'où $\mathrm{res}(u^m a' \cdot a^{-n-1}) = d(-n-1+n-m) = d(-m-1)$ et $\mathrm{res}(u^m a' \cdot a^{-n-1}) = (a' \cdot a^{-n-1})(-m-1)$. Ces trois remarques sont utilisées dans l'énoncé et la démonstration qui suivent.

Théorème 7.1. — *Soit a une série formelle appartenant à $\mathcal{S}$ (c'est-à-dire une série sans terme constant et telle que $a(1) \neq 0$). Soit $b = a^{[-1]}$ la série réverse de a. Alors pour tout entier $m \geq 1$ et tout entier $n \geq m$, on a :*

$$(7.1) \qquad b^m(n) = \frac{m}{n}\, a^{-n}(-m) = \frac{m}{n}\, \mathrm{res}(u^{m-1}\, a^{-n})\,;$$

ou bien encore :

$$(7.1') \qquad b^m(n) = \big(a' \cdot a^{-n-1}\big)(-m-1) = \mathrm{res}(u^m\, a' \cdot a^{-n-1}).$$

Démonstration. — Formons la matrice infinie $D = (d_{m,n})$ dont les coefficients sont donnés par

$$d_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m\,; \\ \dfrac{m}{n}\, a^{-n}(-m), & \text{si } n \geq m. \end{cases}$$

On rappelle que si l'on a $a \mapsto A$ et $b \mapsto B$ pour l'injection définie au paragraphe 6, alors $B = A^{-1}$. Par ailleurs, les coefficients de la $m^{\text{ième}}$ ligne de B (à partir de la diagonale) sont les coefficients $b^m(n)$ $(n = m, m{+}1, \ldots)$ de la série puissance b^m.

Pour prouver le théorème, il suffit de démontrer que l'on a $B = D$ ou encore que $A \cdot D$ est la matrice unité. Posons $C := A \cdot D = (c_{r,s})$. D'abord $c_{r,s} = 0$ pour $r > s$, les deux matrices A et D étant triangulaires supérieures. De plus, d'après (6.1),

$$c_{r,r} = a^r(r)\, \frac{r}{r}\, a^{-r}(-r) = (a(1))^r\, (a(1))^{-r} = 1.$$

Reste à montrer que $c_{r,s} = 0$ pour $r < s$. Si $r < s$, on a

$$c_{r,s} = \sum_{k=r}^{s} a^r(k)\, \frac{k}{s}\, a^{-s}(-k) = \frac{1}{s} \sum_{k=r}^{s} k\, a^r(k)\, a^{-s}(-k).$$

Or la dernière somme est égale au coefficient de u^{-1} dans le produit de la dérivée de

$$a^r = u^r a^r(r) + u^{r+1} a^r(r+1) + \cdots$$

par la série de Laurent formelle

$$a^{-s} = u^{-s} a^{-s}(-s) + u^{-s+1} a^{-s}(-s+1) + \cdots$$

Par conséquent, $sc_{r,s} = \operatorname{res}(\,(a^r)' \cdot a^{-s}\,)$. Or $(a^r)' \cdot a^{-s} = ra^{r-1} \cdot a' \cdot a^{-s} = ra^{r-s-1} \cdot a' = (r/(r-s))(a^{r-s})'$. Ainsi $sc_{r,s}$ est égal à $(r/(r-s))$ multiplié par le résidu d'une dérivée. Il est donc nul. L'identité (7.1) est donc prouvée.

Maintenant, par un simple calcul de dérivation, on obtient :

$$\frac{m}{n}\, u^{m-1}\, a^{-n} = \frac{1}{n}\, (u^m\, a^{-n})' + u^m\, a^{-n-1} \cdot a'.$$

D'après le Théorème 6.3, on a donc $\operatorname{res}\Bigl(\dfrac{m}{n} u^{m-1} a^{-n}\Bigr) = \operatorname{res}(u^m a^{-n-1} \cdot a')$, ce qui implique (7.1′). $\square$

On exprime la formule de réversion sous deux autres formes exprimées dans les identités (7.2) et (7.3) suivantes.

THÉORÈME 7.2 (second énoncé de la formule de réversion). — *Soient $a \in \mathcal{S}$ (une série formelle sans terme constant et dont le coefficient de u est non nul) et c une série formelle arbitraire. Alors*

$$c \circ a^{[-1]} = c(0) + \sum_{n \geq 1} u^n \, \frac{1}{n} \, \mathrm{res}(c' \cdot a^{-n}). \tag{7.2}$$

Démonstration. — Posons $b = a^{[-1]}$ et $c \circ b = d = d(0) + u d(1) + \cdots$ D'abord, $d(0) = c(0)$; ensuite, pour $n \geq 1$, on a

$$d(n) = \sum_{m=1}^{n} c(m) \, b^m(n),$$

puisqu'alors $b^0(n) = 0$. D'après le Théorème 7.1, on en déduit

$$d(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} m \, c(m) \, a^{-n}(-m).$$

Or

$$\begin{aligned} c' &= c(1) + 2c(2)u + 3c(3)u^2 + \cdots, \\ a^{-n} &= u^{-n}\bigl(a(1) + a(2)u + \cdots\bigr)^{-n} \\ &= u^{-n} a^{-n}(-n) + u^{-n+1} a^{-n}(-n+1) + \cdots, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \mathrm{res}(c' \cdot a^{-n}) &= \sum_{(m-1)+k=-1} m \, c(m) \, a^{-n}(k) \\ &= \sum_{m=1}^{n} m \, c(m) \, a^{-n}(-m) \end{aligned}$$

et donc

$$d(n) = \frac{1}{n} \, \mathrm{res}(c' \cdot a^{-n}). \quad \square$$

On peut aussi prendre la dérivée de (7.2) pour obtenir

$$(c' \circ a^{[-1]}) \cdot (a^{[-1]})' = \sum_{n \geq 0} u^n \, \mathrm{res}(c' \cdot a^{-n-1}).$$

Comme la série c est arbitraire, la série dérivée c' l'est aussi. En faisant la substitution $c \leftarrow c'$ dans la formule précédente, on obtient

$$(c \circ a^{[-1]}) \cdot (a^{[-1]})' = \sum_{n \geq 0} u^n \, \mathrm{res}(c \cdot a^{-n-1}).$$

Comme $(a' \circ a^{[-1]}) \cdot (a^{[-1]})' = 1$ par dérivation de l'identité $a \circ a^{[-1]} = u$, on peut encore présenter la dernière formule sous la forme :

$$(7.3) \qquad (c \circ a^{[-1]}) \cdot (a' \circ a^{[-1]})^{-1} = \sum_{n \geq 0} u^n \ \mathrm{res}(c \cdot a^{-n-1}),$$

qui constitue la troisième expression de la formule de réversion.

Il existe d'autres manières de décrire la formule de réversion, où la série réverse $a^{[-1]}$ de a n'apparaît pas explicitement comme telle. Soit f une série formelle de terme constant non nul, de sorte que son inverse f^{-1} existe dans $\Omega[[u]]$ (Ω corps). Pour tout $b \in \mathcal{S}$, on a $u \cdot (f \circ b) = (b^{[-1]} \circ b) \cdot (f \circ b) = (b^{[-1]} \cdot f) \circ b$, d'après la Proposition 3.1.

L'équation (en b) $u \cdot (f \circ b) = b$ se récrit $(b^{[-1]} \cdot f) \circ b = b$ ou $(b^{[-1]} \cdot f) \circ b \circ b^{[-1]} = b \circ b^{[-1]}$, d'après la Proposition 3.3, soit $b^{[-1]} \cdot f = u$. Donc $(u \cdot f^{-1})^{[-1]}$ est l'*unique* solution dans $\mathcal{S}$ de l'équation $u \cdot (f \circ b) = b$.

Posons $a = u \cdot f^{-1}$. Pour tout $n \geq 1$, on a $a^{-n} = u^{-n} \cdot f^n$, de sorte que le résidu de $c' \cdot a^{-n}$ est encore égal au coefficient de u^{n-1} dans la série $c' \cdot f^n$. Ce coefficient peut encore s'exprimer par $(1/(n-1)!)\,[D^{n-1}(c' \cdot f^n)]_{u\,=\,0}$. On remplace l'énoncé du Théorème 7.2 par le suivant.

Soit f une série formelle de terme constant non nul et soit b l'unique solution de l'équation $u \cdot (f \circ b) = b$. Si c est une série formelle, on a l'identité

$$(7.2\mathrm{a}) \qquad c \circ b = c(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{u^n}{n!} \Big([D^{n-1}(c' \cdot f^n)]_{u\,=\,0} \Big).$$

On peut aussi donner la seconde forme suivante à (7.2a).

Soit f une série formelle de terme constant non nul et soit b l'unique solution de l'équation $u \cdot (f \circ b) = b$. Si d est une série formelle quelconque, on a l'identité

$$(7.2\mathrm{b}) \qquad \frac{d \circ b}{1 - u \cdot f' \circ b} = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} \Big([D^n(f^n \cdot d)]_{u\,=\,0} \Big).$$

Pour démontrer (7.2b), on dérive (7.2a) et on pose $c' \cdot f = d$. On obtient :

$$(c' \circ b) \cdot b' = (d \circ b) \cdot (f^{-1} \circ b) \cdot b' = \sum_{n \geq 1} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \Big([D^{n-1}(f^{n-1} \cdot d)]_{u\,=\,0} \Big).$$

Pour obtenir (7.2b), il suffit d'établir l'identité

$$(f^{-1} \circ b) \cdot b' = \frac{1}{1 - u \cdot f' \circ b}.$$

Or ceci résulte de l'identité $b = u \cdot (f \circ b)$ puisque, par dérivation, il vient $b' = (f \circ b) + u \cdot (f' \circ b) \cdot b'$, soit par multiplication par $f^{-1} \circ b$ des deux membres, l'identité $(f^{-1} \circ b) \cdot b' = 1 + u \cdot (f^{-1} \circ b) \cdot (f' \circ b) \cdot b'$, soit en effet $(f^{-1} \circ b) \cdot b' \cdot (1 - u \cdot (f' \circ b)) = 1$. $\square$

Il existe encore une troisième forme pour la formule de réversion qu'on peut obtenir de la façon suivante. Dérivons la formule (7.2a) :

$$(7.4) \qquad (c' \circ b) \cdot b' = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} \Big([D^n (c' \cdot f^{n+1})]_{u} = 0 \Big).$$

Soit toujours b l'unique solution de $b = u \cdot (f \circ b)$. Posons $h := u \cdot f^{-1}$. Par substitution de b, on trouve $h \circ b = b \cdot f^{-1} \circ b = b \cdot (f \circ b)^{-1} = u$, d'où $(h \circ b)' = 1$. Posons $c' = g \cdot h'$ dans (7.4). On obtient : $(c' \circ b) \cdot b' = ((g \cdot h') \circ b) \cdot b' = (g \circ b) \cdot (h' \circ b) \cdot b' = (g \circ b) \cdot (h \circ b)' = g \circ b$ et $c' \cdot f^{n+1} = g \cdot h' \cdot f^{n+1}$. On en déduit l'identité

$$(7.2c) \qquad g \circ b = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} \Big([D^n (g \cdot h' \cdot f^{n+1})]_{u} = 0 \Big).$$

8. Les fonctions hypergéométriques

Dans la définition qui suit, on utilise la notation de la factorielle montante $(\alpha)_n$ introduite au paragraphe 4.1. Soient p, q des entiers positifs et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ deux suites de nombres réels. Si aucun des β_i n'est un entier négatif ou nul, on définit la *fonction hypergéométrique* avec p et q paramètres, comme étant la série :

$${}_pF_q\Big(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix}; u\Big) := \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n} \frac{u^n}{n!}.$$

On note que si l'un des paramètres α_i du numérateur est un entier négatif ou nul, disons $-m$, avec $m \in \mathbb{N}$, la série hypergéométrique est un *polynôme* en u de degré au plus égal à m, tous les termes $(-m)_n$ étant nuls pour $n \geq m + 1$.

La plupart des fonctions élémentaires s'expriment à l'aide des fonctions hypergéométriques. On ne trouve, en effet, dans leurs développements en série, que des coefficients rationnels. Il est ainsi facile d'obtenir les paramètres des fonctions hypergéométriques correspondantes. On a déjà introduit la série exponentielle

$$\exp u := {}_0F_0\Big(\begin{matrix}- \\ -\end{matrix}; u\Big) = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} ;$$

et les séries binomiales :

$$(8.1)\qquad {}_1F_0\Big(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix};u\Big) := \sum_{n\ge 0}(\alpha)_n\frac{u^n}{n!}.$$

On définit encore :

$$\sin u := u\,{}_0F_1\Big(\begin{matrix}-\\ 3/2\end{matrix};-\frac{u^2}{4}\Big) = \sum_{n\ge 0}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;$$

$$\cos u := {}_0F_1\Big(\begin{matrix}-\\ 1/2\end{matrix};-\frac{u^2}{4}\Big) = \sum_{n\ge 0}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}\,;$$

$$\log(1+u) : = u\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}1,1\\ 2\end{matrix};-u\Big) = \sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}\,;$$

$$\operatorname{Arctg} u : = u\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}1/2,1\\ 3/2\end{matrix};-u^2\Big) = \sum_{n\ge 0}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\,;$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin} u : &= u\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}1/2,1/2\\ 3/2\end{matrix};u^2\Big)\\ &= u+\sum_{n\ge 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\frac{u^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

L'identité de Chu-Vandermonde. — Cette identité permet de sommer la série ${}_2F_1$ en $u=1$, lorsque l'un des paramètres du numérateur est un entier négatif et que la série est en fait un polynôme :

$$(8.2)\qquad {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-n,\alpha\\ \gamma\end{matrix};1\Big) = \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n},\qquad \gamma\notin -\mathbb{N}.$$

Pour établir (8.2), on part de l'identité

$$(8.3)\qquad \binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{\substack{k+l=n\\ k\ge 0,\,l\ge 0}}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{l}.$$

Cette identité est vraie lorsque α et β sont deux entiers positifs. En effet, le membre de gauche compte les sous-ensembles de cardinal n d'un ensemble contenant α éléments disons de type 1 et β éléments disons de type 2. Le membre de droite est une sommation sur les couples (k,l) $(k+l=n)$. Pour (k,l) fixé, le produit des binomiaux $\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{l}$ est le nombre de ces sous-ensembles ayant exactement k éléments de type 1 et l éléments de type 2.

Maintenant, l'identité (8.3) est vraie lorsque α est une variable et β un entier positif. En effet, la différence des deux membres est un polynôme en α de degré au plus égal à n. Or ce polynôme, d'après ce qui précède, a une infinité de solutions, à savoir les entiers positifs. Il est donc nul.

Enfin, si on considère (8.3) comme une identité dans l'anneau des polynômes en la variable β, à coefficients dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[\alpha]$, on voit que la différence des deux membres est un polynôme ayant encore une infinité de racines. Il est donc nul. Ainsi, (8.3) est valable pour tout α et tout β.

Comme le coefficient binomial peut s'exprimer comme

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(-\alpha)_n}{n!}, \tag{8.4}$$

on peut récrire (8.3) sous la forme

$$\frac{(\alpha+\beta)_n}{n!} = \sum_{0\le k\le n} \frac{(\alpha)_k(\beta)_{n-k}}{k!\,(n-k)!} \qquad (n \ge 0). \tag{8.5}$$

A l'aide de l'algèbre des factorielles montantes (*cf.* § 4.1) on en déduit

$$\frac{(\alpha+\beta)_n}{(\beta)_n} = \sum_{0\le k\le n} \frac{(\alpha)_k(n-k+1)_k}{(\beta+n-k)_k k!} = \sum_{0\le k\le n} \frac{(\alpha)_k(-n)_k}{(1-\beta-n)_k k!}$$

$$= {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, -n\\ 1-\beta-n\end{matrix}; 1\right),$$

ou encore

$$\frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, \alpha\\ \gamma\end{matrix}; 1\right), \qquad \gamma \notin -\mathbb{N}, \tag{8.6}$$

une identité qu'on a coutume d'appeler *identité de Chu-Vandermonde.* De celle-ci, on établit la plupart des autres identités sur les fonctions hypergéométriques.

L'identité (8.5) est équivalente à l'identité (4.12). Celle-ci est donc établie ; elle se spécialise elle-même en :

$${}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}; u\right) . {}_1F_0\left(\begin{matrix}-\alpha\\ -\end{matrix}; u\right) = 1. \tag{8.7}$$

9. Polynômes générateurs

Les techniques combinatoires présentées dans ce paragraphe servent d'une part dans les problèmes d'énumération proprement dits, d'autre part, dans les démonstrations de plusieurs identités sur les séries hypergéométriques, notamment la très célèbre identité de Pfaff-Saalschütz (voir § 10). Dans le présent paragraphe, nous donnons quelques résultats d'énumération concernant le groupe des permutations et certains de ses sous-ensembles. Ces résultats seront exploités dans le paragraphe suivant pour l'étude des séries hypergéométriques.

Par *statistique* sur un ensemble fini S, on entend une application de S dans $\mathbb{N}$. Si x est une variable, le polynôme

$$P(x) := \sum_{s\in S} x^{f(s)} \tag{9.1}$$

est appelé *polynôme générateur* de S *par la statistique* f. Par *poids* sur S, on entend une application w de S dans un anneau de polynômes à une ou plusieurs variables. Le polynôme $\sum_{s\in S} w(s)$ est alors appelé *polynôme générateur* de S *par le poids* w. L'exemple d'un tel poids est donné dans (9.1) avec $w(s) = x^{f(s)}$. Par abus de langage, on utilise aussi le vocable *fonction génératrice* à la place de polynôme générateur.

9.1. *Le groupe des permutations.* — Le groupe des permutations de l'ensemble $[\,n\,] = \{1, 2, \ldots, n\}$ est noté $\mathfrak{S}_n$ $(n \geq 1)$. On sait que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose, de façon unique, en un produit (commutatif) de cycles. Notons $\operatorname{cyc}\sigma$ le *nombre de cycles* de la permutation σ. Le polynôme $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{\operatorname{cyc}\sigma}$ est donc le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par le nombre de cycles. Pour $n = 0$, on convient que ce polynôme est égal à 1.

Proposition 9.1. — *Pour tout $n \geq 0$, on a l'identité*

$$(\alpha)_n = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{\operatorname{cyc}\sigma}, \tag{9.2}$$

où $(\alpha)_n$ est la factorielle montante.

Démonstration. — La proposition est vraie pour $n = 1$, puisque α est simplement le polynôme générateur du point fixe 1. Pour $n \geq 2$, l'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n$ se compose des permutations admettant le point fixe n, dont le polynôme générateur est, par récurrence, $(\alpha)_{n-1}\alpha$ et des permutations où n est à l'intérieur d'un cycle de longueur au moins égale à 2. Une telle permutation σ peut être caractérisée par le couple (σ', k) où

(i) $k = \sigma^{-1}(n)$;

(ii) σ' est la permutation de $[n-1]$ définie par $\sigma'(i) = \sigma(i)$ pour tout $i \in [n-1] \setminus \{k\}$ et $\sigma'(k) = \sigma(n)$.

L'entier k compris entre 1 et $(n-1)$ et σ' est une permutation de $[n-1]$ telle que $\operatorname{cyc}\sigma' = \operatorname{cyc}\sigma$. La fonction génératrice de cette seconde sorte de permutation est donnée par $(\alpha)_{n-1}(n-1)$. Le polynôme générateur total vaud donc $(\alpha)_{n-1}\,\alpha + (\alpha)_{n-1}\,(n-1) = (\alpha)_n$. $\square$

Lorsqu'on pose $\alpha = 1$ dans (9.2), on obtient : $(1)_n = n! = \operatorname{card}\mathfrak{S}_n$. Il y a, en effet, $n!$ permutations de l'ensemble $[\,n\,]$. Lorsqu'une permutation

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ne contient qu'un seul cycle (forcément de longueur n), on dit que la permutation est *circulaire*. Pour obtenir le nombre de permutations circulaires dans $\mathfrak{S}_n$, il suffit, par exemple, de déterminer le coefficient de α dans le polynôme générateur $(\alpha)_n$. Le coefficient de α est égal à $(n-1)!$, qui est précisément le nombre de permutations circulaires dans $\mathfrak{S}_n$.

Rappelons que, pour tout α, on a donné un sens à l'expression $(1-u)^{-\alpha}$ en la posant égale à

$$ {}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix};u\right)=\sum_{n\geq 0}(\alpha)_n\frac{u^n}{n!} \tag{9.3}$$

et que l'identité de Chu-Vandermonde justifiait cette notation puisqu'elle impliquait

$$(1-u)^{-\alpha}(1-u)^{-\beta}=(1-u)^{-\alpha-\beta}.$$

On réinterprète l'identité (9.3) en disant que la *fonction génératrice exponentielle* de la suite $(\alpha)_n$ $(n \geq 0)$ est égale à $(1-u)^{-\alpha}$ et au vu de la Proposition 9.1, on dit également que la *fonction génératrice exponentielle de la suite des groupes* $\mathfrak{S}_n$ $(n \geq 0)$ *par nombre de cycles* est égale à $(1-u)^{-\alpha}$, soit

$$\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\alpha^{\operatorname{cyc}\sigma}=(1-u)^{-\alpha}.$$

9.2. *Les involutions.* — Soit $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des involutions de l'ensemble $[\,n\,]$, c'est-à-dire l'ensemble des permutations σ de $[\,n\,]$ telles que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ ou encore des permutations dont la décomposition en cycles ne comporte que des points fixes et des transpositions. On note $\operatorname{fix}\sigma$ (resp. $\operatorname{trans}\sigma$) le *nombre de points fixes* (resp. *de transpositions*) de l'involution σ et on forme le polynôme générateur, que nous notons $H_n(x,y)$, de $\mathcal{I}_n$ par le poids w défini par $w(\sigma)=x^{\operatorname{fix}\sigma}y^{\operatorname{trans}\sigma}$, soit

$$H_n(x,y)=\sum_{\sigma\in\mathcal{I}_n}x^{\operatorname{fix}\sigma}y^{\operatorname{trans}\sigma}\quad(n\geq 1).$$

Par convention, $H_0(x,y):=1$.

Donnons la liste des involutions de $[\,n\,]$ pour $n=1,2,3,4$, écrites chacune comme un produit de points fixes et de transpositions :

$n=1$: (1) ;
$n=2$: $(1)(2)$; $(1,2)$;
$n=3$: $(1)(2)(3)$; $(1,2)(3)$; $(1,3)(2)$; $(2,3)(1)$;
$n=4$: $(1)(2)(3)(4)$; $(1)(2)(3,4)$; $(1)(3)(2,4)$; $(1)(4)(2,3)$; $(2)(3)(1,4)$; $(2)(4)(1,3)$; $(3)(4)(1,2)$; $(1,2)(3,4)$; $(1,3)(2,4)$; $(1,4)(2,3)$.

On en déduit : $H_1(x, y) = x$; $H_2(x, y) = x^2 + y$; $H_3(x, y) = x^3 + 3xy$; $H_4(x, y) = x^4 + 6x^2y + 3y^2$.

Notons que $H_n(0, y)$ est le polynôme générateur de l'ensemble des involutions *sans point fixe* par le nombre de transpositions et que $H_n(0, 1)$ est le nombre de ces involutions. On a évidemment $H_n(0, 1) = 0$ si n est impair et $H_2(0, 1) = 1$. Pour $n = 2m$ et $m \geq 2$, il y a par récurrence $H_{2m-2}(0, 1)$ involutions sans point fixe contenant la transposition $(2m, k)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, (2m-1)$. On a donc $H_{2m}(0, 1) = (2m-1)H_{2m-2}(0, 1)$, d'où $H_{2m}(0, 1) = (2m-1) \times (2m-3) \times \cdots \times 3 \times 1$, que nous posons égal à $(2m-1)!!$, qui vaut également $(2m)!/(2^m\, m!)$ ou encore $(\frac{1}{2})_m\, 2^m$.

Maintenant, pour $i+2j = n$, soit $\mathcal{I}_{i,j}$ l'ensemble des involutions $\sigma \in \mathcal{I}_n$ ayant i points fixes et j transpositions. Pour obtenir une telle involution, il suffit d'extraire de $[\,n\,]$ exactement i éléments pour en faire des points fixes et avec les $2j$ éléments restant de faire une involution sans point fixe. Par conséquent, le cardinal de $\mathcal{I}_{i,j}$ vaut $\binom{n}{i}\,(2j)!/(2^j\, j!) = n!/(i!\, 2^j\, j!)$. On peut donc écrire

$$H_n(x, y) = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i!\, 2^j\, j!}\, x^i\, y^j.$$

Les *polynômes d'Hermite* classiques sont obtenus en faisant les substitutions $x \leftarrow 2x$, $y \leftarrow -2$. On dit qu'on a de la sorte *interprété combinatoirement* ces polynômes.

Considérons les *fonctions génératrices exponentielles* a, b, c des trois suites de polynômes $(H_n(x, 0))$, $(H_n(0, y))$, $(H_n(x, y))$, soit

$$a := \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} H_n(x, 0); \quad b := \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} H_n(0, y); \quad c := \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} H_n(x, y).$$

Comme $H_n(x, 0) = x^n$, on a immédiatement $a = \exp(u\,x)$. Ensuite, pour $n \geq 0$, on a $H_{2n}(0, y) = ((2n)!/(2^n\, n!))\, y^n$ et $H_{2n+1}(0, y) = 0$, d'où $b = \exp(u^2\, y/2)$. D'autre part, le coefficient de $u^n/n!$ dans le produit $a \cdot b$ est égal à $\sum\limits_{i+2j=n} (n!/(i!\, 2^j\, j!))\, x^i\, y^j = H_n(x, y)$. On a donc $a \cdot b = c$, soit

$$\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} H_n(x, y) = \exp(u\,x + u^2\, y/2), \tag{9.4}$$

pourvu que l'on sache démontrer l'identité $\exp(u\,x + u^2\, y/2) = \exp(u\,x) \cdot \exp(u^2\, y/2)$, qui est vraie (*cf.* § 13). Ainsi, $\exp(u\,x + u^2\, y/2)$ est la *fonction génératrice exponentielle de la suite* $(\mathcal{I}_n)$ *des involutions par nombre de points fixes et nombre de transpositions.*

9.3. *Les paires d'involutions.* — Le produit $H_{2n}(0,y)\,H_{2n}(0,\eta)$ est le polynôme générateur d'une structure combinatoire bien définie (*cf.* Exercice 30). Nous nous proposons seulement ici de calculer la fonction génératrice exponentielle de la suite $(H_{2n}(0,y)\,H_{2n}(0,\eta))$ $(n \geq 0)$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{u^{2n}}{(2n)!} H_{2n}(0,y)\,H_{2n}(0,\eta) &= \sum_{n\geq 0} \frac{u^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{2^n\,n!} y^n \left(\frac{1}{2}\right)_n 2^n\,\eta^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)_n (y\,\eta\,u^2)^n \\ &= (1 - y\,\eta\,u^2)^{-1/2}.\end{aligned}$$

La fonction génératrice exponentielle des produits $H_n(x,y)\,H_n(\xi,\eta)$ a également une forme close (c'est la célèbre *formule bilinéaire de Mehler*, voir Exercice 30), mais son obtention nécessite des techniques qui seront seulement développées dans les paragraphes suivants.

9.4. *Bipermutations.*

Définition. — Soient $r \geq 1$ un entier et $(I_1, I_2, \ldots, I_r)$ une suite de r sous-ensembles (éventuellement vides) d'un ensemble I. On dit que cette suite est une *partition ordonnée* de I, si les sous-ensembles I_j (appelés encore *blocs* de la partition ordonnée) sont disjoints deux à deux et ont pour réunion I.

Une *partition* d'un ensemble I est définie comme une collection (non ordonnée) $\{I_1, I_2, \ldots, I_r\}$ $(r \geq 1)$ de sous-ensembles *non vides* de I, disjoints deux à deux et de réunion I. Il sera commode de dire que $I_1 + I_2 + \cdots + I_r$ est une partition de I.

On appelle *bipermutation* de l'ensemble $[\,n\,]$ tout triplet (A, B, σ), où (A, B) est une partition ordonnée de $[\,n\,]$ en deux blocs disjoints (l'un d'eux pouvant être vide) et σ une permutation de $[\,n\,]$ ayant la propriété que les restrictions σ_A et σ_B de σ aux sous-ensembles A et B, respectivement, sont elles-mêmes des permutations de A et B.

On définit le poids $w_{\alpha,\beta}(A, B, \sigma)$ de la bipermutation (A, B, σ) comme étant le monôme $\alpha^{\operatorname{cyc}\sigma_A}\beta^{\operatorname{cyc}\sigma_B}$.

Proposition 9.2. — *On a l'identité*

$$(\alpha + \beta)_n = \sum_{(A,B,\sigma)} w_{\alpha,\beta}(A, B, \sigma),$$

où la somme est sur toutes les bipermutations de $[\,n\,]$.

Démonstration. — Par récurrence sur n. C'est banal pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, les bipermutations admettant le point fixe n se répartissent entre les bipermutations (A, B, σ) telles que $n \in A$ et celles telles que $n \in B$. Par récurrence, leur fonction génératrice est $(\alpha+\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)$. Comme dans la précédente démonstration, toute bipermutation de $[n-1]$ donne naissance à exactement $(n-1)$ bipermutations de $[\,n\,]$ dans lesquelles n n'est pas point fixe. Leur fonction génératrice est donc $(\alpha+\beta)_{n-1}(n-1)$. □

La formule de Chu-Vandermonde est alors un simple corollaire des Propositions 9.1 et 9.2. En effet, dans l'identité de cette dernière proposition, faisons une première sommation par rapport à $k \geq 0$, puis par rapport à tous les sous-ensembles A dans les triplets (A, B, σ) qui sont de cardinal k. On obtient

$$(\alpha+\beta)_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\operatorname{card} A = k} \sum_{(A,B,\sigma)} w_{\alpha,\beta}(A, B, \sigma).$$

La dernière sommation est égale, d'après la Proposition 9.1, à $(\alpha)_k\,(\beta)_{n-k}$ puisque les restrictions de chaque σ aux sous-ensembles A et B sont elles-mêmes des permutations de A et B, respectivement. L'identité (8.5) est donc établie, donc aussi l'identité de Chu-Vandermonde (8.2).

9.5. *Injections.* — Soit $A + B$ une partition de $[\,n\,]$ en deux blocs tels que $\operatorname{card} A = i$, $\operatorname{card} B = j$ $(i, j \geq 0,\ i + j = n)$. Si τ est une *injection* de A dans $[\,n\,] = A + B$, on désigne par C le sous-ensemble de A formé de tous les éléments x tels que tous les itérés $\tau^k(x)$ $(k \geq 0)$ sont dans A. Soit $x \in C$. Si $\tau(x) \neq x$, désignons par k le plus petit entier positif tel que $\tau^k(x) = \tau^l(x)$ pour un certain $l \geq k+1$. On peut choisir également l'entier l de sorte que les itérés $\tau^k(x)$, $\tau^{k+1}(x)$, … , $\tau^{l-1}(x)$ soient tous distincts. Si $1 \leq k$, à cause du choix de k et l, on ne peut avoir $\tau^{k-1}(x) = \tau^{l-1}(x)$. Comme τ est injectif, on ne peut avoir non plus $\tau(\tau^{k-1}(x)) = \tau(\tau^{l-1}(x))$. Par conséquent, $k = 0$ et la suite $x \mapsto \tau(x) \mapsto \tau^2(x) \mapsto \cdots \mapsto \tau^{k-1}(x)$ est un cycle. La restriction de τ à C est ainsi une *permutation* de C. On note $\operatorname{cyc} \tau$ le nombre de cycles de cette restriction.

Les éléments de $A \setminus C$ appartiennent alors à des *chemins* de la forme $x \mapsto \tau(x) \mapsto \tau^2(x) \mapsto \cdots \mapsto \tau^m(x)$, où x n'a pas d'antécédent, où tous les termes sont distincts et où $\tau^m(x) \in B$. En convenant que les éléments de B qui n'ont pas d'antécédent sous τ forment des chemins de longueur nulle, réduits à un seul sommet, le nombre total de chemins est égal au cardinal de B.

Proposition 9.3. — *Soit (A, B) une partition ordonnée de $[\,n\,]$ en deux blocs tels que* $\operatorname{card} A = i$, $\operatorname{card} B = j$ $(i, j \geq 0,\ i + j = n)$. *Alors, la fonction génératrice $\sum_\tau \alpha^{\operatorname{cyc} \tau}$ des injections τ de A dans $A+B$ par nombre de cycles est égale à :* $\quad (\alpha + j)_i$.

Démonstration. — La proposition est déjà démontrée lorsque $j = 0$ dans la Proposition 9.1. Soit $a = \max A$. L'ensemble des injections τ de A dans $A + B$ se compose des injections admettant a comme point fixe — leur fonction génératrice vaut $(\alpha + j)_{i-1}\,\alpha$ — puis des injections où a est à l'intérieur d'un cycle de longueur au moins égale à 2 ou à l'intérieur du chemin $x \mapsto \tau(x) \mapsto \tau^2(x) \mapsto \cdots \mapsto \tau^k(x)$. En retirant a du cycle ou d'un chemin, on retrouve une injection τ' d'un ensemble de cardinal $(i-1)$ dans un ensemble de cardinal $(i-1+j)$. D'autre part, τ est complètement caractérisée par la donnée du couple $(\tau', \tau(a))$. Or $\tau(a)$ peut prendre $(i-1+j)$ valeurs. La fonction génératrice de ces dernières injections est donc égale à $(\alpha+j)_{i-1}\,(i-1+j)$. La fonction génératrice de *toutes* les injections est donc égale à $(\alpha+j)_{i-1}\,(\alpha+i-1+j) = (\alpha+j)_i$. □

10. L'identité de Pfaff-Saalschütz

Nous nous proposons d'utiliser les techniques combinatoires développées dans le paragraphe précédent pour établir cette identité fondamentale de la théorie des séries hypergéométriques. Introduisons tout d'abord la notion de *bipermutation* (I, J)*-conflictuelle*, puis calculons son polynôme générateur.

Soit $I + J = [\,n\,]$ une partition ordonnée fixée telle que $\operatorname{card} I = i$, $\operatorname{card} J = j$ $(i + j = n)$. On dit qu'une bipermutation (A, B, σ) de $[\,n\,]$ est (I, J)-*conflictuelle* si aucun cycle de σ n'est contenu (en entier) dans $B \cap J$.

Dans la partie supérieure de la Figure 1, on a représenté le graphe d'une bipermutation (I, J)-conflictuelle : dans le bloc A, il n'y a aucune contrainte sur les cycles, les cycles sont soit contenus dans I, soit dans J ou ont des sommets dans les deux blocs I, J. En revanche, les cycles de B sont ou bien tous contenus dans I, ou bien ont une intersection non vide avec J *et* I (un seul cycle est dans ce cas).

Toute bipermutation est évidemment $([\,n\,], \emptyset)$-conflictuelle. Lorsque $J = [\,n\,]$, les seules bipermutations (A, B, σ) qui sont $(\emptyset, [\,n\,])$-conflictuelles sont les bipermutations de la forme $([\,n\,], \emptyset, \sigma)$, où σ parcourt tout $\mathfrak{S}_n$. Dans le premier cas, leur fonction génératrice est $(\alpha + \beta)_n$, dans le second $(\alpha)_n$.

Proposition 10.1. — *La fonction génératrice des bipermutations* (I, J)*-conflictuelles est donnée par*

$$\sum_{(A,B,\sigma)} w_{\alpha,\beta}(A, B, \sigma) = (\alpha + i)_j\,(\alpha + \beta)_i.$$

Démonstration. — Dans la dernière expression, on voit apparaître le facteur $(\alpha{+}i)_j$ qui est un polynôme générateur d'une classe d'injections. La démonstration de la proposition va ainsi reposer sur une transformation

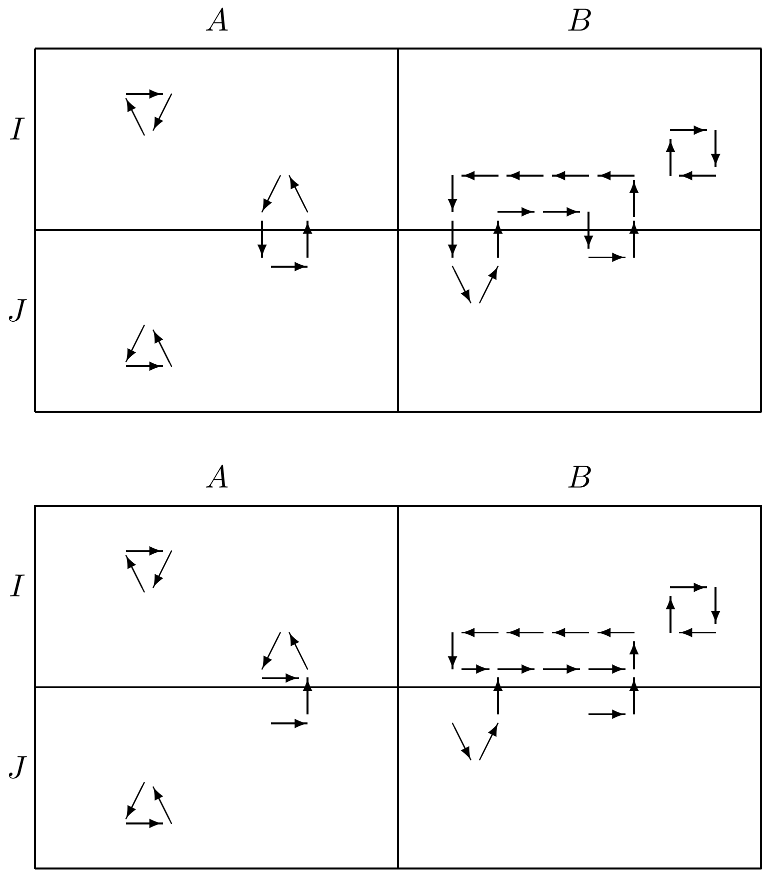


Fig. 1

envoyant chaque bipermutation (I, J)-conflictuelle sur un couple formé par une injection et une bipermutation. Cette transformation est décrite dans la figure 1, où l'on a représenté, dans sa partie supérieure, une bipermutation (I, J)-conflictuelle par son graphe.

Chaque fois qu'une flèche a son origine, disons v, dans I et son but dans J, elle est supprimée et remplacée par une flèche de même origine dont le but est le premier itéré de v (dans le cycle contenant v) qui soit de nouveau dans I. Le fait important est que cette transformation *préserve le nombre de cycles* et qu'elle est réversible. On obtient le graphe d'une *injection* f de J dans $I + J$ dont les seuls cycles sont dans A et une bipermutation $(A \cap I, B \cap I, \tau)$ de l'ensemble I.

Par conséquent, $w_{\alpha,\beta}(A, B, \sigma) = \alpha^{\operatorname{cyc} f}\, w_{\alpha,\beta}(A \cap I, B \cap I, \tau)$. D'après la Proposition 9.3, $\sum_f \alpha^{\operatorname{cyc} f} = (\alpha + i)_j$ et d'après la Proposition 9.2 $\sum w_{\alpha,\beta}(A \cap I, B \cap I, \tau) = (\alpha + \beta)_i$. $\square$

L'identité de Pfaff-Saalschütz se démontre alors comme suit. D'après la Proposition 9.2, le produit $(\alpha + \beta)_n\, (\gamma + \delta)_n$, où α, β, γ, δ sont des variables qui commutent, s'exprime encore par

$$(\alpha+\beta)_n\,(\gamma+\delta)_n=\sum w_{\alpha,\beta}(A,B,\sigma)\,w_{\gamma,\delta}(C,D,\tau),$$

où la somme est étendue à tous les couples $(A,B,\sigma),(C,D,\tau)$ de bipermutations de $[\,n\,]$.

Notons $K(\tau)$ la réunion de tous les cycles de τ qui sont entièrement contenus dans $B\cap D$, puis τ' la restriction de τ à l'ensemble $K(\tau)$ — c'est une permutation de $K(\tau)$ — enfin τ'' la restriction de τ à $C+(D\setminus K(\tau))$. Le triplet $(C,D\setminus K(\tau),\tau'')$ est une bipermutation de $C+(D\setminus K(\tau))$ et elle est $(A,B\setminus K(\tau))$-*conflictuelle*. De plus

$$w_{\gamma,\delta}(C,D,\tau)=\delta^{\operatorname{cyc}\tau'}\,w_{\gamma,\delta}(C,D\setminus K(\tau),\tau''). \tag{10.1}$$

Considérons un triplet d'entiers positifs (i,j,k) tels que $i+j+k=n$, puis une partition ordonnée (I,J,K) de $[\,n\,]$ telle que $\operatorname{card} I=i$, $\operatorname{card} J=j$, $\operatorname{card} K=k$, enfin l'ensemble des paires de bipermutations (A,B,σ), (C,D,τ) telles que $A=I$, $B\setminus K(\tau)=J$, $K(\tau)=K$. La sommation par rapport à ces *seules* paires de bipermutations donne, d'après (10.1) et la Proposition 10.1,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(A,B,\sigma),(C,D,\tau)\\ A=I,B=J+K,K(\tau)=K}} & w_{\alpha,\beta}(A,B,\sigma)\,w_{\gamma,\delta}(C,D,\tau)\\ &=(\alpha)_i\,(\beta)_{j+k}\,(\delta)_k\sum w_{\gamma,\delta}(C,D\setminus K,\tau')\\ &=(\alpha)_i\,(\beta)_{j+k}\,(\delta)_k\,(\gamma+i)_j\,(\gamma+\delta)_i.\end{aligned}$$

En sommant ensuite sur tous les triplets (I,J,K), on obtient

$$(\alpha+\beta)_n\,(\gamma+\delta)_n=\sum_{i+j+k=n}\binom{n}{i,j,k}(\alpha)_i\,(\beta)_{j+k}\,(\delta)_k\,(\gamma+i)_j\,(\gamma+\delta)_i.$$

D'où, lorsque $\gamma=\alpha$,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)_n\,(\alpha+\delta)_n&=\sum_{i+j+k=n}\binom{n}{i,j,k}(\alpha)_i\,(\beta)_{j+k}\,(\delta)_k\,(\alpha+i)_j\,(\alpha+\delta)_i\\ &=\sum_{i+j+k=n}\binom{n}{i,j,k}(\alpha)_{i+j}\,(\beta)_{j+k}\,(\delta)_k\,(\alpha+\delta)_i\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha)_{n-k}\,(\delta)_k\,(\beta)_k\\ &\qquad\times\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}(\beta+k)_{n-i-k}\,(\alpha+\delta)_i\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha)_{n-k}\,(\delta)_k\,(\beta)_k(\alpha+\beta+\delta+k)_{n-k}.\end{aligned}$$

Posons maintenant $\gamma = \alpha + \beta + \delta$ dans la dernière identité. On obtient

$$\begin{aligned}(\gamma-\delta)_n\,(\gamma-\beta)_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\gamma-\beta-\delta)_{n-k}\,(\delta)_k\,(\beta)_k\,(\gamma+k)_{n-k}\\ &= (\gamma)_n\,(\gamma-\delta-\beta)_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k\,(\delta)_k\,(\beta)_k}{(1-\gamma+\beta+\delta-n)_k\,(\gamma)_k},\end{aligned}$$

soit donc l'identité de Pfaff-Saalschütz

$$\frac{(\gamma-\delta)_n\,(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n\,(\gamma-\delta-\beta)_n} = {}_3F_2\Big(\begin{matrix}-n,\beta,\delta\\ \gamma, 1+\beta+\delta-\gamma-n\end{matrix};1\Big).$$

11. Transformations de Laplace formelles

Soient a, b deux séries formelles. On appelle *produit de Hadamard* de a par b, la série formelle donnée par :

$$aHb := \sum_{n\geq 0} u^n a(n) b(n). \tag{11.1}$$

On peut vérifier, sans difficulté, que l'ensemble $\Omega[[u]]$ muni de l'addition des séries formelles et du produit d'Hadamard est un anneau. La mention d'un tel produit n'est donnée ici que pour permettre d'introduire la définition suivante.

Définition. — On appelle *fonction génératrice* de la suite $(a(n))$ $(n \geq 0)$ *par rapport à la suite* $(b(n))$ $(n \geq 0)$, la série formelle aHb définie en (11.1). Lorsque $b = \sum\limits_{n\geq 0} u^n$, la série $aHb = a = \sum_{n\geq 0} u^n a(n)$ est appelée *fonction génératrice de la suite* $(a(n))$ $(n \geq 0)$ ou même *fonction génératrice ordinaire* de cette suite.
Lorsque $b = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u^n}{n!}$, la série $aHb = \sum_{n\geq 0} u^n a(n)/n!$ est appelée *fonction génératrice exponentielle de la suite* $(a(n))$ $(n \geq 0)$.

La *transformation de Laplace inverse* $\mathcal{L}^{-1}$ que l'on définit sur l'algèbre des séries formelles a pour effet d'envoyer toute fonction génératrice *ordinaire* sur la fonction génératrice *exponentielle* correspondante. En d'autres termes, on définit :

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\sum_{n\geq 0} a(n)u^n\Big) := \sum_{n\geq 0} a(n)\frac{u^n}{n!}. \tag{11.2}$$

On a en particulier, pour tout scalaire ω, la relation :

$$\mathcal{L}^{-1}\Bigl(\sum_{n\geq 0}\omega^n u^n\Bigr) = \sum_{n\geq 0}\omega^n \frac{u^n}{n!}.$$

D'où :

$$\mathcal{L}^{-1}\Bigl(\frac{1}{1-\omega u}\Bigr) = e^{\omega u}. \tag{11.3}$$

Remarque. — C'est cette dernière formule qui a suggéré le nom de transformation de Laplace inverse (formelle), puisque classiquement la transformation de Laplace d'une fonction f est définie par :

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

et que l'on a en particulier $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$, formule qu'on peut comparer avec (11.3).

Propriété 11.1. — *Soit $j \geq 0$ un entier. Alors*

$$\mathcal{L}^{-1}\bigl(u^j(1-u)^{-j-1}\bigr) = e^u \frac{u^j}{j!}. \tag{11.4}$$

Démonstration. — En effet,

$$u^j(1-u)^{-j-1} = \sum_{k\geq 0}(j+1)_k \frac{u^{j+k}}{k!}\ ;$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\bigl(u^j(1-u)^{-j-1}\bigr) &= \sum_{k\geq 0}(j+1)_k \frac{u^{j+k}}{k!\,(j+k)!}\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{j!}\frac{u^{j+k}}{k!} = e^u\frac{u^j}{j!}. \quad \square\end{aligned}$$

La transformation $\mathcal{L}^{-1}$ est évidemment *linéaire* :

$$\mathcal{L}^{-1}(\omega a + \omega' b) = \omega\mathcal{L}^{-1}(a) + \omega'\mathcal{L}^{-1}(b). \tag{11.5}$$

Cette propriété de linéarité se prolonge au cas des sommes (infinies) de séries formelles. En effet, si (a_s) $(s \in S)$ est une famille *sommable* de séries formelles et si (ω_s) $(s \in S)$ est une famille de scalaires, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\Bigl(\sum_{s\in S}\omega_s a_s\Bigr) = \sum_{s\in S}\omega_s\mathcal{L}^{-1}(a_s). \tag{11.6}$$

La vérification en est immédiate. Elle résulte du fait que la famille $(\omega_s a_s(n)u^n/n!)$ $(s \in S,\ n \in \mathbb{N})$ est aussi sommable et que l'on peut sommer cette famille par paquets, soit d'abord par rapport à s, puis par rapport à n, soit dans l'ordre inverse.

De (11.4) et (11.6), on déduit alors la formule :

$$\mathcal{L}^{-1}\Bigl(\sum_{j\ge 0} a(j)u^j(1-u)^{-j-1}\Bigr) = e^u \cdot \mathcal{L}^{-1}(a). \tag{11.7}$$

12. Les matrices de Seidel

Nous reprenons dans ce paragraphe la réactualisation de certains calculs aux différences finies. On part d'une suite d'éléments $(a(n))$ $(n \ge 0)$ appartenant à un anneau Ω et l'on construit une suite double $(a(i,j))$ $(i, j \ge 0)$ de nouveaux éléments de Ω en posant :

$$\begin{aligned} &a(0,j) = a(j) && (j \ge 0)\,;\\ &a(i,j) = a(i-1,j) + a(i-1,j+1) && (i \ge 1,\ j \ge 0). \end{aligned} \tag{12.1}$$

On adopte la convention des matrices,

$$\begin{array}{ccccl} a(0,0) & a(0,1) & a(0,2) & \dots & \text{suite initiale}\\ a(1,0) & a(1,1) & a(1,2) & \dots & \\ a(2,0) & a(2,1) & a(2,2) & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \text{suite} & & & & \\ \text{finale} & & & & \end{array}$$

de sorte que $(a(0,j))$ $(j \ge 0)$ est la première ligne d'une matrice infinie. C'est la suite *initiale*. La suite $(a(i,0))$ $(i \ge 0)$ est la première colonne de cette matrice. C'est la suite *finale*.

L'itération de (12.1), qui est facile, conduit aux identités :

$$a(i,j) = \sum_{0\le k\le i} \binom{i}{k} a(0,j+k)\,; \tag{12.2}$$

$$a(i,j) = \sum_{0\le k\le j} (-1)^k \binom{j}{k} a(i+j-k,0). \tag{12.3}$$

La proposition suivante remonte à Euler.

Proposition 12.1. — *Soit* $a(0,*) = \sum_{j\ge 0} a(0,j)u^j$ *la fonction génératrice ordinaire de la suite initiale. Alors la fonction génératrice* *ordinaire $a(*,0)$ de la suite finale est donnée par*

$$\begin{aligned} a(*,0) = \sum_{i\ge 0} a(i,0)u^i &= (1-u)^{-1}\cdot\Bigl(a(0,*)\circ\Bigl(\frac{u}{1-u}\Bigr)\Bigr) \\ &= \sum_{j\ge 0} a(0,j)\,u^j(1-u)^{-j-1}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Démonstration. — D'après (12.2) et (4.10), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i\ge 0} a(i,0)u^i &= \sum_{i\ge 0}\sum_{0\le j\le i}\binom{i}{j}a(0,j)u^i = \sum_{j\ge 0} a(0,j)\sum_{i\ge j}\binom{i}{j}u^i \\ &= \sum_{j\ge 0} a(0,j)u^j\sum_{k\ge 0}\binom{j+k}{j}u^k = \sum_{j\ge 0} a(0,j)u^j\sum_{k\ge 0}(j+1)_k\frac{u^k}{k!} \\ &= \sum_{j\ge 0} a(0,j)u^j(1-u)^{-j-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 12.2. — *Soit $A(0,*)$ (resp. $A(*,0)$) la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale (resp. suite finale). Alors*

$$A(*,0) = e^u\,A(0,*). \tag{12.5}$$

Démonstration. — Cette proposition résulte de la proposition précédente en utilisant les formules sur la transformation de Laplace inverse. $\square$

La matrice infinie $(a(i,j))$ $(i\ge 0, j\ge 0)$ obtenue par itération des formules (12.1) est appelée *matrice de Seidel associée* à la suite $(a(n))$ $(n\ge 0)$. Sa fonction génératrice exponentielle définie par

$$A(*,*) := \sum_{i\ge 0, j\ge 0} a(i,j)\frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!} \tag{12.6}$$

a une expression simple en fonction de la fonction génératrice exponentielle $A(0,*)$ de la suite initiale, comme indiqué dans la proposition suivante.

Notons que la définition de la fonction génératrice *double* donnée en (12.6) ne présente aucune difficulté. Le fait qu'il y ait deux variables u et v indique clairement comment les opérations d'addition et de multiplication doivent être définies. On a, par exemple,

$$\Bigl(\sum_{i,j} b(i,j)u^iv^j\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{i,j} c(i,j)u^iv^j\Bigr) = \sum_{i,j} d(i,j)u^iv^j,$$

où, pour tout $i \geq 0$, $j \geq 0$, on définit :

$$d(i,j) = \sum_{0\leq k\leq i, 0\leq l\leq j} b(k,l)c(i-k, j-l).$$

On peut également substituer à une série à une variable une série formelle à deux variables, à condition que cette dernière soit sans terme constant. Prenons, par exemple, la série (sans terme constant) réduite à la simple somme $(u+v)$ et substituons-la à la variable u dans la fonction génératrice exponentielle $A(0,*) = \sum_{j\geq 0}(a(0,j)u^j/j!\,)$ de la suite initiale. On obtient :

$$\begin{aligned}
A(0,*)\circ(u+v) &= \sum_{j\geq 0} a(0,j)\frac{(u+v)^j}{j!} \\
&= \sum_{j\geq 0} \frac{a(0,j)}{j!} \sum_{0\leq k\leq j} \binom{j}{k} u^k v^{j-k} \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq k} a(0,j)\frac{u^k}{k!}\frac{v^{j-k}}{(j-k)!}
\end{aligned}$$

$$A(0,*)\circ(u+v) = \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0} a(0,j+k)\frac{u^k}{k!}\frac{v^j}{j!}. \tag{12.7}$$

Proposition 12.3. — *La fonction génératrice exponentielle* (12.6) *de la matrice de Seidel associée à la suite* $(a(n))$ $(n\geq 0)$ *est donnée par :*

$$A(*,*) = e^u\, A(0,*)\circ(u+v). \tag{12.8}$$

Démonstration. — La démonstration de cette proposition est tout à fait semblable à celle de la Proposition 12.1. En effet,

$$\begin{aligned}
A(*,*) &= \sum_{i\geq 0, j\geq 0} a(i,j)\frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!} = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\sum_{0\leq k\leq i}\binom{i}{k} a(0,j+k)\frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!} \\
&= \sum_{j\geq 0}\frac{v^j}{j!}\sum_{i\geq 0}\sum_{0\leq k\leq i}\binom{i}{k}a(0,j+k)\frac{u^i}{i!} = \sum_{j\geq 0}\frac{v^j}{j!}\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq k}\binom{i}{k}a(0,j+k)\frac{u^i}{i!} \\
&= \sum_{j\geq 0}\frac{v^j}{j!}\sum_{k\geq 0} a(0,j+k)u^k \sum_{l\geq 0}\binom{l+k}{k}\frac{u^l}{(l+k)!} \\
&= \sum_{j\geq 0}\frac{v^j}{j!}\sum_{k\geq 0} a(0,j+k)\frac{u^k}{k!}\sum_{l\geq 0}\frac{u^l}{l!} = e^u \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0} a(0,j+k)\frac{u^k}{k!}\frac{v^j}{j!},
\end{aligned}$$

ce qui établit (12.8) en se reportant à la formule (12.7). □

13. L'exponentielle d'une série formelle

La *série exponentielle* est définie comme

$$\exp u = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!},$$

dans toute algèbre $\Omega[[u]]$, où Ω est un corps ou un anneau de polynômes à coefficients dans un corps. Si b est une série *sans terme constant*, la substitution de b dans $\exp u$ définit l'*exponentielle* de b, à savoir

$$\exp b = \sum_{n\geq 0} \frac{b^n}{n!}.$$

13.1. *La formule fondamentale de l'exponentielle.* — Le coefficient de u^n dans $\exp b$ est en fait égal au coefficient de u^n dans la somme *finie*

$$1 + \frac{b}{1!} + \cdots + \frac{b^n}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

En particulier, si a et b sont sans terme constant, le coefficient $c(n)$ de u^n dans la série $\exp a \cdot \exp b$ est égal au coefficient de u^n dans le produit

$$\Bigl(1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\Bigr)\Bigl(1 + \frac{b}{1!} + \cdots + \frac{b^n}{n!}\Bigr).$$

Or ce produit peut s'écrire

$$1+\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{ab}{1!\,1!}+\frac{b^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\frac{a^{n-1}b}{(n-1)!\,1!}+\cdots+\frac{ab^{n-1}}{1!\,(n-1)!}+\frac{b^n}{n!}+r_n,$$

où r_n est une série formelle d'ordre supérieur à n. Par la formule du binôme, ce produit est donc égal à :

$$1 + \frac{a+b}{1!} + \frac{(a+b)^2}{2!} + \cdots + \frac{(a+b)^n}{n!} + r_n.$$

Le coefficient $c(n)$ est donc égal au coefficient de u^n dans $\exp(a+b)$ pour tout $n \geq 0$. On a ainsi établi la formule fondamentale de l'exponentielle :

$$\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b. \tag{13.1}$$

13.2. *La bijection* exp. — Le but est maintenant d'établir des conditions pour que la fonction génératrice exponentielle d'une suite $(a(n))$ $(n \geq 0)$

soit l'exponentielle d'une fonction génératrice exponentielle d'une suite $(b(n))$ $(n \geq 0$ (avec $b(0) = 0)$. En d'autres termes, si l'on a

$$a = \sum_{n\geq 0} a(n)\frac{u^n}{n!}, \qquad b = \sum_{n\geq 0} b(n)\frac{u^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad a = \exp b,$$

le problème est d'établir des identités qui relient les coefficients $a(n)$ aux coefficients $b(n)$. On a d'abord $a(0) = 1$. Exprimons les autres coefficients $a(n)$ $(n \geq 1)$ en fonction des $b(n)$. Pour tout $n \geq 1$, notons b_n le polynôme

$$b_n = \sum_{1\leq j\leq n} b(j)\frac{u^j}{j!}.$$

Comme la série $b - b_n = \sum_{j\geq n+1} b(j)u^j/j!$ est d'ordre supérieur à n, la série $\exp(b - b_n) - 1$ est aussi d'ordre supérieur à n et a fortiori le produit

$$\exp b_n \cdot \bigl(\exp(b - b_n) - 1\bigr).$$

D'après (13.1), ce dernier produit est égal à $\exp b - \exp b_n$. Par conséquent, le coefficient de u^n dans les deux séries $\exp b$ et $\exp b_n$ est le même. Or, comme la série b_n ne comporte qu'un nombre fini de termes, on a d'après (13.1)

$$\begin{aligned}\exp b_n &= \exp\Bigl(\sum_{1\leq j\leq n} b(j)\frac{u^j}{j!}\Bigr) = \prod_{1\leq j\leq n} \exp\Bigl(b(j)\frac{u^j}{j!}\Bigr)\\ &= \prod_{1\leq j\leq n}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\Bigl(b(j)\frac{u^j}{j!}\Bigr)^m = \prod_{1\leq j\leq n}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\Bigl(\frac{b(j)}{j!}\Bigr)^m u^{jm}.\end{aligned}$$

D'après la propriété de distributivité des séries formelles, on a :

$$\exp b_n = \sum_{m_1,\ldots,m_n\geq 0}\ \prod_{1\leq j\leq n}\frac{1}{m_j!}\Bigl(\frac{b(j)}{j!}\Bigr)^{m_j} u^{jm_j}.$$

Le coefficient de u^n dans $\exp b_n$ (donc aussi dans $\exp b$) est donc égal à

$$\frac{a(n)}{n!} = \sum \prod_{1\leq j\leq n}\frac{1}{m_j!}\Bigl(\frac{b(j)}{j!}\Bigr)^{m_j}, \tag{13.2}$$

où la sommation est étendue à toutes les suites $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ d'entiers positifs tels que

$$1\cdot m_1 + 2\cdot m_2 + \cdots + n\cdot m_n = n.$$

Théorème 13.1. — *L'exponentielle est une bijection de l'ensemble des séries formelles sans terme constant sur l'ensemble des séries de terme constant égal à 1. Soient a et b les séries formelles*

$$a = 1 + \sum_{n\geq 1} a(n)\frac{u^n}{n!} \qquad et \qquad b = \sum_{n\geq 1} b(n)\frac{u^n}{n!}.$$

Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$a = \exp b\,; \tag{13.3}$$

$$\frac{a(n)}{n!} = \sum \prod_{1\leq j\leq n} \frac{1}{m_j!}\Bigl(\frac{b(j)}{j!}\Bigr)^{m_j} \qquad (n\geq 1), \tag{13.4}$$

où la sommation est étendue à l'ensemble des suites $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ d'entiers positifs tels que $1.m_1 + 2.m_2 + \cdots + n.m_n = n$;

$$a(n) = b(n) + \sum_{1\leq i\leq n-1} \binom{n-1}{i} a(i)b(n-i) \qquad (n\geq 1). \tag{13.5}$$

Démonstration. — Soit $a = 1 + \sum_{n\geq 1} a(n)u^n/n!$ une série de terme constant égal à 1. Pour que a soit l'exponentielle d'une série $b = \sum_{n\geq 1} b(n)u^n/n!$, il faut et il suffit que la relation (13.2) soit vérifiée pour tout $n\geq 1$, c'est-à-dire, que l'on ait $a(1) = b(1)$ et pour tout $n\geq 2$ l'identité

$$\frac{a(n)}{n!} = \frac{b(n)}{n!} + \sum \prod_{1\leq j\leq n-1} \frac{1}{m_j!}\Bigl(\frac{b(j)}{j!}\Bigr)^{m_j},$$

où la dernière sommation est étendue à l'ensemble de toutes les suites $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$ d'entiers positifs tels que $1.m_1 + 2.m_2 + \cdots + (n-1).m_{n-1} = n$. Les relations précédentes entraînent que, si la suite $(a(n))$ $(n\geq 1)$ est donnée, la suite $(b(n))$ $(n\geq 1)$ est déterminée de façon unique par récurrence sur n. Il existe donc une et une seule série b telle que $a = \exp b$. Ceci prouve la première partie du théorème et l'équivalence de (13.3) et de (13.4).

D'autre part, par dérivation de l'équation (13.3), on obtient $a' = \exp b\cdot b' = a\cdot b'$, soit

$$\sum_{n\geq 1} a(n)\frac{u^{n-1}}{(n-1)!} = \Bigl(1 + \sum_{i\geq 1} a(i)\frac{u^i}{i!}\Bigr)\Bigl(\sum_{j\geq 1} b(j)\frac{u^{j-1}}{(j-1)!}\Bigr).$$

En prenant le coefficient de u^{n-1} $(n\geq 1)$ dans les deux membres, on trouve

$$\frac{a(n)}{(n-1)!} = \frac{b(n)}{(n-1)!} + \sum_{\substack{i+j-1=n-1\\ i\geq 1,\, j\geq 1}} \Bigl(\frac{a(i)}{i!}\Bigr)\Bigl(\frac{b(j)}{(j-1)!}\Bigr),$$

soit en posant $k = j-1$

$$a(n) = b(n) + \sum_{\substack{i+k=n-1\\ i\ge 1,\, k\ge 0}} \binom{n-1}{i} a(i)b(k+1).$$

D'où (13.3) implique (13.4). Réciproquement, si la suite $(a(n))$ $(n \ge 1)$ est donnée, la relation (13.5) détermine par récurrence sur n la suite $(b(n))$ $(n \ge 1)$ de façon unique. □

13.3. *La fonction logarithmique.* — L'application inverse de l'exponentielle est appelée *fonction logarithmique*, encore notée "log". Elle envoie donc les séries formelles de terme constant égal à 1 sur les séries formelles sans terme constant. Si a_1 et a_2 sont des séries de terme constant égal à 1, il existe deux séries b_1 et b_2 sans terme constant telles que $a_1 = e^{b_1}$ et $a_2 = e^{b_2}$. D'après (13.1) on a donc : $\log\bigl(a_1 \cdot a_2\bigr) = \log(e^{b_1} \cdot e^{b_2}) = \log(e^{b_1+b_2}) = b_1 + b_2 = \log a_1 + \log a_2$. On retrouve la formule

$$\log(a_1 \cdot a_2) = \log a_1 + \log a_2, \tag{13.6}$$

valable pour les séries *de terme constant égal à* 1. Une telle série est inversible. En remplaçant a_2 par a_1^{-1} et en notant que $\log 1 = 0$, on obtient :

$$\log a_1^{-1} = -\log a_1. \tag{13.7}$$

Pour obtenir le développement de la série $\log(1+u)$, il suffit d'utiliser la formule (13.5). En effet, $\log(1+u) = b$ si et seulement si $1+u = e^b$. Avec $a(0) = a(1) = 1$ et $a(n) = 0$, la formule (13.5) entraîne $b(1) = a(1) = 1$ et pour $n \ge 2$ l'équation : $0 = b(n) + (n-1)b(n-1)$. D'où $b(n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ pour $n \ge 1$. On obtient donc le développement

$$\log(1+u) = \sum_{n\ge 1} (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} \tag{13.8}$$

et en utilisant (13.7) le développement :

$$\log((1-u)^{-1}) = \sum_{n\ge 1} \frac{u^n}{n}. \tag{13.9}$$

13.4. *Les polynômes exponentiels.* — Une manière d'exprimer plusieurs énoncés de comptage est de faire appel aux *polynômes exponentiels*. On les introduit comme suit. Soit Ω l'anneau des polynômes à coefficients rationnels et en une infinité dénombrable d'indéterminées notées t_1, t_2, … L'exponentielle de la série formelle $\sum_{n\ge 1} t_n u^n/n!$ s'écrit :

$$1 + \sum_{n\ge 1} Y_n \frac{u^n}{n!} = \exp \sum_{n\ge 1} t_n \frac{u^n}{n!}.$$

Les polynômes Y_n $(n \geq 1)$ définis par cette relation s'appellent *polynômes exponentiels*. D'après le précédent théorème, on a :

$$Y_n = \sum_{1.m_1+\cdots+n.m_n=n} \frac{n!}{\prod\limits_{1\leq j\leq n} j!^{m_j} m_j!} \prod_{1\leq j\leq n} t_j^{m_j} \qquad (n \geq 1).$$

Le polynôme Y_n ne dépend donc que des n variables $t_1,\ t_2,\ \ldots\ ,\ t_n$. D'autre part, le coefficient $n!\,/\prod_{1\leq j\leq n} j!^{m_j} m_j!$ est égal au nombre de partitions de l'ensemble $[\,n\,]$ en $m_1+\cdots+m_n$ sous-ensembles non vides parmi lesquels m_1 sont de cardinal 1, $\ldots$, m_n de cardinal n. Les polynômes $Y_n = Y_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ sont donc *à coefficients entiers positifs.* Les premières valeurs sont données par :

$$Y_1 = t_1\,; \qquad Y_2 = t_1^2 + t_2\,; \qquad Y_3 = t_1^3 + 3t_1t_2 + t_3\,;$$
$$Y_4 = t_1^4 + 6t_1^2t_2 + 3t_2^2 + 4t_1t_3 + t_4.$$

Remarque. — La propriété de l'exponentielle (13.1) sert souvent dans les calculs, même sous la simple forme $e^u \cdot e^{-u} = 1$, comme dans l'évaluation suivante. Dans l'algèbre des polynômes en x, le monôme x^n s'écrit, de façon unique, dans la base des polynômes $x(x-1)\cdots(x-k+1)$ $(0 \leq k \leq n)$. On a donc :

$$(13.10)\quad x^n = \sum_{0\leq k\leq n} S(n,k)\,x(x-1)\cdots(x-k+1) = \sum_{0\leq k\leq n} k!\,S(n,k)\binom{x}{k},$$

pour des coefficients bien déterminés $S(n,k)$, appelés *nombre de Stirling de seconde espèce* (*cf.* chap. 3, § 2). Remplaçons x par un certain entier $j \geq 0$, multiplions l'identité par $u^j/j!$ et sommons par rapport à j. Nous obtenons :

$$\sum_{j\geq 0} j^n \frac{u^j}{j!} = \sum_{j\geq 0} \frac{u^j}{j!} \sum_{0\leq k\leq j} k!\,S(n,k)\binom{j}{k} = \sum_{k\geq 0} k!\,S(n,k) \sum_{j\geq k} \binom{j}{k}\frac{u^j}{j!}$$
$$= \sum_{k\geq 0} S(n,k)u^k \sum_{j\geq k} \frac{u^{j-k}}{(j-k)!} = e^u \sum_{k\geq 0} S(n,k)u^k.$$

D'où $e^{-u}\sum_{j\geq 0} j^n \dfrac{u^j}{j!} = \sum_{k\geq 0} S(n,k)u^k$ et donc $S(n,k) = \sum_{l+j=k} \dfrac{(-1)^l}{l!}\dfrac{j^n}{j!}$. Soit

$$(13.11)\qquad k!\,S(n,k) = \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n.$$

On obtient ainsi, pour les nombres de Stirling $S(n,k)$, la formule *inverse* de (13.10).

14. Produits et composés partitionnels

Le problème posé dans ce paragraphe est le suivant : sachant qu'une série a est la fonction génératrice d'une suite de polynômes générateurs d'ensembles A_n ($n \geq 0$) par un poids donné w, trouver ou caractériser la suite d'ensembles (B_n) et le poids w' pour que la série $f \circ a$ soit la fonction génératrice de la suite des polynômes générateurs des B_n par le poids w'. Nous nous limiterons aux cas où $f(u)$ est l'une des trois séries $(1-u)^{-1}$, $\exp u$, $\log(1-u)^{-1}$.

14.1. *Familles cardinal-compatibles.* — Soit $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et soit $S = (S_I)$ ($I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$) une famille d'ensembles finis. On suppose que, pour tout $I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, chaque élément $s \in S_I$ est muni d'un *poids* $w(s)$ ayant la propriété suivante : si $\operatorname{card} I = i$, il existe une bijection $\phi_I : S_I \to S_{[i]}$ telle que $w = w \circ \phi_I$. Ceci implique que S_I et $S_{[i]}$ ont même cardinal et que les polynômes générateurs $\sum_{s \in S_I} w(s)$ et $\sum_{s \in S_{[i]}} w(s)$ sont identiques. On dit que la famille $S = (S_I)$ est munie d'un poids *cardinal-compatible* ou encore que le couple (S, w) est une *famille cardinal-compatible*.

La donnée de la suite des polynômes générateurs

$$a(n) := \sum_{s \in S_{[n]}} w(s) \qquad (n \geq 0)$$

suffit à connaître tous les autres polynômes générateurs $\sum\limits_{s \in S_I} w(s)$. La série formelle

$$a := \sum_{n \geq 0} u^n \, \frac{a(n)}{n!}$$

est appelée *fonction génératrice exponentielle de la famille S par le poids w* ou encore *fonction génératrice exponentielle de (S, w)*.

14.2. *Somme de familles cardinal-compatibles.* — Supposons données deux familles $S = (S_I)$ et $S' = (S'_I)$, munies respectivement de deux poids cardinal-compatibles w et w' prenant leurs valeurs dans le même anneau. Soient a, b leurs fonctions génératrices exponentielles respectives. Il est évident que la *somme* $a + b$ des deux séries a, b est la fonction génératrice exponentielle de la famille $S'' = (S''_I)$, munie du poids cardinal-compatible w'', où S''_I et w'' sont ainsi définis :

(1) pour tout $I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ le symbole S''_I est la *somme disjointe* $S_I + S'_I$;

(2) $w''(s'') := \begin{cases} w(s''), & \text{si } s'' \in S_I\,; \\ w'(s''), & \text{si } s'' \in S'_I. \end{cases}$

La famille (S'', w'') est appelée *somme* des familles (S, w) et (S', w'). On écrit

$$S'' := S + S' \quad \text{et aussi} \quad (S'', w'') := (S, w) + (S', w'). \tag{14.1}$$

Exemple. — Pour tout $I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, notons S_I l'ensemble des permutations circulaires de I et pour tout $s \in S_I$, posons $w(s) := \beta$. Par convention, posons $S_\emptyset = \emptyset$. Pour $n \geq 1$, on a $a(n) = \sum_{s \in S_{[n]}} w(s) = \beta\,(n-1)!$, de sorte que la famille cardinal-compatible $((S_I), w)$ a pour fonction génératrice exponentielle $a = \sum\limits_{n\geq 1} u^n\, a(n)/n! = \beta \sum\limits_{n \geq 1} u^n/n = \beta \log(1-u)^{-1}$.

Notons maintenant S'_I l'ensemble des *ordres linéaires* sur I, c'est-à-dire des suites $(i_1, \ldots, i_{|I|})$ des $|I|$ éléments de I. Il y a évidemment $|I|!$ tels ordres linéaires. Par convention, posons $S'_\emptyset = \emptyset$. Donnons à tout ordre linéaire s' le poids $w'(s') := Y$. La fonction génératrice exponentielle b de la famille compatible $((S'_I), w')$ est égale à $b = Y \sum\limits_{n \geq 1} u^n = Yu\,(1-u)^{-1}$.

On dit qu'une injection d'un ensemble fini dans un sur-ensemble fini est *connexe*, si le graphe de cette injection ne comporte qu'une composante connexe. Cette composante ne peut être qu'un cycle ou un chemin linéaire, qu'on peut identifier à un ordre linéaire. La somme des familles cardinal-compatibles $((S_I), w)$ et $((S'_I), w')$ n'est ainsi que la famille de toutes les injections *connexes* d'ensembles finis dans des sur-ensembles finis. Sa fonction génératrice exponentielle est égale à $\beta \log(1-u)^{-1} + Yu\,(1-u)^{-1}$.

14.3. *Produit partitionnel.* — Le *produit partitionnel* de deux familles cardinal-compatibles (S, w) et (S', w') est défini comme étant le couple (S'', w''), où $S'' = (S''_I)$ et w'' sont définis comme suit :

(1) pour tout $I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, le symbole S''_I désigne l'ensemble de tous les quadruplets (J, K, s, s') tels que (J, K) est une partition ordonnée de I et tels que $s \in S_J$, $s' \in S'_K$.

(2) $w''(J, K, s, s') := w(s)w'(s')$.

On vérifie que la famille (S'', w'') ainsi définie est elle aussi cardinal-compatible. On écrit

$$S'' := S \times S' \quad \text{et aussi} \quad (S'', w'') := (S, w) \times (S', w'). \tag{14.2}$$

Proposition 14.1. — *Soient (S, w) et (S', w') deux familles cardinal-compatibles, de fonctions génératrices exponentielles a et b, respectivement. Alors le produit partitionnel des deux familles a pour fonction génératrice exponentielle le produit $a \cdot b$ des deux séries.*

Démonstration. — Notons $c = \sum\limits_{n \geq 0} u^n\, c(n)/n!$ la fonction génératrice exponentielle du produit partitionnel (S'', w'') des deux familles. Alors

$$S''_{[n]} = \{(J, K, s, s') : J + K = [n],\ s \in S_J,\ s' \in S'_K\},$$

d'où

$$\begin{aligned}
c(n) &= \sum_{(J,K,s,s')} w''(J,K,s,s') = \sum_{J+K=[n]} \ \sum_{s\in S_J, s'\in S'_K} w(s)w'(s') \\
&= \sum_{j+k=n} \ \sum_{\substack{|J|=j,|K|=k \\ J+K=[n]}} \Big(\sum_{s\in S_J} w(s)\Big)\Big(\sum_{s'\in S'_K} w'(s')\Big) \\
&= \sum_{j+k=n} \ \sum_{\substack{|J|=j,|K|=k \\ J+K=[n]}} \Big(\sum_{s\in S_{[j]}} w(s)\Big)\Big(\sum_{s'\in S'_{[k]}} w'(s')\Big) \\
&= \sum_{j+k=n} \binom{n}{j} a(j)\, b(k),
\end{aligned}$$

qui est bien le coefficient de $u^n/n!$ dans le produit des deux séries $\sum_{j\geq 0} a(j)\, u^j/j!$, $\sum_{k\geq 0} b(k)\, u^k/k!$ □

Exemple. — Une involution d'un ensemble fini I est caractérisée par un quadruplet (J, K, s, s'), où $J + K$ est une partition ordonnée de I et où s est l'application identique de J (un ensemble de $|J|$ points fixes) et s' une involution de K sans point fixe. Formons la famille $((S_I), w)$, où, pour tout I, l'ensemble S_I ne contient que l'application identique s de I sur lui-même et où l'on définit $w(s) := x^{|I|}$. Formons également $((S'_I), w')$, où S'_I se compose des involutions sans point fixe de I et où, lorsque I est pair et $s' \in S'_I$, on désigne par $\operatorname{trans} s'$ le nombre de transpositions de s' (qui vaut $|I|/2$) et l'on pose $w'(s') = y^{\operatorname{trans} s'}$. Lorsque I est vide, on convient que S'_I est réduit à un élément de poids 1.

Or lorsque $|I| = 2n$, un simple comptage donne : $|S'_I| = (2n-1)!! = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) = (2n)!/(2^n\, n!)$, de sorte que la fonction génératrice exponentielle de $((S'_I), w')$ est égale à $b = \sum\limits_{n\geq 0} (yu^2)^n\, ((2n)!/(2^n\, n!))(1/(2n)!) = \sum\limits_{n\geq 0} (yu^2)^n/(2^n\, n!) = \exp(yu^2/2)$.

Comme la fonction génératrice exponentielle de $((S_I), w)$ est égale à $a = \exp xu$, on voit que le produit partitionnel des familles $((S_I), w)$ et $((S'_I), w')$ a pour fonction génératrice exponentielle $\exp(xu + yu^2/2)$. Le coefficient de u^n de cette série produit n'est autre que le polynôme

$$H_n(x, y) = \sum_{\sigma\in\mathcal{I}_n} x^{\operatorname{fix}\sigma} y^{\operatorname{trans}\sigma},$$

où $\mathcal{I}_n$ désigne l'ensemble des involutions de $[\,n\,]$ et où $\operatorname{fix}\sigma$ désigne le nombre de points fixes de l'involution σ (*cf.* Exercice 16).

On peut naturellement considérer le produit de r familles cardinal-compatibles pour $r \geq 2$. On peut également prendre le produit de r copies de la même famille cardinal-compatible (S, w), de fonction génératrice exponentielle a. Notons $(S, w)^r$ un tel produit. Sa fonction génératrice exponentielle est évidemment a^r.

14.4. *Les coefficients multinomiaux.* — Avant de parler de composés partitionnels, il est bon de rappeler quelques dénombrements concernant les coefficients multinomiaux. Supposons donnés deux entiers n et r tels que $1 \leq r \leq n$, ainsi qu'une suite d'entiers $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ satisfaisant à :

$$(14.3) \qquad n_1 \geq 0,\, n_2 \geq 0,\, \ldots\,,\, n_r \geq 0 \quad \text{et} \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

Un *coefficient multinomial* est un nombre de la forme : $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_r!}$. On le note : $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Lorsque $r = 2$, on a $n_1 + n_2 = n$ et on retrouve naturellement le coefficient binomial $\dbinom{n}{n_1} = \dfrac{n!}{n_1!\,(n - n_1)!}$.

PROPOSITION 14.2. — *Le nombre de suites de longueur n, contenant n_1 fois 1, n_2 fois 2, …, n_r fois r, les n_i satisfaisant les relations* (14.3), *est égal au coefficient multinomial* $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Démonstration. — Notons $C(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ l'ensemble des suites contenant exactement n_1 fois 1,… , n_r fois r, puis considérons la suite

$$a = (1_1, 1_2, \ldots, 1_{n_1}, 2_1, 2_2, \ldots, 2_{n_2}, \ldots, r_1, r_2, \ldots, r_{n_r}),$$

de longueur $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ et désignons par A l'ensemble des $n!$ réarrangements (permutations) de a.

Prenons un réarrangement b de la suite a et lisons les termes de ce réarrangement b de la gauche vers la droite en écrivant d'abord les indices i_k des lettres 1_{i_k}. On obtient une permutation $\sigma_1 = (i_1, i_2, \ldots, i_{n_1})$, de longueur n_1. De même, la lecture des indices des lettres 2_{j_k}, de la gauche vers la droite, fournit une permutation $\sigma_2 = (j_1, j_2, \ldots, j_{n_2})$, de longueur n_2, et ainsi de suite… Prenons note de ces r permutations σ_1, σ_2, … , σ_r et effaçons tous les indices dans la suite b. On obtient une suite c de l'ensemble $C(n_1, \ldots, n_r)$. Il est clair que l'application qui envoie b sur $(c; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ est bijective. En fait, $(c; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ est un simple codage de la suite b. Or le nombre des suites $(c; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ est égal à $|C(n_1, \ldots, n_r)|\; n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_r!$ Comme $|A| = n!$, on obtient bien la formule annoncée. $\square$

Définition. — Soient r, n deux entiers positifs satisfaisant $0 \leq r \leq n$ et $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ une suite d'entiers positifs satisfaisant $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = r$ et $1.m_1 + 2.m_2 + \cdots + n.m_n = n$. On dit qu'une partition non ordonnée $\{I_1, I_2, \ldots, I_r\}$ (resp. une partition ordonnée $(I_1, I_2, \ldots, I_r)$) de l'ensemble $[\,n\,]$ est *de type* $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, si elle est formée de r blocs, dont m_1 sont de cardinal 1, m_2 de cardinal 2, ... , m_n de cardinal n.

PROPOSITION 14.3. — *Le nombre de partitions ordonnées de l'ensemble $[\,n\,]$ de type $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ est égal à*

$$\binom{r}{m_1, m_2, \ldots, m_n}\binom{n}{1,\ldots,1,2,\ldots,2,\ldots,n,\ldots,n} = \frac{r!\,n!}{m_1!\,m_2!\,\cdots m_n!\,(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\cdots(n!)^{m_n}};$$

le nombre de partitions non ordonnées à :

$$\frac{1}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!}\binom{n}{1,\ldots,1,2,\ldots,2,\ldots,n,\ldots,n} = \frac{n!}{m_1!\,m_2!\,\cdots m_n!\,(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\cdots(n!)^{m_n}}.$$

Démonstration. — Considérons les $r = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ lettres distinctes 1_1, 1_2, ... , 1_{m_1}, 2_1, 2_2, ... , 2_{m_2}, ... , n_1, n_2, ... n_{m_n} et l'ensemble $C(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n})$ de toutes les suites, de longueur $1.m_1 + 2.m_2 + \cdots + n.m_n = n$, contenant *une fois* chaque lettre de la forme 1_j, *deux fois* chaque lettre de la forme 2_j, ... , n *fois* chaque lettre de la forme n_j.

D'après la précédente Proposition, le cardinal de $C(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n})$ est égal au coefficient multinomial $\binom{n}{1,\ldots,1,2,\ldots,2,\ldots,n,\ldots,n}$. De même, l'ensemble $C(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ de toutes les suites contenant m_1 fois la lettre 1, m_2 fois la lettre 2, ... , m_n fois la lettre n, a pour cardinal $\binom{r}{m_1,m_2,\ldots,m_n}$.

Soit $\mathcal{P}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ l'ensemble des partitions ordonnées de type $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. On définit une bijection $(I_1, \ldots, I_r) \mapsto (a, b)$ de $\mathcal{P}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ sur $C(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n}) \times C(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ de la façon suivante : d'abord $a := |I_1|, |I_2|, \ldots, |I_r|$; ensuite, si l'élément $i \in [\,n\,]$ se trouve dans le $j^{\text{ième}}$ bloc de taille k, on pose $b_i := k_j$.

Le second dénombrement est évident, puisque partant d'une partition non ordonnée ayant r blocs, on peut construire exactement $r!$ partitions ordonnées en permutant les r blocs. □

14.5. *Les composés partitionnels.* — Supposons que la famille $S = (S_I)$ est telle que $S_\emptyset = \emptyset$. La fonction génératrice exponentielle a du couple (S, w) a donc un terme constant nul. Nous introduisons trois composés partitionnels : le composé partitionnel *non abélien* noté $(S^{(\times)}, w^{(\times)})$, le composé partitionnel *abélien* noté $(S^{(+)}, w^{(+)})$ et le composé partitionnel *circulaire* noté $(S^{(\circ)}, w^{(\circ)})$.

Si $\{I_1, I_2, \ldots, I_r\}$ est une partition (non ordonnée) de l'ensemble $I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ en blocs *non vides*, alors pour toute suite $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ telle que

$s_1 \in S_{I_1}$, $s_2 \in S_{I_2}$, ... , $s_r \in S_{I_r}$, les r couples (I_1, s_1), (I_2, s_2), ... , (I_r, s_r) sont *distincts.* A l'*ensemble* formé par ces r couples, on peut donc faire correspondre $r!$ *suites* ordonnées $((I_{i_1}, s_{i_1}), (I_{i_2}, s_{i_2}), \ldots, (I_{i_r}, s_{i_r}))$. Lorsque l'on convient que (I_{i_1}, s_{i_1}) est aussi le successeur de (I_{i_r}, s_{i_r}) dans la suite précédente, on définit un *collier.* A tout collier de longueur r correspondent donc exactement r suites ordonnées.

On appelle *composé partitionnel non abélien* (resp. *abélien*, resp. *circulaire*) de la famille cardinal-compatible (S, w) la famille $(S^{(\times)}, w^{(\times)})$ (resp. $(S^{(+)}, w^{(+)})$, resp. $(S^{(\circ)}, w^{(\circ)})$) où $S_I^{(\times)}$ (resp. $S^{(+)}$, resp. S°)) et le poids $w^{(\times)}$ (resp. $w^{(+)}$, resp. $w^{(\circ)}$) sont ainsi définis :

(1) pour tout $I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, le symbole $S_I^{(\times)}$ (resp. $S_I^{(+)}$, resp. $S_I^{(\circ)}$) désigne l'ensemble de tous les couples (r, θ) pour lesquels $r \geq 1$ et θ est une *suite ordonnée* (resp. un *ensemble*, resp. un *collier*) de r couples (forcément distincts) (s_1, I_1), (s_2, I_2), ... , (s_r, I_r) tels que $\{I_1, I_2, \ldots, I_r\}$ est une partition de I et $s_1 \in S_{I_1}$, $s_2 \in S_{I_2}$, ... , $s_r \in S_{I_r}$;

(2) $w^{(\times)}(r, \theta) := w^{(+)}(r, \theta) := w^{(\circ)}(r, \theta) := w(s_1)w(s_2) \cdots w(s_r)$;

(3) pour $I = \emptyset$, on convient que $S_I^{(\times)}$ (resp. $S_I^{(+)}$) contient un seul élément dont le poids est 1 et que $S_I^{(\circ)}$ est vide.

Pour tout $n \geq 1$, posons

$$b(n) := \sum_{(r,\theta) \in S_{[n]}^{(\times)}} w^{(\times)}(r, \theta); \quad b := \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} b(n);$$

$$c(n) := \sum_{(r,\theta) \in S_{[n]}^{(+)}} w^{(+)}(r, \theta); \quad c := \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} c(n);$$

$$d(n) := \sum_{(r,\theta) \in S_{[n]}^{(\circ)}} w^{(\circ)}(r, \theta); \quad d := \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} d(n).$$

PROPOSITION 14.4. — *On a les identités :*

$$b = (1 - a)^{-1}; \tag{14.4}$$

$$c = \exp a; \tag{14.5}$$

$$d = \log(1 - a)^{-1}. \tag{14.6}$$

Démonstration. — Pour $r, n \geq 1$, considérons la somme

$$\begin{aligned} T(r, n) &:= \sum_{\substack{(I_1, \ldots, I_r) \\ s_1 \in S_{I_1}, \ldots, s_r \in S_{I_r}}} w(s_1) \cdots w(s_r) \\ &= \sum_{(I_1, \ldots, I_r)} a(|I_1|) \cdots a(|I_r|) \end{aligned}$$

faite sur les partitions *ordonnées* $(I_1,\dots,I_r)$ telles que $I_1+\cdots+I_r=[\,n\,]$. On peut la récrire

$$T(r,n)=\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=r}}\ \sum_{\substack{(I_1,\dots,I_r)\\ I_1+\cdots+I_r=[\,n\,]}} a(|I_1|)\cdots a(|I_r|),$$

où la première sommation est sur les suites d'entiers positifs $(m_1,\dots,m_n)$ telles que $m_1+\cdots+m_n=r$ et $1.m_1+\cdots+n.m_n=n$. Or les suites $(I_1\dots,I_r)$ dans la seconde sommation contiennent exactement m_1 blocs de cardinal $1,\dots$, m_n blocs de cardinal n. Comme w est cardinal-compatible, on a encore

$$T(r,n)=\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=r}}\ \sum_{\substack{(I_1\dots,I_r)\\ I_1+\cdots+I_r=[\,n\,]}} a(1)^{m_1}\cdots a(n)^{m_n},$$

soit, d'après la Proposition 14.3,

$$T(r,n)=\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=r}} \frac{r!\,n!}{m_1!\cdots m_n!\,(1!)^{m_1}\cdots(n!)^{m_n}}a(1)^{m_1}\cdots a(n)^{m_n},$$

ou encore

$$\frac{T(r,n)}{n!}=\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=r}} \frac{r!}{m_1!\dots m_n!}\Big(\frac{1}{1!}a(1)\Big)^{m_1}\cdots\Big(\frac{1}{n!}a(n)\Big)^{m_n},$$

qui est le coefficient de $\dfrac{u^n}{n!}$ dans $\Big(a(1)\dfrac{u}{1!}+\cdots+a(n)\dfrac{u^n}{n!}\Big)^r$. Donc $\dfrac{b(n)}{n!}=\displaystyle\sum_{r\geq1}\frac{T(r,n)}{n!}$ est le coefficient de $\dfrac{u^n}{n!}$ dans $(1-a)^{-1}$.

De même,

$$\begin{aligned}\frac{c(n)}{n!}&=\frac{1}{n!}\sum_{r\geq1}\frac{1}{r!}T(r,n)\\ &=\sum_{(m_1,\dots,m_r)}\frac{1}{m_1!}\Big(\frac{1}{1!}a(1)\Big)^{m_1}\cdots\frac{1}{m_n!}\Big(\frac{1}{n!}a(n)\Big)^{m_n},\end{aligned}$$

qui d'après le Théorème 13.1 (formule 13.4) montre que l'on a bien $c=\exp a$.

Enfin, $\dfrac{1}{r}\dfrac{T(r,n)}{n!}$ est le coefficient de $\dfrac{u^n}{n!}$ dans $\dfrac{1}{r}\Big(a(1)\dfrac{u}{1!}+\cdots+a(n)\dfrac{u^n}{n!}\Big)^r$. Donc $\dfrac{d(n)}{n!}=\displaystyle\sum_{r\geq1}\frac{1}{r}\frac{T(r,n)}{n!}$ est le coefficient de $\dfrac{u^n}{n!}$ dans $\displaystyle\sum_{r\geq1}\frac{1}{r}a^r=\log(1-a)^{-1}$. $\square$

COROLLAIRE 14.5. — *On a l'identité*

$$\sum_{n\ge 0}\frac{u^n}{n!}\sum_{(r,\theta)\in S^{(+)}_{[n]}}(-1)^r\,w^{(+)}(r,\theta)=\Bigl(\sum_{n\ge 0}\frac{u^n}{n!}\sum_{(r,\theta)\in S^{(+)}_{[n]}}w^{(+)}(r,\theta)\Bigr)^{-1}. \tag{14.7}$$

Démonstration. — En prenant le poids $-w$ au lieu de w, le poids d'un couple $(r,\theta)\in S^{(+)}$ devient $(-1)^r\,w(r,\theta)$ et la fonction génératrice exponentielle du composé partitionnel de $(S,-w)$ vaut $\exp(-a)=(\exp a)^{-1}=c^{-1}$. $\square$

Plusieurs exemples de composés partitionnels sont donnés dans les deux paragraphes suivants avec les composés partitionnels des permutations et des endofonctions.

15. Le composé partitionnel des permutations

Pour tout $I\in\mathcal{F}(\mathbb{N})$ non vide, on note $\mathfrak{S}_I$ l'ensemble des permutations de I et naturellement seulement $\mathfrak{S}_n$ lorsque $I=[\,n\,]$. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_I$. On dit que deux éléments x, y de I appartiennent à la même orbite de σ si l'on a $y=\sigma^k(x)$ pour un certain entier $k\ge 0$. Soient I_1, I_2, ... , I_r les orbites de σ. La collection $\{I_1,I_2,\dots,I_r\}$ est une partition de I. Pour tout $j=1,2,\dots,r$ la restriction de σ au bloc I_j est une permutation *circulaire* de I_j, ce qui signifie que si $|I_j|=n_j$ et si $x\in I_j$, les éléments x, $\sigma(x)$, $\sigma^2(x)$, ... , $\sigma^{n_j-1}(x)$ sont tous distincts. Notons τ_j la restriction de σ à I_j et aussi $\overline{\tau}_j$ la permutation de I égale à τ_j sur I_j et à l'identité sur $I\setminus I_j$. On dit que $\overline{\tau}_j$ est un *cycle* de la permutation σ et que sa *longueur* est égale à n_j $(j=1,2,\dots,r)$. La permutation σ est alors égale au produit (de composition) de ses r cycles pris dans un ordre quelconque.

Pour tout $I\in\mathcal{F}(\mathbb{N})$ non vide, notons maintenant $\mathfrak{C}_I$ l'ensemble des permutations *circulaires* de I. Si w est un poids cardinal-compatible défini pour chaque permutation circulaire, la propriété de la décomposition en cycles disjoints décrite dans le paragraphe précédent entraîne que la famille $((\mathfrak{S}_I),w^{(+)})$ est le composé partitionnel de la famille $((\mathfrak{C}_I),w)$.

15.1. *Le poids-unité.* — Comme poids cardinal-compatible, on peut d'abord prendre $w(\tau)=1$ pour toute permutation circulaire τ. La fonction génératrice exponentielle de la famille $((\mathfrak{C}_I),w)$ s'écrit alors

$$\sum_{n\ge 1}\operatorname{card}\mathfrak{C}_n\,\frac{u^n}{n!}=\sum_{n\ge 1}(n-1)!\,\frac{u^n}{n!}=\sum_{n\ge 1}\frac{u^n}{n}.$$

Comme $\operatorname{card}\mathfrak{S}_n=n!$, la Proposition 14.4 entraîne l'identité

$$\sum_{n\ge 0}n!\,\frac{u^n}{n!}=\exp\sum_{n\ge 1}\frac{u^n}{n},$$

soit

$$(1-u)^{-1} = \exp \sum_{n\ge 1} \frac{u^n}{n}. \tag{15.1}$$

Comme expliqué dans le paragraphe 13.4, le logarithme “log” est la fonction inverse de “exp”. En appliquant “log” aux deux membres de l'identité pécédente, on retrouve le développement obtenu en (13.8), à savoir

$$\log((1-u)^{-1}) = \sum_{n\ge 1} \frac{u^n}{n}. \tag{15.2}$$

On déduit aussi le développement

$$\log(1+u) = \sum_{n\ge 1} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}, \tag{15.3}$$

par les manipulations habituelles sur le logarithme.

Prenons maintenant le poids $w(\tau) = 0$ si τ est l'unique élément de $\mathfrak{C}_I$ lorsque $|I| = 1$ et $w(\tau) = 1$ autrement. Les permutations de poids $w^{(+)}$ non nul sont alors les permutations *sans point fixe*, appelées encore *dérangements*. Pour tout $n \ge 0$, soit d_n le nombre de dérangements dans $\mathfrak{S}_n$. Par convention $d_0 = 1$ et de façon évidente $d_1 = 0$, $d_2 = 1$. La Proposition 14.4 entraîne alors, en utilisant (15.1),

$$\begin{aligned} \sum_{n\ge 0} d_n \frac{u^n}{n!} &= \exp \sum_{n\ge 2} \frac{u^n}{n} \\ &= \exp(-u)\cdot(1-u)^{-1}. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Enfin, prenons un entier $m \ge 1$ et cherchons dans tout groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$ le nombre de solutions de l'équation

$$\sigma^m = \mathrm{Id}. \tag{15.5}$$

Une permutation σ est solution de (15.5) si et seulement si m est un multiple des longueurs de tous les cycles de σ. Il faut se rappeler, en effet, que si τ est une permutation circulaire d'un ensemble de cardinal i, les seuls entiers j satisfaisant $\tau^j = \mathrm{Id}$ sont les multiples de i.

On est donc amené à considérer le poids w défini par $w(\tau) = 1$ si $\tau \in \mathfrak{C}_I$ et $|I|$ divise m et 0 autrement. Pour tout $n \ge 1$, soit $m(n)$ le *nombre* de solutions de (15.5) dans $\mathfrak{S}_n$. On a alors l'identité

$$1 + \sum_{n\ge 1} m(n) \frac{u^n}{n!} = \exp \sum_{n \mid m} \frac{u^n}{n}. \tag{15.6}$$

15.2. *Les longueurs de cycles.* — Prenons le poids $w(\tau) = \alpha$ pour toute permutation circulaire τ. Si σ est une permutation ayant r cycles (ou orbites), son poids vaut alors $w^{(+)}(\sigma) = \alpha^r$. On sait, par ailleurs, que $(\alpha)_n$ est le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par nombre de cycles. On en déduit donc l'identité

$$\sum_{n\geq 0} (\alpha)_n \frac{u^n}{n!} = \exp\Bigl(\alpha \sum_{n\geq 1} \frac{u^n}{n}\Bigr),$$

soit aussi

$$(1-u)^{-\alpha} = \exp(\alpha \,\log(1-u)^{-1}). \tag{15.7}$$

Soit maintenant (t_n) $(n \geq 1)$ une suite infinie d'indéterminées. Pour toute permutation circulaire τ, posons $w(\tau) := t_n$ si τ est la permutation d'un ensemble I de cardinal n. Pour toute permutation σ, on a alors

$$w^{(+)}(\sigma) = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_n^{m_n},$$

si σ a exactement m_j orbites de cardinal j (ou encore m_j cycles de longueur j) pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. En utilisant les polynômes exponentiels Y_n, on voit que $Y_n(t_1, 1!\,t_2, 2!\,t_3, \dots, (n-1)!\,t_n)$ est le *polynôme générateur de* $\mathfrak{S}_n$ *suivant les longueurs de cycles* et qu'on a l'identité

$$\sum_{n\geq 0} Y_n(t_1, 1!\,t_2, 2!\,t_3, \dots, (n-1)!\,t_n) \frac{u^n}{n!} = \exp \sum_{n\geq 1} t_n \,\frac{u^n}{n}. \tag{15.8}$$

Remarque. — Dans tous les exemples précédents, la bijection ϕ_I de $\mathfrak{C}_I$ sur $\mathfrak{C}_{[i]}$ satisfaisant $w = w \circ \phi_I$ n'a pas été explicitée, car elle était banale à définir. Dans les exemples plus élaborés, comme dans le paragraphe ci-après, la bijection dépend de l'ordre naturel sur chaque sous-ensemble I de $\mathbb{N}$. Elle est aussi aisée à définir si l'on fait appel à la bijection "red" ("réduction") ainsi définie :

si $|I| = i$, $i \geq 1$ et $I = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_i\}$, alors

$$\mathrm{red}(x_j) := j, \quad \text{pour tout} \quad j = 1, 2, \dots, i. \tag{15.9}$$

16. Les polynômes Eulériens

Ces polynômes, qui interviennent dans de nombreux calculs combinatoires, peuvent être définis comme les polynômes générateurs des groupes de permutations par différentes statistiques. Les techniques développées dans les paragraphes précédents s'appliquent tout à fait bien pour obtenir les différentes relations les concernant.

16.1. *Excédances et descentes.* — On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_I$ a une *excédance* en j $(1 \le j \le |I|)$ si $\sigma(j) > j$. On note $\operatorname{exc}\sigma$ le *nombre d'excédances* de σ. Posons $|I| = i$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_I$, on définit $\phi_I(\sigma)$ comme étant la permutation de $[\,i\,]$ qui pour tout $x \in I$ envoie l'élément $\operatorname{red}(x)$ de $[\,i\,]$ sur $\operatorname{red}(\sigma(x))$. On a évidemment $\operatorname{exc}\phi_I(\sigma) = \operatorname{exc}\sigma$, de sorte que le poids w défini par $w(\sigma) = t^{\operatorname{exc}\sigma}$ est cardinal-compatible.

Par exemple, la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \mathbf{3}\,\mathbf{5}\,1\,\mathbf{8}\,2\,6\,\mathbf{9}\,4\,7 \end{pmatrix}$ a exactement $\operatorname{exc}\sigma = 4$ excédances indiquées en caractères gras.

Dans le tableau de la Figure 2, on trouve calculé pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $(n = 1, 2, 3)$ et pour chaque $\sigma \in \mathfrak{C}_4$ le nombre d'excédances $\operatorname{exc}\sigma$.

σ	$\operatorname{exc}\sigma$	$\sigma \in \mathfrak{S}_3$	$\operatorname{exc}\sigma$	$\sigma \in \mathfrak{C}_4$	$\operatorname{exc}\sigma$
1	0	$1,2,3$	0	$\mathbf{4},1,2,3$	1
$1,2$	0	$1,\mathbf{3},2$	1	$\mathbf{3},\mathbf{4},2,1$	2
$\mathbf{2},1$	1	$\mathbf{2},1,3$	1	$\mathbf{3},1,\mathbf{4},2$	2
		$\mathbf{2},\mathbf{3},1$	2	$\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},1$	3
		$\mathbf{3},1,2$	1	$\mathbf{4},\mathbf{3},1,2$	2
		$\mathbf{3},2,1$	1	$\mathbf{2},\mathbf{4},1,3$	2

Fig. 2

Le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par le poids w, c'est-à-dire par le *nombre d'excédances*, est appelé *polynôme eulérien* d'ordre n. Il est noté $A_n(t)$. Les premières valeurs sont données par $A_0(t) = 1$ (par convention), $A_1(t) = 1$, $A_2(t) = 1 + t$, $A_3(t) = 1 + 4t + t^2$, $A_4(t) = 1 + 11t + 11t^2 + t^3$.

Notons $A_{\mathfrak{C}_n}(t)$ le polynôme générateur de $\mathfrak{C}_n$ par le nombre d'excédances. La Proposition 14.4 (formule (14.5)) entraîne alors l'identité

$$\sum_{n\ge 0} A_n(t)\,\frac{u^n}{n!} = \exp \sum_{n\ge 1} A_{\mathfrak{C}_n}(t)\,\frac{u^n}{n!}. \tag{16.1}$$

Définition. — On dit que la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_I$ a une *descente en* j si $1 \le j \le |I| - 1$ et $\sigma(i_j) > \sigma(i_{j+1})$. Le *nombre de descentes* de σ est noté $\operatorname{des}\sigma$.

Pour mieux visualiser les descentes dans une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_I$, il est commode d'identifier σ au *mot linéaire*, qu'on écrit comme un mot usuel $\sigma(i_1)\sigma(i_2)\ldots\sigma(i_{|I|})$, ou encore comme $\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_{|I|})$ (avec des virgules pour séparer les lettres), la suite $i_1 < i_2 < \cdots < i_{|I|}$ étant la suite croissante des éléments de I.

Par exemple, la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 3\,4\,6\,8\,9 \\ 8\,6\,9\,3\,4 \end{pmatrix}$ est identifiée au mot $\sigma = 8, 6, 9, 3, 4$. Le nombre de descentes, $\operatorname{des}\sigma$, de la permutation $\sigma = 8, 6, 9, 3, 4$ est ainsi égal à 2.

Considérons maintenant une permutation circulaire $\sigma \in \mathfrak{C}_n$. En général, on écrit σ sous la forme $\sigma = (i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{n-1}(i))$, où i est un élément quelconque de $[\,n\,]$. Notons que le cycle *renversé*

$$(\sigma^{n-1}(i), \ldots, \sigma^2(i), \sigma(i), i)$$

est l'unique cycle de la permutation *inverse* σ^{-1} de σ. On peut aussi l'écrire

$$\big(n, \sigma^{-1}(n), \sigma^{-2}(n), \ldots, \sigma^{-(n-1)}(n)\big).$$

On note $\check\sigma$ le *mot* $\check\sigma := n, \sigma^{-1}(n), \sigma^{-2}(n), \ldots, \sigma^{-(n-1)}(n)$ et $\phi(\sigma)$ le *mot* $\phi(\sigma) := \sigma^{-1}(n), \sigma^{-2}(n), \ldots, \sigma^{-(n-1)}(n)$, déduit de $\check\sigma$ par suppression de la première lettre n.

Proposition 16.1. — *Lorsque $n \geq 2$, l'application ϕ est une bijection de $\mathfrak{C}_n$ sur $\mathfrak{S}_{n-1}$ satisfaisant* $\operatorname{exc}\sigma = 1 + \operatorname{des}\phi(\sigma)$.

Démonstration. — Le caractère bijectif est évident. Maintenant, on a $n > \sigma(j) > j$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $1 \leq k \leq (n-2)$ et $\sigma(j) = \sigma^{-k}(n) > \sigma^{-(k+1)}(n) = j$. Enfin, la succession des deux lettres $n > \sigma^{-1}(n)$ qui forme une excédance de σ n'apparaît pas dans le mot $\phi(\sigma)$. $\square$

Notons $A_n^{\operatorname{des}}(t)$ le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par nombre de descentes. On déduit de la précédente proposition l'identité

$$A_{\mathfrak{C}_n}(t) = t\, A_{n-1}^{\operatorname{des}}(t) \quad (n \geq 2). \tag{16.2}$$

Soient $n \geq 2$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation, qu'on écrit comme le mot linéaire $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$. On peut lui associer, de façon bijective, le triplet (I, σ_1, σ_2) ainsi défini. D'abord, $\sigma(j) = n$ pour un certain j tel que $1 \leq j \leq n$. On pose $I = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$ (qui est vide si $j = 1$). Le mot linéaire $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(j-1)$ s'identifie à une permutation $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_I$ et le mot linéaire $\sigma(j+1)\sigma(j+2)\ldots\sigma(n)$ à une permutation $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{[n-1]\setminus I}$. Naturellement, $\operatorname{des}\sigma = \operatorname{des}\sigma_1 + 1 + \operatorname{des}\sigma_2$, si $1 \leq j \leq n-1$ et $\operatorname{des}\sigma = \operatorname{des}\sigma_1$ si $j = n$. On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t^{\operatorname{des}\sigma} &= \sum_{1\leq j\leq n-1}\ \sum_{|I|=j-1}\ \sum_{\substack{\sigma_1\in\mathfrak{S}_I\\ \sigma_2\in\mathfrak{S}_{[n-1]\setminus I}}} t^{\operatorname{des}\sigma_1+1+\operatorname{des}\sigma_2} + \sum_{\sigma_1\in\mathfrak{S}_{n-1}} t^{\operatorname{des}\sigma_1}\\ &= \sum_{1\leq j\leq n-1} \binom{n-1}{j-1} \sum_{\substack{\sigma_1\in\mathfrak{S}_{j-1}\\ \sigma_2\in\mathfrak{S}_{n-j}}} t^{\operatorname{des}\sigma_1+1+\operatorname{des}\sigma_2} + \sum_{\sigma_1\in\mathfrak{S}_{n-1}} t^{\operatorname{des}\sigma_1},\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} A_n^{\mathrm{des}}(t) &= \sum_{1\le j\le n-1} \binom{n-1}{j-1} A_{j-1}^{\mathrm{des}}(t)\, t\, A_{n-j}^{\mathrm{des}}(t) + A_{n-1}^{\mathrm{des}}(t) \\ &= t\, A_{n-1}^{\mathrm{des}}(t) + \sum_{1\le i\le n-2} \binom{n-1}{i} A_i^{\mathrm{des}}(t)\, t\, A_{n-i-1}^{\mathrm{des}}(t) + A_{n-1}^{\mathrm{des}}(t). \end{aligned} \tag{16.2'}$$

Comme par ailleurs $A_1^{\mathrm{des}}(t) = 1$, on voit, d'après le Théorème 13.1, formule (13.5), que la dernière identité équivaut à la formule :

$$\sum_{n\ge 0} A_n^{\mathrm{des}}(t)\, \frac{u^n}{n!} = \exp\Bigl(u + \sum_{n\ge 2} t\, A_{n-1}^{\mathrm{des}}(t)\, \frac{u^n}{n!}\Bigr). \tag{16.3}$$

Puisque $A_{\mathfrak{C}_1}(t) = 1$, la conjonction des formules (16.1), (16.2) et (16.3) entraîne

$$A_n^{\mathrm{des}}(t) = A_n(t) \tag{16.4}$$

pour tout $n \ge 0$. Autrement dit, les *polynômes générateurs de* $\mathfrak{S}_n$ par le *nombre de descentes* d'une part et par le *nombre d'excédances* d'autre part sont identiques.

16.2. *La transformation fondamentale.* — Pour $n \ge 1$, notons $\mathfrak{S}'_n$ l'ensemble des permutations σ telles que $\sigma(1) = n$ ou telles que le mot correspondant s'écrit $\sigma = n, \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. D'après la Proposition 15.1, l'application $\sigma \mapsto \breve\sigma$ est une bijection de $\mathfrak{C}_n$ sur $\mathfrak{S}'_n$ satisfaisant

$$\operatorname{exc} \sigma = \operatorname{des} \breve\sigma \tag{16.5}$$

et d'après (16.4), il existe une bijection — appelons-la aussi $\sigma \mapsto \breve\sigma$ — de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même satisfaisant (16.5). Le problème est donc de prolonger $\sigma \mapsto \breve\sigma$ à tout $\mathfrak{S}_n$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $\{I_1, \ldots, I_r\}$ l'ensemble de ses orbites et pour tout $j = 1, \ldots, r$ soit σ_j la restriction de σ à I_j. D'après la Proposition 16.1, l'application

$$\sigma_j \mapsto \breve\sigma_j := \max I_j, \sigma^{-1}(\max I_j), \ldots, \sigma^{-(|I_j|-1)}(\max I_j) \tag{16.6}$$

est une bijection de $\mathfrak{C}_{I_j}$ sur l'ensemble $\mathfrak{S}'_{I_j}$ des permutations de I_j débutant par $\max I_j$, satisfaisant $\operatorname{exc} \sigma_j = \operatorname{des} \breve\sigma_j$. Supposons que l'on a *numéroté* les orbites de σ de façon que les inégalités

$$\max I_1 < \max I_2 < \cdots < \max I_r \tag{16.7}$$

soient satisfaites. En définissant $\breve\sigma$ comme étant le produit de juxtaposition

$$\breve\sigma := \breve\sigma_1, \ldots\ , \breve\sigma_r, \tag{16.8}$$

on ne crée pas de nouvelles descentes entre la dernière lettre d'un facteur $\breve\sigma_j$ et la première lettre du facteur suivant $\breve\sigma_{j+1}$. On obtient bien ainsi : $\operatorname{exc}\sigma = \operatorname{exc}\sigma_1 + \cdots + \operatorname{exc}\sigma_r = \operatorname{des}\breve\sigma_1 + \cdots + \operatorname{des}\breve\sigma_r = \operatorname{des}\breve\sigma$.

Cette application est bien bijective, car la première lettre de tout facteur $\breve\sigma_j$ dans le mot $\breve\sigma$ a la propriété d'être *saillante*, c'est-à-dire d'être supérieure strictement à chaque lettre de $\breve\sigma$ située *sur sa gauche*. Pour définir la bijection inverse, il suffit donc de couper le mot $\breve\sigma$ dont on part avant chaque lettre saillante. Les facteurs du mot que l'on définit ainsi permettent de reconstituer les permutations circulaires σ_j en utilisant (16.6) et donc la permutation originale σ.

Exemple. — La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \mathbf{3}\,\mathbf{5}\,1\,\mathbf{9}\,\mathbf{6}\,2\,4\,8\,7 \end{pmatrix}$ a exactement $\operatorname{exc}\sigma = 4$ excédances indiquées en caractères gras. Elle se décompose en cycles disjoints comme $\sigma = (1,3)(2,5,6)(4,9,7)(8)$, qu'on récrit comme $\sigma = (1,3)(2,5,6)(8)(4,9,7)$, pour que les inégalités (16.7) soient satisfaites. On a ensuite

$$\breve\sigma_1 := 3,1, \quad \breve\sigma_2 := 6,5,2, \quad \breve\sigma_3 := 8, \quad \breve\sigma_4 := 9,4,7,$$

d'où

$$\breve\sigma := 3,1,6,5,2,8,9,4,7.$$

On a bien $\operatorname{des}\breve\sigma = 4$ et les lettres 3, 6, 8 et 9 sont bien *saillantes* et permettent bien de reconstituer σ à partir de la seule donnée de $\breve\sigma$.

17. Le composé partitionnel des endofonctions

Pour tout $n \ge 1$, on désigne par End_n l'ensemble de toutes les applications de $[\,n\,] = \{1,2,\ldots,n\}$ dans lui-même. De telles applications sont appelées *endofonctions*. Il y en a exactement n^n. Parmi celles-ci, on trouve naturellement les $n!$ permutations de $[\,n\,]$. Notre premier but est de préciser leurs structures.

17.1. *Structures des endofonctions.* — Si f est dans End_n et x dans $[\,n\,]$, on pose $f^0(x) = x$ et $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ pour tout $k \ge 1$. Un *cycle* de f est une suite d'éléments *distincts* de la forme $(x, f(x), \ldots, f^{j-1}(x))$ où $j \ge 1$ et $f^j(x) = x$. On dit que l'élément x de $[\,n\,]$ est *récurrent* pour f s'il existe un entier $k \ge 1$ tel que $f^k(x) = x$. Si x est récurrent, l'élément $f(x)$ l'est aussi, puisque $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = f(x)$. L'ensemble des éléments récurrents pour f est noté R_f.

Par convention, End_0 est un singleton. L'ensemble End_1 est aussi un singleton et l'entier 1 est récurrent pour l'unique élément de End_1. Supposons $n \ge 2$ et, pour $x \in [\,n\,]$, considérons la suite des $(n+1)$ termes $(x, f(x), \ldots, f^n(x))$. Cette suite contient nécessairement deux termes égaux, disons $f^i(x)$ et $f^{i+j}(x)$ $(0 \le i < i+j \le n)$. Comme $n-1-i \ge 0$ et $j \ge 1$, on a :

$$f^j(f^{n-1}(x)) = f^{n-1-i}(f^{i+j}(x)) = f^{n-1-i}(f^i(x)) = f^{n-1}(x).$$

L'élément $f^{n-1}(x)$ est donc toujours récurrent.

Réciproquement, si x est récurrent, c'est-à-dire si $f^k(x) = x$ pour $k \ge 1$, on peut écrire $n-1 = qk + r$ avec $0 \le r \le k-1$. Alors $f^{n-1}(f^{k-r}(x)) = f^{qk+k}(x) = x$. Il existe donc un élément $y = f^{k-r}(x)$ tel que $f^{n-1}(y) = x$. Par conséquent,

$$f^{n-1}([\,n\,]) = R_f. \tag{17.1}$$

En particulier, R_f n'est jamais vide. D'autre part, si x est récurrent, à savoir $f^k(x) = x$ pour $k \ge 1$, posons $y = f^{k-1}(x)$. Alors $f^k(y) = f^{k-1}(f^k(x)) = f^{k-1}(x) = y$. L'élément y est aussi récurrent et vérifie $f(y) = f^k(x) = x$. Ceci montre que la *restriction* de f à R_f est surjective. Comme R_f est fini, cette restriction, que nous noterons désormais π_f, est une *permutation* de R_f. Les orbites de π_f, au sens de la théorie élémentaire du groupe des permutations, sont disjointes ou confondues.

On dit qu'un cycle $(x, f(x), \ldots, f^{j-1}(x))$ est *isolé*, si toute relation

$$f(y) = f^k(x) \quad \text{avec} \quad k \ge 1 \tag{17.2}$$

entraîne $y = f^{k-1}(x)$. En d'autres termes, le cycle $(x, f(x), \ldots, f^{j-1}(x))$ est isolé, si la relation (17.2) implique que y est élément du cycle.

Réciproquement, le cycle $(x, f(x), \ldots, f^{j-1}(x))$ est *non isolé*, si la relation (17.2) est vraie pour un élément n'appartenant pas au cycle. Cet élément y est alors nécessairement *non récurrent* car on aurait alors $f^i(y) = y$ pour $i \ge 1$, donc $y = f^{i-1}(f(y)) = f^{k+i-1}(x)$ et y appartiendrait au cycle.

L'ensemble $[\,n\,]\backslash f([\,n\,])$ des valeurs non prises est noté Z_f. On a toujours $Z_f \cap R_f = \emptyset$. Si Z_f est vide, f est une permutation de $[\,n\,]$. Dans la prochaine proposition, on montre qu'en dehors des éléments des cycles isolés, on peut atteindre tous les éléments de $[\,n\,]$ en partant de ceux de Z_f et en itérant f un nombre suffisant de fois.

Proposition 17.1. — *Soient $n \ge 1$, $x \in [\,n\,]$ et $f \in \mathrm{End}_n$. Si x n'est pas élément d'un cycle isolé de f, alors $f^m(z) = x$ pour un certain $m \ge 0$ et un certain $z \in Z_f$.*

Démonstration. — Supposons d'abord x non récurrent. S'il n'est pas dans Z_f, il existe $x_1 \ne x$ tel que $f(x_1) = x$. De plus, comme x est non récurrent, x_1 est aussi non récurrent. Par ce procédé, on peut donc construire une suite $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ d'éléments non récurrents tels que $x_0 = x$ et $f(x_i) = x_{i-1}$ pour $i \geq 1$. Ces éléments étant tous distincts, la suite est nécessairement finie. Il existe donc un indice $m \geq 0$ tel que $f(y) \neq x_m$ pour tout $y \in [\,n\,]$, c'est-à-dire $x_m \in Z_f$ et $f^m(x_m) = x_0$.

Supposons ensuite x récurrent. Soit $(x, f(x), \dots, f^{j-1}(x))$ le cycle contenant x supposé non isolé. Il existe donc x_0, non récurrent, n'appartenant pas à ce cycle, satisfaisant à $f(x_0) = f^k(x)$ avec $1 \leq k \leq j$. Comme $x = f^{j-k+1}(x_0)$, on est ramené au cas précédent. $\square$

17.2. *Interprétation en termes de graphes.* — Passons d'abord en revue certains sous-ensembles remarquables :

$\mathfrak{S}_n = \{f \in \mathrm{End}_n : R_f = [\,n\,]\} = \{f \in \mathrm{End}_n : \pi_f = f\}$, c'est le *groupe des permutations* de $[\,n\,]$;

$\mathfrak{C}_n = \{f \in \mathrm{End}_n : R_f = [\,n\,],\ \pi_f \text{ circulaire}\}$, c'est l'ensemble des permutations *circulaires* de $[\,n\,]$;

$\mathrm{Acyc}_n = \{f \in \mathrm{End}_n : f^n = f^{n-1}\}$, c'est l'ensemble des fonctions *acycliques* ;

$\mathrm{Arbor}_n = \{f \in \mathrm{End}_n : f^n = f^{n-1},\ \mathrm{card}\, R_f = 1\}$, c'est l'ensemble des *arborescences* ;

$\mathrm{Indec}_n = \{f \in \mathrm{End}_n : \pi_f \text{ circulaire}\}$, c'est l'ensemble des fonctions *indécomposables.*

Si I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit de façon évidente les ensembles End_I, Acyc_I, ... , puis les familles $\mathfrak{S} := (\mathfrak{S}_I)$, $\mathfrak{C} := (\mathfrak{C}_I)$, $\mathrm{Acyc} := (\mathrm{Acyc}_I)$, $\mathrm{Arbor} := (\mathrm{Arbor}_I)$, $\mathrm{Indec} := (\mathrm{Indec}_I)$, où $I \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Les fonctions acycliques sont encore appelées *ultimement idempotentes.* Si f est acyclique, la propriété (17.1) entraîne que tous ses éléments récurrents x sont des points fixes : $f(x) = x$. Une arborescence est donc une fonction acyclique qui n'a qu'un point fixe.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_n \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{S}_n \arrow[d] & \mathrm{Indec}_n \arrow[dl] \arrow[dr] & \mathrm{Acyc}_n \arrow[d] \\
\mathfrak{C}_n & & \mathrm{Arbor}_n
\end{tikzcd}$$

Fig. 3

Dans le diagramme de la Figure 3, une flèche "$\rightarrow$" allant de A vers B indique que B est inclus dans A. Le diagramme montre les relations d'inclusion entre les six ensembles d'endofonctions décrits précédemment. Notons encore que l'on a : $\mathfrak{S}_n \cap \mathrm{Indec}_n = \mathfrak{C}_n$ et $\mathrm{Acyc}_n \cap \mathrm{Indec}_n = \mathrm{Arbor}_n$

et qu'enfin ces six ensembles sont confondus pour $n = 1$ et tous distincts dès que $n \geq 2$.

A tout élément $f \in \mathrm{End}_n$, on peut associer un *graphe* linéaire, orienté, ayant n sommets numérotés de 1 à n de la façon suivante. A un point fixe $f(x) = x$ correspond une *boucle* autour du sommet x. Au couple (x, y) tel que $x \neq y$ et $f(x) = y$ correspond un *arc* joignant x à y. Le graphe a donc n arcs ou boucles. Le sous-graphe restreint aux sommets appartenant à R_f se compose des boucles et cycles disjoints deux à deux. La relation (17.1) montre que de tout sommet x on peut atteindre un élément récurrent, c'est-à-dire un élément d'un cycle ou d'une boucle. Le graphe est donc formé d'un ou de plusieurs sous-graphes connexes ayant chacun un cycle de longueur supérieure à 1 ou une boucle.

Exemple. — Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcllllllllllllllllllll} x & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ f(x) & = & 13 & 18 & 20 & 6 & 10 & 9 & 13 & 7 & 4 & 10 & 2 & 1 & 16 & 7 & 18 & 14 & 19 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

qui envoie $\{1, 2, \ldots, 20\}$ dans lui-même. Le graphe associé est donné dans la Figure 4. La restriction π_f de f à l'ensemble R_f des éléments récurrents pour f est donné par $\pi_f = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 13 & 14 & 16 \\ 6 & 9 & 13 & 4 & 10 & 16 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

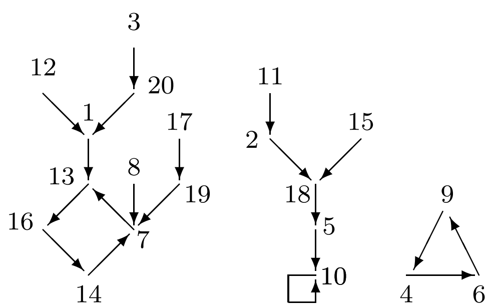


Fig. 4

En termes de graphe, un élément $f \in \mathfrak{S}_n$ est un ensemble de cycles disjoints. Il n'y a qu'un seul cycle si f appartient à $\mathfrak{C}_n$. Si f est une fonction acyclique, le graphe de π_f ne contient que des cycles de longueur égale à un. On dit que c'est une *forêt enracinée.* Le graphe d'une arborescence est un *arbre enraciné.* Enfin, le graphe d'une fonction indécomposable est *connexe.*

Le graphe de la Figure 4 comporte trois sous-graphes connexes, qui sont des graphes de fonctions indécomposables. Le second graphe est celui d'une arborescence, le troisième celui d'une permutation circulaire.

17.3. *Les composés partitionnels des applications d'ensembles finis.* Soit $f \in \mathrm{End}_n$. Les orbites de π_f, qui sont disjointes ou confondues, forment une partition de l'ensemble R_f des éléments récurrents pour f. D'après la propriété (17.1), la définition suivante a un sens : deux éléments x, y de $[\,n\,]$ appartiennent à la même *orbite de* f si $f^{n-1}(x)$ et $f^{n-1}(y)$ sont dans la même orbite de π_f. La restriction de f à une de ses orbites est alors une fonction *indécomposable* de cette orbite dans elle-même. (La Fig. 4 montre par exemple que la fonction f a trois orbites.)

Soit $\{I_1, \ldots, I_r\}$ l'ensemble des orbites d'une endofonction f et pour tout $j = 1, \ldots, r$ soit g_j la restriction de f à l'orbite I_j, qui est donc une fonction indécomposable. L'ensemble $\{(g_1, I_1), \ldots, (g_r, I_r)\}$ caractérise complètement l'endofonction f. Si donc w est un poids cardinal-compatible défini pour toute fonction indécomposable, le composé partitionnel de la famille Indec des fonctions indécomposables n'est autre que la famille End des endofonctions muni du poids correspondant $w^{(+)}$.

Utilisant la même construction, on voit que la famille $\mathfrak{S}$ (resp. la famille Acyc) des permutations (resp. des fonctions acycliques) est le composé partitionnel de la famille $\mathfrak{C}$ (resp. de la famille Arbor) des permutations circulaires (resp. des fonctions arborescentes). Notant $a(S, w)$ la fonction génératrice exponentielle de la famille cardinal-compatible (S, w) et utilisant les notations du paragraphe 14, on a ainsi :

(17.3)	$\mathrm{End} = \mathrm{Indec}^{(+)}$;	$a(\mathrm{End}, w^{(+)}) = \exp a(\mathrm{Indec}, w)$;
(17.4)	$\mathfrak{S} = \mathfrak{C}^{(+)}$;	$a(\mathfrak{S}, w^{(+)}) = \exp a(\mathfrak{C}, w)$;
(17.5)	$\mathrm{Acyc} = \mathrm{Arbor}^{(+)}$;	$a(\mathrm{Acyc}, w^{(+)}) = \exp a(\mathrm{Arbor}, w)$.

Montrons qu'on a également :

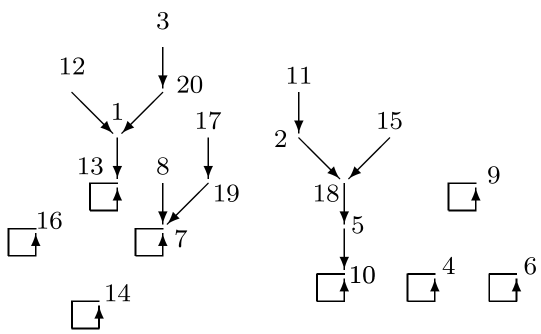
(17.6)	$\mathrm{End} = \mathrm{Arbor}^{(\times)}$;	$a(\mathrm{End}, w^{(\times)}) = (1 - a(\mathrm{Arbor}, w))^{-1}$;
(17.7)	$\mathrm{Indec} = \mathrm{Arbor}^{(\circ)}$;	$a(\mathrm{Indec}, w^{(\circ)}) = \log(1 - a(\mathrm{Arbor}, w))^{-1}$.

Pour établir (17.6), il suffit de prouver que toute endofonction $f \in \mathrm{End}_n$ est caractérisée par une *suite* $((h_1, J_1), \ldots, (h_m, J_m))$ (et non plus un *ensemble*), où $\{J_1, \ldots, J_m\}$ est toujours une partition de $[\,n\,]$, mais h_1, $\ldots$, h_m sont des arborescences de J_1, $\ldots$, J_m, respectivement. Cette bijection qui fait passer de f à $((h_1, J_1), \ldots, (h_m, J_m))$ est illustrée par la transformation qui fait passer du graphe décrit dans la Figure 4 au graphe décrit dans la Figure 5.

On considère d'abord la décomposition $\{(g_1, I_1), \ldots, (g_r, I_r)\}$ en fonctions *indécomposables* comme décrit précédemment, les ensembles I_1, $\ldots$, I_r étant les orbites de f. La restriction de f à l'ensemble R_f des éléments récurrents est une permutation de R_f, qu'on a notée π_f. Désignons par $(i_1 < i_2 < \cdots < i_m)$ la suite croissante des éléments de R_f et par $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ la suite de leurs images par π_f, c'est-à-dire $(\pi_f(i_1), \pi_f(i_2), \ldots, \pi_f(i_m))$. Pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$ notons J_k l'ensemble de tous les éléments $x \in [\,n\,]$ tels que $f^l(x) = i_k$ pour un certain entier $l \geq 0$, augmenté de i_k lui-même ; puis pour tout $x \in J_k$ définissons $h_k(x)$ par

$$h_k(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq i_k\,; \\ x, & \text{si } x = i_k. \end{cases}$$

Autrement dit, *tous* les éléments récurrents deviennent des points fixes, mais on ne modifie pas les images des autres éléments. Les ensembles J_1, J_2, ... , J_m forment une partition de $[\,n\,]$ dont la *numérotation* a été *fixée* par π_f. Enfin, les fonctions h_1, h_2, ... , h_m sont des arborescences.



$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 13 & 14 & 16 \\ 6 & 9 & 13 & 4 & 10 & 16 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Fig. 5

Au niveau de la représentation en termes de graphe, le passage de la Figure 4 à la Figure 5 est accompli en *enracinant* chaque arbre sur son sommet récurrent et en remplaçant les liaisons entre éléments récurrents disjoints par des enracinements en chacun des sommets. Enfin, la numérotation des arborescences ainsi formées est fixée par la renumérotation de leurs racines.

Partant de $((h_1, J_1), \ldots, (h_m, J_m))$, on reconstruit l'endofonction f par une construction évidente.

La même construction permet d'établir les identités (17.7), la seule différence étant que la permutation π_f est alors *circulaire.*

17.4. *La transformation fondamentale pour les endofonctions.* — Soit $v = x_1, x_2, \ldots, x_n$ un mot non vide dont les lettres sont des entiers (non nécessairement distincts). On appelle *contenu* de v l'ensemble, noté $\operatorname{Cont} v$, des lettres *distinctes* apparaissant dans ce mot. Une lettre x_i est dite *précédée* dans v si $i = 1$, ou si $i \geq 2$ et s'il existe un indice j tel que

$1 \le j \le i-1$ et $x_j = x_i$. Soit $i_0 < i_1 < \cdots < i_p$ la suite des indices i_j tels que x_{i_j} soit une lettre précédée dans v. Alors la suite des facteurs

$$v_0 := x_{i_0}, x_{i_0+1}, \ldots, x_{i_1-1}; \quad v_1 := x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1};$$
$$\ldots \quad v_p := x_{i_p}, x_{i_p+1}, \ldots, x_n;$$

du mot v est appelée la *Z-factorisation* du mot. Les mots v_0, v_1, … , v_p sont évidemment sans répétition de lettres. On dit encore qu'ils sont *multilinéaires.*

Soient f une endofonction appartenant à End_I et $i_1 < i_2 < \cdots < i_{|I|}$ la suite croissante des éléments de I. Il est commode aussi d'identifier f au *mot* linéaire $f(i_1), f(i_2), \ldots, f(i_{|I|})$, qu'on écrira aussi sans virgule : $f(i_1)f(i_2)\ldots f(i_{|I|})$. Si f appartient à End_n ($n \ge 1$) et si $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ est sa Z-factorisation, il est immédiat que l'on a

$$\text{(17.8)} \qquad \mathrm{card}([\,n\,] \setminus \mathrm{Cont}\, v) = p.$$

Autrement dit, il y a exactement p entiers de $[\,n\,]$ qui n'apparaissent pas comme des lettres de v.

Exemple. — La Z-factorisation du mot

$$v = 9, 6, 4, 10, 16, 13, 7, 14, 13, 1, 20, 7, 10, 5, 18, 2, 1, 18, 7, 19$$

est donnée par

$$9, 6, 4, 10, 16, 13, 7, 14; \quad 13, 1, 20; \quad 7; \quad 10, 5, 18, 2; \quad 1; \quad 18; \quad 7, 19.$$

La Z-factorisation de v contient $p+1 = 7$ facteurs ; il y a 7 lettres précédées et $p = 6$ entiers de [20] n'apparaissant pas comme lettres dans v, à savoir 3, 8, 11, 12, 15 et 17.

La transformation fondamentale pour les endofonctions est encore notée $f \mapsto \check{f}$, car elle est le prolongement à End_n de la transformation fondamentale décrite pour les permutations dans le paragraphe 16.2. Si f est dans $\mathrm{End}_n \setminus \mathfrak{S}_n$ ($n \ge 1$), l'ensemble Z_f des valeurs non prises par f n'est pas vide. On désigne par $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ la suite croissante de ses éléments. D'autre part, la restriction de f à l'ensemble R_f des éléments récurrents pour f est une permutation de R_f, que l'on a notée π_f. On définit tout d'abord v_0 comme étant le mot (*cf.* § 16.2)

$$\text{(17.9)} \qquad v_0 := \check{\pi}_f.$$

On définit ensuite par récurrence une suite de p mots v_1, v_2, … , v_p ($p = \mathrm{card}\, Z_f$) de la façon suivante : supposons définis les mots v_0, v_1, … ,

v_{k-1} pour un certain k tel que $1 \leq k \leq p$. Soit m_k le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $f^m(z_k)$ soit égal à une lettre du produit de juxtaposition $v_0 v_1 \dots v_{k-1}$. Cette définition a bien un sens car $f^{n-1}(z_k)$ appartient à R_f d'après (17.1), donc est égal à une lettre du facteur v_0. On pose alors

$$v_k := f^{m_k}(z_k)\, f^{m_k-1}(z_k)\, \dots\, f(z_k) \tag{17.10}$$

et on définit $\check{f}$ comme étant le produit de juxtaposition :

$$\check{f} := v_0\, v_1\, \dots\, v_p. \tag{17.11}$$

Exemple. — Reprenons les deux exemples décrits dans §§ 17.2, 17.4. On a obtenu $\check{\pi}_f = 9, 6, 4, 10, 16, 13, 7, 14$. Ensuite $Z_f = \{3, 8, 11, 12, 15, 17\}$ et donc $p = \operatorname{card} Z_f = 6$. On a successivement :

$$\begin{array}{lll}
v_0 = \check{\pi}_f & \text{et} & v_0 = 9, 6, 4, 10, 16, 13, 7, 14;\\
m_1 = 3 & \text{et} & v_1 = f^3(3), f^2(3), f(3) = 13, 1, 20;\\
m_2 = 1 & \text{et} & v_2 = 7;\\
m_3 = 4 & \text{et} & v_3 = 10, 5, 18, 2;\\
m_4 = 1 & \text{et} & v_4 = 1;\\
m_5 = 1 & \text{et} & v_5 = 18;\\
m_6 = 3 & \text{et} & v_6 = 7, 19.
\end{array}$$

Ainsi $\quad \check{f} = 9, 6, 4, 10, 16, 13, 7, 14, 13, 1, 20, 7, 10, 5, 18, 2, 1, 18, 7, 19;$

et $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ est la Z-factorisation de $\check{f}$.

Proposition 17.2. — *Soit $\check{f}$ déduit d'une endofonction $f \in \operatorname{End}_n$ par le procédé décrit en* (17.9)–(17.11). *Alors $\check{f}$ est un réarrangement du mot $f(1)\, f(2)\, \dots\, f(n)$ et $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ est la Z-factorisation de $\check{f}$.*

Démonstration. — Par définition des facteurs v_k, la lettre $f^{m_k}(z_k)$ est précédée dans $\check{f}$ et il n'y a pas de lettre du mot $v_0\, v_1\, \dots\, v_{k-1}$ qui soit égale à une lettre de $f^{m_k-1}(z_k)\, \dots\, f(z_k)$. Si l'on avait $f^i(z_k) = f^j(z_k)$ pour $m_k \geq i > j \geq 1$, l'élément $f^j(z_k)$ serait récurrent, donc apparaîtrait aussi dans le mot v_0, contrairement à la définition de m_k. Par conséquent, $f^{m_k}(z_k)$ est la seule lettre du mot v_k à être précédée dans $\check{f}$. Ainsi $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ est la Z-factorisation de $\check{f}$.

Considérons le mot $v'_k = f^{m_k-1}(z_k)\, f^{m_k-2}(z_k)\, \dots\, f(z_k)\, z_k$, puis le produit de juxtaposition $v_0\, v'_1\, \dots\, v'_p$. Ce produit de juxtaposition est un mot multilinéaire d'après ce que l'on vient de voir. D'autre part, si x est une valeur prise par f et est non récurrent, il existe d'après la Proposition 17.1 un élément z_k tel que le mot $f^{n-1}(z_k)\, f^{n-2}(z_k)\, \dots\, f(z_k)$ contienne x. Si on prend le plus petit z_k ayant cette propriété, alors x est nécessairement une lettre de $f^{m_k-1}(z_k)\, f^{m_k-2}(z_k)\, \dots\, f(z_k)\, z_k = v'_k$. Le mot $v_0\, v'_1\, v'_2\, \ldots\, v'_p$ étant multilinéaire et contenant tous les éléments de $[\,n\,]$ est un réarrangement du mot $1, 2, \ldots, n$. Par conséquent, $v_0\, v_1\, v_2\, \ldots\, v_p$ est un réarrangement de $f(1)\, f(2)\, \ldots\, f(n)$. $\square$

Proposition 17.3. — *L'application $f \mapsto \check{f}$ est une bijection de* End_n *sur lui-même.*

Démonstration. — Nous donnons la construction de la bijection inverse $\check{f} \mapsto f$. Partons d'un mot v de longueur n dont les lettres sont dans $[\,n\,]$ et soit $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ sa Z-factorisation. On sait qu'il y a alors exactement p éléments de $[\,n\,]$ qui ne sont pas des lettres de v. Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ la suite croissante de ces éléments. Posons

$$v_k := x_{k,1} x_{k,2} \ldots x_{k,m_k} \quad \text{et} \quad v'_k := x_{k,2} x_{k,3} \ldots x_{k,m_k} z_k \quad (1 \le k \le p).$$

Le mot $v_0 v_1 v_2 \ldots v_p$ est un réarrangement de $1, 2, \ldots, n$. Soit σ l'inverse par la transformation fondamentale pour les permutations de v_0, c'est-à-dire $\check{\sigma} := v_0$. Alors σ est une permutation du contenu $\mathrm{Cont}\, v_0$ du mot v_0. On définit ensuite

$$\begin{gathered} f(x_{k,2}) := x_{k,1}, \quad f(x_{k,3}) := x_{k,2}, \quad , \ \ldots \ , \quad f(x_{k,m_k}) := x_{k,m_{k-1}}, \\ f(z_k) := x_{k,m_k} \quad (1 \le k \le p). \end{gathered}$$

Enfin, on définit la restriction de f à $\mathrm{Cont}\, v_0$ comme étant σ. On obtient bien ainsi une application de $[\,n\,]$ dans $[\,n\,]$ pour laquelle $f(1) f(2) \ldots f(n)$ est un réarrangement de v. Il reste à voir que $\check{f}$ est bien égal à v.

En effet, pour $k = 1, \ldots, p$ le mot v_k peut s'écrire $v_k = f^{m_k}(z_k) \ldots f(z_k)$. Comme $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ est la Z-factorisation de v, il suffit de voir que les lettres de v_0 sont les seuls éléments récurrents pour f. En d'autres termes, il suffit de montrer que pour $0 \le j \le m_k - 1$ et $1 \le k \le p$ tous les itérés de la lettre $f^j(z_k)$ sont contenus dans $v_0 v_1 \ldots v_{k-1} f^{m_k}(z_k) \ldots f^{j+1}(z_k)$, ce mot ne contenant aucune lettre égale à $f^j(z_k)$. Or comme $f^{m_k}(z_k)$ est précédée dans v, on peut définir i comme étant le plus petit indice pour lequel $0 \le i \le k-1$ et le facteur v_i contient une lettre égale à $f^{m_k}(z_k)$. Si $i = 0$, tous les itérés de $f^{m_k}(z_k)$ sont des lettres de v_0. Par suite, tous les itérés de $f^j(z_k)$ sont dans $v_0 f^{m_k}(z_k) \ldots f^{j+1}(z_k)$. Si $i \ge 1$, on a $f^{m_k}(z_k) = f^h(z_i)$ pour $1 \le j \le m_i - 1$. Par récurrence sur k, tous les itérés de $f^h(z_i)$ sont dans $v_0 v_1 \ldots v_{i-1} f^{m_i}(z_i) \ldots f^{h+1}(z_i)$, par suite tous les itérés de $f^j(z_k)$ sont dans $v_0 v_1 \ldots v_{k-1} f^{m_k}(z_k) \ldots f^{j+1}(z_k)$. $\square$

Plusieurs propriétés de la transformation fondamentale pour les endofonctions sont données dans les exercices, en particulier pour des comptages de sous-ensembles d'endofonctions.

18. Partitions d'entiers

En parlant de partitions d'entiers, on entre dans un immense domaine des mathématiques, qui a pris naissance avec Euler et qui reste encore très vivace aujourd'hui, empruntant ses techniques dans plusieurs disciplines. Les énoncés sont souvent de nature très concrète ou combinatoire et les démonstrations très analytiques. Nous nous contentons dans ce paragraphe de donner les premières définitions, réservant les paragraphes suivants pour discuter des techniques de calcul reposant sur les produits infinis.

Il est aisé de vérifier que le nombre de *partitions ordonnées* de l'entier n en p parts, c'est-à-dire le nombre de suites $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$, de longueur p, d'entiers au moins égaux à 1, tels que $n_1+n_2+\cdots+n_p = n$, est égal à $\binom{n-1}{p-1}$; si l'on s'autorise des parts n_i nulles, ce nombre vaut $\binom{n+p-1}{n}$. Lorsque l'*ordre* des parts n'est plus imposé, ou, ce qui revient au même, lorsque l'on s'impose seulement des suites *décroissantes* d'entiers, on parle de *partitions* de l'entier n. Certains auteurs disent *partages*, mais ce substantif ne s'est pas imposé de façon universelle. L'évaluation du nombre de ces partitions, satisfaisant ou non des conditions particulières, est beaucoup plus difficile.

Définition. — Une *partition* de l'entier n est une suite décroissante (au sens large) d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 1$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p = n$.

Les entiers λ_1, λ_2, ... , λ_p sont les *parts* de la partition et p est le *nombre de parts*. On dit encore que n est le *poids* de la partition et p sa *longueur*. On écrit alors : $\|\lambda\| = n$ et $l(\lambda) = p$.

A toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ de n correspond, de façon bijective, une suite $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ d'entiers positifs tels que $1.m_1 + 2.m_2 + \cdots + n.m_n = n$. Il suffit, en effet, pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, de prendre pour m_k le nombre de parts de la partition qui sont égales à k. On présente donc aussi chaque partition $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ de n sous sa forme dite *multiplicative*

$$1^{m_1} 2^{m_2} \ldots n^{m_n}.$$

On associe aussi à la partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ de n son *diagramme de Ferrers* F, qui n'est autre qu'un ensemble de n points du plan ayant les coordonnées (i, j) entières, tels que $(i, j) \in F$ si et seulement si $1 \leq j \leq p$ et $1 \leq i \leq \lambda_j$.

Exemple. — La partition $\lambda = (8, 6, 5, 5, 1, 1, 1)$ de $n = 27$ a pour notation multiplicative

$$1^3 2^0 3^0 4^0 5^2 6^1 7^0 8^1 9^0 \ldots 27^0$$

et pour diagramme de Ferrers celui représenté dans la Figure 6.

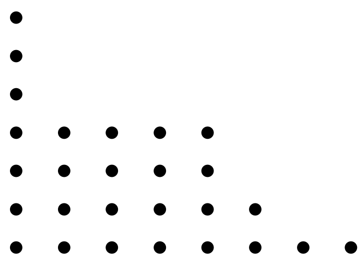


Fig. 6

En faisant pivoter de 180° le diagramme de Ferrers d'une partition λ de n autour de l'axe $i = j$, on obtient le diagramme de Ferrers d'une partition, notée $\tilde{\lambda}$, appelée *partition conjuguée* de λ. En fait, la partition conjuguée $\tilde{\lambda}$ a pour notation multiplicative

$$1^{\lambda_1-\lambda_2}2^{\lambda_2-\lambda_3}\dots(p-1)^{\lambda_{p-1}-\lambda_p}p^{\lambda_p}.$$

En reprenant le précédent exemple, le diagramme de Ferrers de $\tilde{\lambda}$ a la forme donnée dans la Figure 7 et sa notation multiplicative est bien

$$1^{8-6}2^{6-5}3^{5-5}4^{5-1}5^{1-1}6^{1-1}7^{1} = 1^2 2^1 3^0 4^4 5^0 6^0 7^1.$$

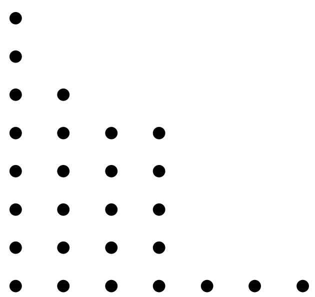


Fig. 7

L'application $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ est évidemment une bijection de l'ensemble des partitions de l'entier n sur lui-même et permet ainsi d'établir le résultat suivant.

Le nombre de partitions de l'entier n en p parts (resp. en au plus p parts) est égal au nombre de partitions de n dont la plus grande part est p (resp. au plus p).

Il existe encore une autre description des partitions à l'aide du dit *codage de Frobenius*. Supposons que la bissectrice $i = j$ dans le diagramme de Ferrers F d'une partition λ contienne exactement r points de F

(par exemple $r = 4$ dans les deux précédents diagrammes). Numérotons les lignes (resp. les colonnes) de F de bas en haut (resp. de gauche à droite). Enfin, notons $i_1, i_2, \ldots, i_r$ (resp. $j_1, j_2, \ldots, j_r$) le nombre de points du diagramme F situés sur la première, seconde, ..., $r^{\text{ième}}$ ligne (resp. première, seconde, ..., $r^{\text{ième}}$ colonne), strictement *à droite* (resp. strictement *au-dessus*) de cette bissectrice. La matrice à deux lignes

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

est appelée le *codage de Frobenius* de la partition λ.

On a évidemment $i_1 > i_2 > \cdots > i_r \geq 0$, $j_1 > j_2 > \cdots > j_r \geq 0$ et $n = r + i_1 + i_2 + \cdots + i_r + j_1 + j_2 + \cdots + j_r$. Réciproquement, à toute matrice à deux lignes de la forme (18.1) satisfaisant ces dernières propriétés correspond une et une seule partition λ de n.

Dans le précédent exemple, le codage de Frobenius de λ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le codage de Frobenius de la transposée $\tilde{\lambda}$ est évidemment la matrice qui se déduit de celle-ci par transposition des deux lignes.

On note $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n. Par convention, $p(0) = 1$ et $p(n) = 0$ pour $n \leq -1$. Il n'y a pas de formule close pour $p(n)$; on peut, en revanche, trouver une formule pour la fonction génératrice de la suite $(p(n))$, reposant sur des techniques de produit infini développées ci-après.

19. Familles multipliables

La plupart des identités sur les partitions d'entiers implique la manipulation de produits infinis de séries formelles. Une des méthodes pour le traitement de ces produits infinis est de faire appel à la notion de *famille multipliable.*

Définition. — Soient S un ensemble non vide et (a_s) $(s \in S)$ une famille de séries formelles. On dit que cette famille est *multipliable*, si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) $a_s(0) \neq 1$ seulement pour un nombre fini de s dans S ;

(ii) pour tout $n \geq 1$, on a $a_s(n) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de s dans S.

Si la famille (a_s) $(s \in S)$ est multipliable, pour tout $n \geq 0$, on définit le sous-ensemble $S(n)$ de S par :

$(*)$ $s \in S(n)$ si et seulement si $a_s(0) \neq 1$ ou s'il existe k tel que $1 \leq k \leq n$ et $a_s(k) \neq 0$.

L'ensemble $S(n)$ est *fini*. On définit $a(n)$ comme étant le coefficient de u^n dans le produit $\prod_{s \in S(n)} a_s$. On a encore $a(n)$ égal au coefficient de u^n dans *tout* produit $\prod_{s \in S'} a_s$, où S' est un sous-ensemble fini de S contenant $S(n)$. Cette remarque s'avèrera très utile dans la démonstration de la Proposition 19.1. La série formelle $a = \sum_{n \geq 0} u^n\, a(n)$ est appelée *produit de la famille multipliable* (a_s) $(s \in S)$ et notée $a = \prod_{s \in S} a_s$.

Si S est fini, la définition de $a(n)$ donnée ci-dessus coïncide bien avec la définition de $a(n)$ dans le produit fini $\prod_{s \in S} a_s$.

Notation. — Si a est une série formelle, il devient coutumier de noter $[u^n]\, a$ le coefficient $a(n)$ de u^n dans la série a. Cette notation est utilisée ci-dessous.

Proposition 19.1.

(a) *Si $a_s = 1$ pour tout $s \in S$, la famille (a_s) $(s \in S)$ est multipliable et son produit est égal à 1, soit* $\prod\limits_{s \in S} 1 = 1$.

(b) *Soit $S = T + U$ une partition de l'ensemble S en deux sous-ensembles disjoints. Si la famille (a_s) $(s \in S)$ est multipliable, alors les deux sous-familles (a_s) $(s \in T)$ et (a_s) $(s \in U)$ le sont aussi et l'on a :*

$$\prod_{s \in T+U} a_s = \prod_{s \in T} a_s \cdot \prod_{s \in U} a_s.$$

(c) *Soient (a_s) $(s \in S)$ et (b_s) $(s \in S)$ deux familles multipliables indicées par le même ensemble S. Alors la famille $(a_s \cdot b_s)$ $(s \in S)$ est multipliable et l'on a :*

$$\prod_{s \in S} a_s \cdot \prod_{s \in S} b_s = \prod_{s \in S} (a_s \cdot b_s).$$

(d) *Soit (a_s) $(s \in S)$ une famille multipliable telle que chaque série a_s admet un inverse a_s^{-1}. Alors la famille (a_s^{-1}) $(s \in S)$ est multipliable et l'on a :*

$$\prod_{s \in S} a_s^{-1} = \Bigl(\prod_{s \in S} a_s\Bigr)^{-1}.$$

Démonstration. — La démonstration de (a) est évidente. Pour la propriété (b), on constate d'abord que les deux sous-familles (a_s) $(s \in T)$ et (a_s) $(s \in U)$ sont multipliables. Soient b et c leurs produits respectifs. Reprenons par ailleurs la notation $S(n)$ pour l'ensemble défini en $(*)$. On a

$$a(n) = [u^n] \prod_{s \in S(n)} a_s$$

$$\begin{aligned}
&= [u^n]\Big(\prod_{s\in S(n)\cap T} a_s \cdot \prod_{s\in S(n)\cap U} a_s\Big)\\
&= \sum_{k+l=n}\Big([u^k]\prod_{s\in S(n)\cap T} a_s\Big)\cdot\Big([u^l]\prod_{s\in S(n)\cap U} a_s\Big)\\
&= \sum_{k+l=n} b(k)c(l) = [u^n]\,(b\cdot c).
\end{aligned}$$

Établissons maintenant la propriété (c). Pour tout $s \in S$, posons d'abord $c_s := a_s \cdot b_s$. Ensuite, pour tout $n \geq 0$, notons $S(n)$ (resp. $S'(n)$, resp. $S''(n)$) le sous-ensemble des $s \in S$ tels que $a_s(0) \neq 1$ (resp. $b_s(0) \neq 1$, resp. $c_s(0) \neq 1$) ou tels qu'il existe k satisfaisant $1 \leq k \leq n$ et $a_s(k) \neq 0$ (resp. $b_s(k) \neq 0$, resp. $c_s(k) \neq 0$).

Pour tout $n \geq 0$, si $s \in (S(n) \cup S'(n))^c$, on a $c_s(0) = a_s(0)b_s(0) = 1$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a $c_s(k) = \sum_{l+m=k} a_s(l)b_s(m) = 0$. Par conséquent, l'ensemble $S''(n)$ est contenu dans $S(n) \cup S'(n)$. Il est donc fini. La famille (c_s) $(s \in S)$ est ainsi multipliable. Soit c son produit. On a alors

$$c(n) = [u^n]\,c = [u^n]\prod_{s\in S''(n)} c_s = [u^n]\prod_{s\in S(n)\cup S'(n)} a_s\cdot b_s.$$

Posons $S(n) \cup S'(n) = \{s_1, \ldots, s_m\}$. Alors

$$\begin{aligned}
c(n) &= \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} (a_{s_1}\cdot b_{s_1})(k_1)\cdots(a_{s_m}\cdot b_{s_m})(k_m)\\
&= \sum_{k_1+\cdots+k_m=n}\Big(\sum_{i_1+j_1=k_1} a_{s_1}(i_1)b_{s_1}(j_1)\Big)\cdots\Big(\sum_{i_m+j_m=k_m} a_{s_m}(i_m)b_{s_m}(j_m)\Big)\\
&= \sum_{i_1+j_1+\cdots+i_m+j_m=n} a_{s_1}(i_1)b_{s_1}(j_1)\cdots a_{s_m}(i_m)b_{s_m}(j_m)\\
&= \sum_{k+l=n}\Big(\sum_{i_1+\cdots+i_m=k} a_{s_1}(i_1)\cdots a_{s_m}(i_m)\Big)\Big(\sum_{j_1+\cdots+j_m=l} b_{s_1}(j_1)\cdots b_{s_m}(j_m)\Big)\\
&= \sum_{k+l=n}\Big([u^k]\prod_{s\in S(n)\cup S'(n)} a_s\Big)\Big([u^l]\prod_{s\in S(n)\cup S'(n)} b_s\Big)\\
&= \sum_{k+l=n} a(k)b(l) = (a\cdot b)(n). \quad \square
\end{aligned}$$

Pour la propriété (d), supposons pour simplifier que chaque série a_s s'écrit $a_s = 1 - b_s$ avec $b_s(0) = 0$. Alors $a_s^{-1} = 1 + \sum_{m\geq 1} b_s^m$, que nous posons égal à $1 + c_s$, de sorte que $o(c_s) \geq o(b_s) \geq 1$. En reprenant la notation $S(n)$ définie en $(*)$, on voit que pour $n \geq 1$, la relation $s \notin S(n)$ entraîne $b_s(1) = \cdots = b_s(n) = 0$, d'où $o(c_s) \geq o(b_s) \geq n + 1$ et donc $a_s^{-1}(n) = 0$. La famille (a_s^{-1}) $(s \in S)$ est donc multipliable.

Or, pour $n \geq 1$, le coefficient de u^n dans le produit

$$\prod_{s \in S} a_s^{-1} \cdot \prod_{s \in S} a_s$$

est égal à

$$\sum_{k+l=n} \Big([u^k] \prod_{s \in S(n)} a_s^{-1}\Big) \cdot \Big([u^l] \prod_{s \in S(n)} a_s\Big),$$

soit

$$\sum_{k+l=n} \Big([u^k]\Big(\prod_{s \in S(n)} a_s\Big)^{-1}\Big) \cdot \Big([u^l] \prod_{s \in S(n)} a_s\Big) = 1. \quad \square$$

La démonstration de la proposition suivante est immédiate. Nous ne la donnons pas.

Proposition 19.2. — *Soit* (b_s) $(s \in \mathbb{N})$ *une suite de séries formelles, toutes sans terme constant. Alors la suite* $(1 + b_s)$ $(s \in \mathbb{N})$ *de séries formelles est multipliable si et seulement si la suite* (b_s) $(s \in \mathbb{N})$ *est sommable (c'est-à-dire si et seulement si l'ordre de* b_s *tend vers* $+\infty$ *avec* s*).*

Pour tout $s \geq 1$, le polynôme $(1 - u^s)$ a un inverse $(1 - u^s)^{-1}$. D'autre part, la famille $((1 - u^s))$ $(s \geq 1)$ est évidemment multipliable. Il en est de même de la famille $((1 - u^s)^{-1})$ $(s \geq 1)$. Considérons les produits :

$$E(u) = \prod_{s \geq 1} (1 - u^s) = \sum_{n \geq 0} u^n\, e(n) \text{ et } P(u) = \prod_{s \geq 1} (1 - u^s)^{-1} = \sum_{n \geq 0} u^n\, p(n).$$

D'après la Proposition 19.1 (d), on a $P(u).E(u) = 1$ ou encore

$$\prod_{s \geq 1} (1 - u^s)^{-1} = \Big(\prod_{s \geq 1} (1 - u^s)\Big)^{-1}.$$

Ces deux séries ont des interprétations combinatoires remarquables. Donnons d'abord celle de $P(u)$. Pour tout entier $s \geq 1$ posons

$$b_s := \sum_{n \geq 1} u^{sn}, \quad \text{d'où} \quad (1 - u^s)^{-1} = 1 + b_s$$

et

$$b = 1 + \sum_{n\geq 1} u^n\, b(n)$$

le produit de la famille $(1 + b_s)$ $(s \geq 1)$. Utilisant la notation donnée en $(*)$, on a ici $S(0) = \emptyset$. Par ailleurs, $S(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour $n \geq 1$. Le coefficient $b(n)$ de u^n dans la série b est donc égal au coefficient de u^n dans le produit

$$\prod_{1\leq s\leq n} (1 + b_s) = \prod_{1\leq s\leq n} \Bigl(\sum_{j\geq 0} u^{sj}\Bigr)$$

ou encore dans le produit fini des polynômes

$$(1 + u + u^2 + \cdots + u^n)(1 + u^{2\times 1} + u^{2\times 2} + \cdots + u^{2\times n}) \\ \times \cdots \times (1 + u^{n\times 1} + u^{n\times 2} + \cdots + u^{n\times n}).$$

Ainsi $b(n)$ est égal au nombre de suites $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ d'entiers positifs satisfaisant

$$1.m_1 + 2.m_2 + \cdots + n.m_n = n,$$

ou encore au nombre de partitions de l'entier n dont la notation multiplicative est $1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}$. Par conséquent, $b(n) = p(n)$, le nombre de *partitions de l'entier* n. $\square$

La fonction génératrice de la suite $(p(n))$ est ainsi donnée par le produit infini $\prod_{s\geq 1} (1 - u^s)^{-1}$. Le calcul explicite de chaque coefficient $e(n)$ dans le développement du produit infini $E(u)$ peut s'obtenir à l'aide d'un argument combinatoire (*cf.* la construction de Franklin traitée en exercice) ou bien comme une simple conséquence de l'identité dite du triple produit de Jacobi, que nous établissons dans le paragraphe suivant.

20. Le triple produit de Jacobi

Dans ce qui suit x et x^{-1} sont deux variables commutatives satisfaisant l'identité $xx^{-1} = 1$. Il est commode de supposer que l'anneau de base est l'anneau $\Omega[x, x^{-1}]$ des polynômes en les deux variables x et x^{-1}, à coefficients dans un anneau donné Ω. Naturellement, avec l'identité $xx^{-1} = 1$, tout polynôme en les variables x, x^{-1} se réduira en une somme finie de monômes de la forme x^k ou x^{-l} $(k \geq 0,\ l \geq 0)$.

Notons S le produit cartésien $\{-1, +1\} \times \mathbb{N}$ auquel on a retiré le singleton $\{(+1, 0)\}$. A tout couple $(i, j) \in S$ faisons correspondre la série formelle (réduite au polynôme) $a_{i,j} = 1 + x^i u^j$, en la variable u, à coefficients dans $\Omega[x, x^{-1}]$. La famille $(a_{i,j})$ $((i, j) \in S)$ est évidemment multipliable. Avec les notations du paragraphe précédent, on a $S(0) = \{(-1, 0)\}$ et pour $n \geq 1$ l'ensemble $S(n)$ est formé de tous les couples (i, j) tels que, ou bien $i = -1$ et $0 \leq j \leq n$, ou bien $i = 1$ et $1 \leq j \leq n$.

Notons a le produit de cette famille multipliable :

$$a = \prod_{(i,j)\in S} a_{i,j} = (1+x^{-1})(1+x^{-1}u)\dots(1+x^{-1}u^n)\dots$$
$$\times (1+xu)(1+xu^2)\dots(1+xu^n)\dots$$

C'est une série formelle de terme constant $1+x^{-1}$ telle que pour $n\ge 1$ le coefficient de u^n est le coefficient de u^n dans le produit *fini*

$$b_n := \prod_{(i,j)\in S(n)} a_{i,j} = (1+x^{-1})(1+x^{-1}u)\dots(1+x^{-1}u^n)$$
$$\times (1+xu)(1+xu^2)\dots(1+xu^n).$$

Il faut noter que ce coefficient de u^n est en réalité un polynôme de degré au plus égal à n en x et au plus égal à $(n+1)$ en x^{-1}. On peut donc écrire :

$$a = \sum_{n\ge 0} u^n \sum_{-(n+1)\le i\le n} x^i a(i,n);$$
$$b_n = \sum_{0\le j\le n(n+1)} u^j \sum_{-(j+1)\le i\le j} x^i\, b_n(i,j);$$

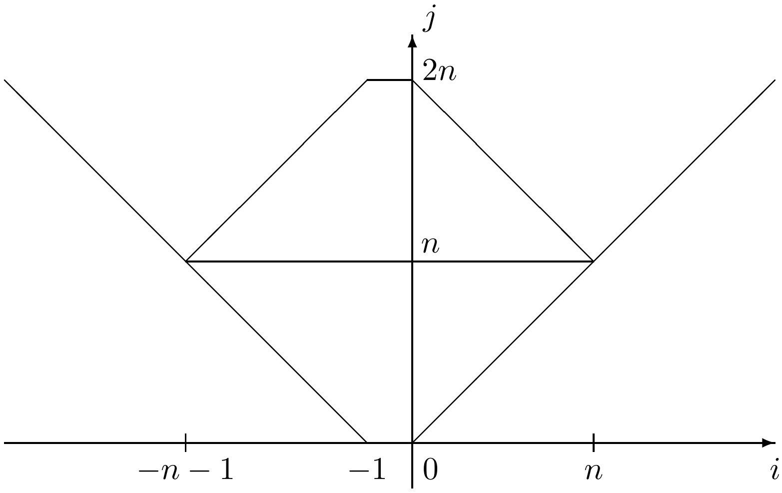


Fig. 8

En fait, les coefficients $b_n(i,j)$ sont nuls en dehors de l'hexagone H_n de sommets $(0,0)$, (n,n), $(0,2n)$, $(-1,2n)$, $(-n-1,n)$, $(-1,0)$ et les coefficients $a(i,j)$ sont nuls en tous les points (i,j) à coordonnées entières non contenus dans l'angle infini A tourné vers le haut et délimité par les droites $i+j=-1$, $i=j$. Ainsi $a(i,j)$ et $b(i,j)$ coïncident pour les points (i,j) communs à H_n et A, situés sur la droite $j=n$ (*cf.* Fig. 8). Ou encore, pour tout $n\ge 0$, on a :

$$\text{(20.1)} \qquad \sum_{-(n+1)\le i\le n} x^i a(i,n) = \sum_{-(n+1)\le i\le n} x^i\, b_n(i,n).$$

D'autre part, l'identité $b_{n+1} = b_n \times (1 + x^{-1}u^{n+1})(1 + xu^{n+1})$ montre que si $0 \le j \le n$, on a forcément pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$b_{n+1}(i,j) = b_n(i,j). \tag{20.2}$$

De (20.1) et (20.2) on déduit, pour $-(n+1) \le i \le n$, l'identité $b_n(i,n) = a(i,n)$, puis pour $-n \le i \le (n-1)$ l'identité $b_n(i,n-1) = b_{n-1}(i,n-1) = a(i,n-1)$, de sorte que pour $0 \le j \le n$ et $-(j+1) \le i \le j$, c'est-à-dire pour $0 \le j \le n$ et $(i,j) \in A \cap H_n$, on a

$$b_n(i,j) = a(i,j). \tag{20.3}$$

Récrivons a sous la forme

$$a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x^i \, a(i, \star),$$

où

$$a(i,\star) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j \ge i} u^j \, a(i,j), & \text{si } i \ge 0\,; \\ \displaystyle\sum_{j \ge |i|-1} u^j \, a(i,j), & \text{si } i \le -1\,; \end{cases}$$

et chaque b_n sous la forme

$$b_n = \sum_{-(n+1) \le i \le n} x^i \, b_n(i,\star),$$

où

$$b_n(i,\star) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \le j \le 2n-i} u^j \, b_n(i,j), & \text{si } i \ge 0\,; \\ \displaystyle\sum_{|i|-1 \le j \le 2n+1-|i|} u^j \, b_n(i,j), & \text{si } i \le -1. \end{cases}$$

L'identité (20.3) entraîne alors que pour $n \ge i \ge 0$ et pour $i \le -1$, $n \ge |i| - 1$ la série $a(i,\star) - b_n(i,\star)$ est d'ordre en u au moins égal à $(n+1)$, un résultat qu'on exprime par

$$b_n(i,\star) \equiv a(i,\star) \pmod{u^{n+1}}. \tag{20.4}$$

Dans

$$\begin{aligned} b_n = b_n(x^{-1}, x; u) = (1 + x^{-1})(1 + x^{-1}u) \cdots (1 + x^{-1}u^n) \\ \times (1 + xu)(1 + xu^2) \cdots (1 + xu^n), \end{aligned}$$

faisons la substitution $x \leftarrow xu^{-1}$, $x^{-1} \leftarrow x^{-1}u$, de sorte que

$$\begin{aligned} b_n(x^{-1}u, x\,u^{-1}; u) = (1+x^{-1}u)(1+x^{-1}u^2)\cdots(1+x^{-1}u^{n+1}) \\ \times (1+x)(1+xu)\cdots(1+xu^{n-1}). \end{aligned}$$

On a immédiatement la relation

$$(1+xu^n)\, b_n(x^{-1}u, x\,u^{-1}; u) = x\, b_n(x^{-1}, x; u),$$

puisque trivialement $x(1+x^{-1}) = (1+x)$. On en tire

$$(1+xu^n) \sum_{-(n+1)\le i\le n} x^i\, u^{-i}\, b_n(i,\star) = \sum_{-(n+1)\le i\le n} x^{i+1} b_n(i,\star).$$

En comparant les coefficients de x^i on en déduit, lorsque $1 \le i \le n$, la formule : $u^{-i}\, b_n(i,\star) + u^{n-i+1} b_n(i-1,\star) = b_n(i-1,\star)$, soit

$$b_n(i,\star) - u^i\, b_n(i-1,\star) \equiv 0 \pmod{u^{n+1}}.$$

Par récurrence sur i on en déduit que pour $1 \le i \le n$ on a

$$b_n(i,\star) \equiv u^{i(i+1)/2}\, b_n(0,\star) \pmod{u^{n+1}}. \tag{20.5}$$

De même,

$$b_n(0,\star) + u^{n+1} b_n(-1,\star) = b_n(-1,\star),$$

soit

$$b(-1,\star) \equiv u^0\, b(0,\star) \pmod{u^{n+1}},$$

puis

$$u\, b_n(-1,\star) + u^{n+2} b_n(-2,\star) = b_n(-2,\star),$$

soit

$$b(-2,\star) \equiv u^1\, b(-1,\star) \equiv u\, b(0,\star) \pmod{u^{n+1}},$$

encore

$$u^2\, b_n(-2,\star) + u^{n+3} b_n(-3,\star) = b_n(-3,\star),$$

soit

$$b(-3,\star) \equiv u^2\, b(-2,\star) \equiv u^{1+2}\, b(0,\star) \pmod{u^{n+1}},$$

d'où par récurrence sur i on a pour $i \le -1$, $n \ge |i| - 1$

$$b(-i,\star) \equiv u^{-i(-i+1)/2}\, b(0,\star) \pmod{u^{n+1}}. \tag{20.6}$$

0n déduit de (20.4), (20.5), (20.6) que pour $0 \le i \le n$ et $i \le -1$, $|i| \le n+1$ on a

$$a(i,\star) \equiv u^{i(i+1)/2} a(0,\star) \pmod{u^{n+1}}$$

et par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'identité

$$a(i,\star) = u^{i(i+1)/2} a(0,\star),$$

ou encore

$$a = a(0,\star) \sum_{i\in\mathbb{Z}} x^i\, u^{i(i+1)/2}.$$

Pour évaluer la série a tout revient à évaluer la série $a(0,\star)$. Or

$$a(0,\star)=\sum_{n\geq 0} u^n\, a(0,n),$$

où $a(0,n)$ est le coefficient de $x^0\, u^n$ dans le produit fini

$$(1+x^{-1})(1+x^{-1}u)\ldots(1+x^{-1}u^n)\times(1+xu)(1+xu^2)\ldots(1+xu^n).$$

Par conséquent, pour $n\geq 1$, le coefficient $a(0,n)$ est égal au nombre de suites $(i_1,i_2,\ldots,i_k,j_1,j_2,\ldots,j_k)$ telles que

(i) $1\leq k\leq n$;

(ii) $0\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$, $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n$;

(iii) $i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k=n$.

Dans une telle suite, on ne peut jamais avoir $i_k=n$, car la condition (iii) ne pourrait être satisfaite. On peut donc remplacer les conditions (ii) et (iii) par

(ii)$'$ $0\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n-1$, $0\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n-1$;

(iii)$'$ $i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k=n-k$.

Or une matrice à deux lignes $\begin{pmatrix} i_k & \ldots & i_2\, i_1\\ j_k & \ldots & j_2\, j_1\end{pmatrix}$ satisfaisant les conditions (i), (ii)$'$, (iii)$'$ n'est autre que le codage de Frobenius d'une partition de l'entier n, de rang k. Par conséquent, $a(0,n)=p(n)$, le nombre de partitions de n et $a(0,\star)=P(u)$.

On en déduit l'identité suivante, connue sous le nom du *triple produit de Jacobi* :

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{-1}u^{n-1})(1+xu^n)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-u^i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x^k\, u^{k(k+1)/2},$$

qu'on écrit plus volontiers comme un “triple produit”

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{-1}u^{n-1})(1+xu^n)(1-u^n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x^k\, u^{k(k+1)/2}.\quad\square$$

L'évaluation de la série $E(u)$ est une simple conséquence de cette identité. Dans l'identité précédente, remplaçons, en effet, u par u^3. On obtient

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{-1}u^{3n-3})(1+xu^{3n})(1-u^{3n})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x^k\, u^{(3k^2+3k)/2}.$$

Remplaçons alors x par $-u^{-1}$. Il vient

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u^{3n-2})(1-u^{3n-1})(1-u^{3n})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\, u^{(3k^2+k)/2}$$

et donc

$$E(u)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\, u^{(3k^2+k)/2}.$$

32. Une combinatoire pour la formule de réversion de Lagrange-Bürmann

Cette formule reste un outil privilégié pour l'inversion de certaines séries. Elle est récemment sortie de son cadre traditionnel analytique pour être absorbée dans les mémoires d'analyse combinatoire, où l'on peut trouver plusieurs interprétations, des extensions à plusieurs variables, ou encore des q-extensions. Le but de ce chapitre est de présenter une démonstration combinatoire de cette formule, inspirée par Raney, Good, Schützenberger. Nous débutons par l'étude d'une certaine classe de mots, dit *langage*, qui intervient également dans la théorie des fluctuations de variables aléatoires.

Partons d'un ensemble dénombrable $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ et formons le monoïde libre X^* engendré par cet ensemble, c'est-à-dire, l'ensemble de tous les mots finis dont les lettres sont des éléments de X. On suppose donné un homomorphisme de monoïde σ de X dans le groupe additif $\mathbb{Z}$, défini par

$$\sigma(x_i) = i - 1 \qquad (i \in \mathbb{Z}),$$

de sorte que l'image d'un mot $w = y_1 y_2 \dots y_n$ par l'homomorphisme σ est donné par :

$$\sigma(w) = \sigma(y_1) + \sigma(y_2) + \cdots + \sigma(y_n).$$

Il faut noter que la lettre x_0 est le seul élément de X dont l'image par σ estt (strictement) négative (égale à -1).

On note L le sous-ensemble de X^* formé par tous les mots w tels que $\sigma(w) = -1$, dont tous les facteurs gauches propres w' ont une image *positive* sous σ. En d'autres termes, on a $w \in L$, ssi $\sigma(w) = -1$, et si pour toute factorisation (w', w'') de w telle que w'' est non vide, on a $\sigma(w') \geq 0$. Cette définition implique donc que tous les mots de L se terminent par x_0

Il est commode de représenter les mots $w = y_1 y_2 \dots y_n$ de X^* comme des lignes polygonales dans le plan joignant les points du plan $(0,0)$, $(1, \sigma(y_1))$, $(2, \sigma(y_1 y_2))$; … , $(n, \sigma(w))$. Naturellement, cette représentation n'est pas biunivoque, car σ n'est pas forcément injectif, mais toutes les propriétés de L qui sont énoncées ci-dessous ont une démonstration très parlante dans cette représentation géométrique. Ainsi les mots de L sont les mots w dont la ligne polygonale aboutit à un point d'ordonnée -1 et qui est entièrement située *au-dessus* de la corde $(0,0)$-$(|w|, -1)$ (*cf.* Fig.1).

Proposition 21.1.

(i) *Tout mot non-vide w de X^* a au plus un facteur gauche dans L.*

(ii) *Il en a exactement un si $\sigma(w) \leq -1$.*

(iii) *Il appartient à L^k $(k \geq 1)$, ssi $\sigma(w') > \sigma(w) = -k$, pour tout facteur gauche propre w' de w.*

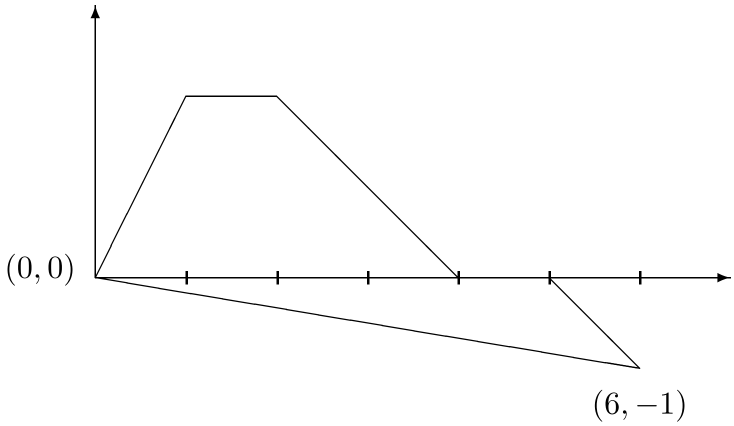


Fig. 1

On peut simplement dire que cette proposition découle de l'analogue discret du thèorème sur la valeur intermédiaire. $\square$

Proposition 21.2. — *Le langage L est défini par l'équation non-ambiguë :*

$$L = \sum_{i \geq 0} x_i \, L^i.$$

De façon équivalente, soit y_1 la première lettre d'un mot w de L. Alors w a une factorisation unique $y_1 \, w_2 \, w_3 \, \ldots \, w_i$, où w_1, w_2, $\ldots$, w_i sont des mots de L.

De nouveau, on peut invoquer cet analogue discret du théorème sur la valeur intermédiaire, en notant une nouvelle fois que la ligne polygonale associée à un mot ne peut décroître à chaque étape que d'une unité (lorsque la lettre correspondante est égale à x_0). $\square$

Proposition 21.3. — *Chaque mot w d'image par σ égale à $-k$ ($k \geq 1$) admet exactement k factorisations distinctes $w = w'_j \, w''_j$ ($j = 1, 2, \ldots, k$) dont le réarrangement circulaire $w''_j \, w'_j$ appartienne à L^k.*

Pour la démonstration, il suffit de considérer le mot w' qui est le plus court facteur gauche de w, tel que $\sigma(w') \leq \sigma(v')$ pour tout facteur gauche v' de w. Posant $w = w'w''$, on voit alors que le réarrangement circulaire $w''w'$ appartient bien à L^k (*cf.* Fig. 2). $\square$

On forme maintenant l'algèbre large $\mathcal{A}$ sur un corps K du monoïde abélien libre engendré par l'ensemble $\{u\} \cup X$. En d'autres termes, on considère l'algèbre de toutes les séries formelles à coefficients dans K dont les variables (commutatives) sont prises dans l'ensemble $\{u\} \cup X$. On peut définir sur $\mathcal{A}$ la *dérivation* partielle ∂ telle que

$$\partial u^n = n u^{n-1} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

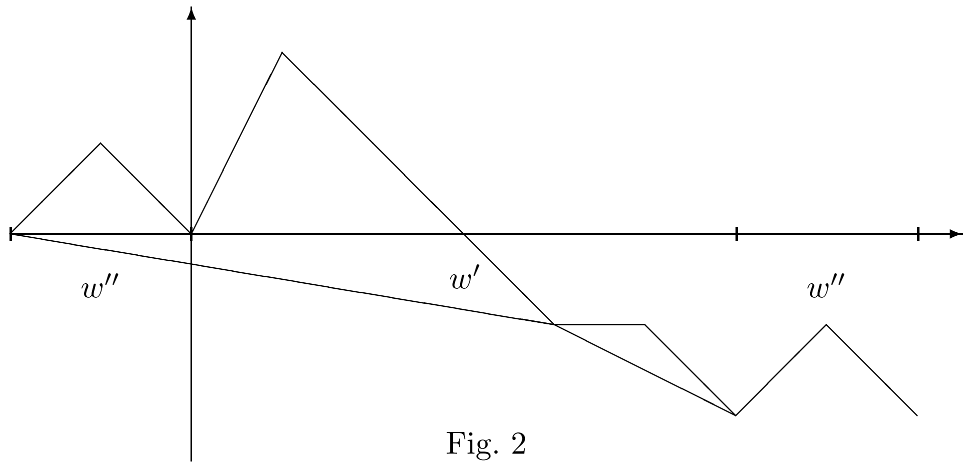


Fig. 2

On note également α l'homomorphisme canonique du monoïde libre X^* sur le monoïde abélien libre X^+. Cet homomorphisme envoie tout *mot* $w = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ de X^* sur le *monôme* (commutatif)

$$\alpha(w) = \prod_{k \geq 0} x_k^{n_k},$$

où pour tout $k \geq 0$ l'entier n_k est le nombre d'indices i_j tels que $1 \leq j \leq n$ et $i_j = k$. On prolonge naturellement la définition de α aux sous-ensembles de X^*. Par exemple, $\alpha(X^m \cap L^r)$ désigne l'ensemble de tous les monômes commutatifs qui sont des images de mots de longueur m et qui sont aussi des produits (de juxtaposition) de r mots de L.

Proposition 21.4. — *Considérons la série formelle appartenant à l'algèbre $\mathcal{A}$ (à variables commutatives)*

$$F = F(u) = \sum_{i \geq 0} x_i u^i.$$

Alors pour tout $m \geq 0$ et tout $r \geq 0$ on a :

$$\frac{1}{m!} \Big[\partial^{m-1} \big(r u^{r-1} F^m \big) \Big]_{u \,=\, 0} = \alpha(X^m \cap L^r). \tag{21.1}$$

Démonstration. — Le membre de gauche de (21.1) est égal à

$$\frac{1}{m!} (m-1)! \, rG,$$

où G est le coefficient de u^{m-1} dans $u^{r-1} F^m$. Il est donc nul pour $r \geq m+1$ et pour $r \leq m$ il est égal à $(1/m) rG$, où G est le coefficient de u^{m-r} dans

F^m. Or F^m peut s'écrire :

$$\begin{aligned}F^m &= \sum_{i_1,\ldots,i_m} \alpha(x_{i_1}\ldots x_{i_m})u^{i_1+\cdots+i_m}\\ &= \sum_{w\in X^m} \alpha(w)u^{\sigma(w)+|w|} = \sum_{n\geq 0} u^n \sum_{\substack{w\in X^m\\ \sigma(w)+m=n}} \alpha(w).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$G = \sum_{\substack{w\in X^m\\ \sigma(w)+m=m-r}} \alpha(w) = \alpha\big(X^m \cap \sigma^{-1}(-r)\big).$$

Dans cette dernière expression, on peut déjà faire une première sommation suivant les classes de mots conjugués, c'est-à-dire, suivant les classes de mots qui sont égaux à un réarrangement *circulaire* près. Si C est une telle classe de mots appartenant à $X^m \cap \sigma^{-1}(-r)$, on sait, d'après la proposition 1.3, que parmi les m éléments de C il y a exactement r mots appartenant à L^r. Comme tous ces mots on la même image abélienne, on peut écrire pour tout $w \in C$:

$$r\alpha(C) = rm\alpha(w) = m\alpha(C \cap L^r).$$

Par conséquent :

$$r\alpha\big(X^m \cap \sigma^{-1}(-r)\big) = m\alpha\big(X^m \cap L^r\big).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\Big[\partial^{m-1}\big(ru^{r-1}F^m\big)\Big]_{u\,=\,0} = \frac{r}{m}G &= \frac{r}{m}\alpha\big(X^m \cap \sigma^{-1}(-r)\big)\\ &= \frac{r}{m}\frac{m}{r}\alpha\big(X^m \cap L^r\big). \quad \square\end{aligned}$$

On est maintenant armé pour énoncer et démontrer la formule de réversion de Lagrange-Bürmann :

Théorème 21.5. — *Soit $H(u) = \sum_{i\geq 0} h_i u^i$ une série formelle en la variable u à coefficients dans un corps K. Soit, d'autre part, z la série formelle solution de :*

$$z = u\,F(z).$$

Alors

$$H(z) = h_0 + \sum_{m\geq 1} \frac{u^m}{m!}\Big[\partial^{m-1}\big(F^m \partial H(u)\big)\Big]_{u\,=\,0}.$$

Démonstration. — Notons τ l'homomorphisme allant de X^* dans le monoïde abélien libre $(\{u\} \cup X)^+$ tel que :

$$\tau(x_i) = u\, x_i \qquad \text{pour tout } i \geq 0.$$

D'après la proposition 21.2, on a

$$\tau(L) = \sum_{i \geq 0} \tau(x_i)\tau(L^i) = u \sum_{i \geq 0} x_i \bigl(\tau(L)\bigr)^i,$$

soit

$$\tau(L) = uF\bigl(\tau(L)\bigr).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \tau(L^r) &= \tau\Bigl(\sum_{m \geq 1} (X^m \cap L^r)\Bigr) = \sum_{m \geq 1} \tau(X^m \cap L^r) \\ &= \sum_{m \geq 1} u^m \alpha(X^m \cap L^r). \end{aligned} \tag{2.2}$$

La proposition 21.4 entraîne alors :

$$\begin{aligned} H\bigl(\tau(L)\bigr) &= h_0 + \sum_{r \geq 1} h_r \tau(L^r) = h_0 + \sum_{r \geq 1} h_r \sum_{m \geq 1} u^m \alpha(X^m \cap L^r) \\ &= h_0 + \sum_{r \geq 1} h_r \sum_{m \geq 1} \frac{u^m}{m!} \Bigl[\partial^{m-1}\bigl(r u^{r-1} F^m\bigr)\Bigr]_{u\,=\,0} \\ &= h_0 + \sum_{m \geq 1} \frac{u^m}{m!} \Bigl[\partial^{m-1}\Bigl(\sum_{r \geq 1} r h_r u^{r-1} F^m\Bigr)\Bigr]_{u\,=\,0} \\ &= h_0 + \sum_{m \geq 1} \frac{u^m}{m!} \Bigl[\partial^{m-1}(\partial H(u) F^m)\Bigr]_{u\,=\,0} \qquad \square \end{aligned}$$

En prenant $H(u) = u$, on obtient l'énoncé suivant :

COROLLAIRE 21.6. — *Si z est solution de $z = uF(z)$, où $F = \sum_{i \geq 0} x_i u^i$, alors z est donné par :*

$$z = \sum_{m \geq 1} \frac{u^m}{m!} \Bigl[\partial^{m-1} F^m\Bigr]_{u\,=\,0}$$

Notes

Ce chapitre qui devait être initialement réduit à un appendice, a pris trop d'importance pour rester dans cet état. Il fallait bien rappeler les principes de base de l'algèbre et de la topologie des séries formelles et ils sont nombreux : sommabilité, multipliabilité, dérivation, intégration, réversion, transformation de Laplace, exponentiation. Il nous a paru important d'inclure aussi des techniques combinatoires, d'expliquer comment certains problèmes d'énumération trouvent leur solution naturelle dans une série génératrice bien choisie. On trouve ainsi dans ce chapitre un exposé sur le modèle des *composés partitionnels*, qui permet de traiter commodément plusieurs problèmes d'énumération. Ce modèle a été algébrisé de façon élégante par l'école montréalaise (voir Bergeron, Labelle et Leroux [Be94]), à l'aide de la théorie des *espèces*.

On peut trouver un bon exposé sur la topologie des séries formelles dans les manuels de Cartan [Ca62] et de Henrici [He74]. On trouve aussi dans ce dernier ouvrage un exposé solide sur les séries hypergéométriques dans le cadre formel.

Certains des exercices de ce chapitre sont originaux ; d'autres sont très classiques ; d'autres, enfin, reprennent des résultats tirés d'articles divers.

Beaucoup de livres traitent de fonctions génératrices. Le grand classique du début du siècle est le traité de MacMahon [Mac15], qui reste toujours d'actualité. Un autre grand classique est l'ouvrage de Riordan [Ri58] encore très attaché au calcul symbolique ou ombral remis en faveur par Rota et son école (voir [Ro75]). On doit à Comtet ([Co70] et [Co74] pour la traduction anglaise du même livre) d'avoir réuni dans un ouvrage concis beaucoup de résultats divers. L'ouvrage de Goulden et Jackson [GoJa83] est beaucoup plus ambitieux. C'est une tentative de théorisation de beaucoup de techniques d'énumération, tout comme le traité de Stanley [St86], plus orienté vers ce que l'on appelle aujourd'hui la combinatoire algébrique. Graham, Knuth et Patashnik [Gr88] englobent un traitement des fonctions génératrices dans une théorie des mathématiques "concrètes" très séduisante à la fois pour les informaticiens et les mathématiciens. Enfin, on trouve dans le manuel de Wilf [Wi90] une introduction facile et élégante à l'étude des fonctions génératrices.

BIBLIOGRAPHIE

[Be94] François Bergeron, Gilbert Labelle, Pierre Leroux. — *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes.* — LACIM, Université du Québec à Montréal, 1994.

[Ca62] Henri Cartan. — *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables complexes.* — Paris, Hermann, 1962.

[Co70] Louis Comtet. — *Analyse combinatoire,* vol. 1 et 2. — Paris, Presses Universitaires de France, 1970.

[Co74] Louis Comtet. — *Advanced Combinatorics.* — Boston, Dordrecht, 1974.

[GoJa83] I. P. Goulden, D. M. Jackson. — *Combinatorial Enumeration.* — New York, John Wiley, 1983.

[Gr88] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik. — *Concrete Mathematics.* — Reading, Addison-Wesley, 1988.

[He74] Peter Henrici. — *Applied and Computational Complex Analysis,* vol. 1. New York, John Wiley, 1974.

[Mac15] (Major) P.A. MacMahon. — *Combinatory Analysis,* vol. 1. — Cambridge Univ. Press, 1915, Cambridge (Reprinted by Chelsea, New York, 1955).

[Ri58] John Riordan. — *An Introduction to Combinatorial Analysis.* — New York, John Wiley, 1958.

[Ro75] Gian-Carlo Rota. — *Finite Operator Calculus.* — Boston, Academic Press, 1975.

[St86] Richard P. Stanley. — *Enumerative Combinatorics,* vol. 1. — Wadsworth & Brooks, Monterey, 1986.

[Wi90] Herbert S. Wilf. — *Generatingfunctionology.* — Boston, Academic Press, 1990.

Exercices et compléments

1. — Dans $\mathbb{Z}[[u]]$ la famille $(a_s)_{s\in\mathbb{N}}$ définie par $a_s = \sum\limits_{n\ge 0} s u^n$ n'est pas sommable.

2. — Pour tout $s \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, soit a_s la série formelle à coefficients entiers
$$a_s = \sum_{n\ge 1} u^{ns}.$$
La famille (a_s) est sommable et la somme de cette famille peut être déterminée.

3. — Soit $S = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $(a_s)_{s\in S}$ la famille définie par
$$a_1 = \sum_{n\ge 1} u^n \qquad \text{et} \qquad a_s = \sum_{\substack{n\ge s+1\\ \mathrm{pgcd}(s,n)=1}} u^n \quad (s\ge 2).$$
Cette famille est sommable et sa somme est égale à $a = \sum_{n\ge 1} u^n \varphi(n)$, où $\varphi(n)$ est la fonction d'Euler, égale au nombre des entiers inférieurs à n et premiers avec celui-ci.

4. — La série formelle $1 - u - u^2 + u^3$ est inversible dans $\mathbb{Q}[[u]]$. On pose
$$\sum_{n\ge 0} u^n a(n) = (1 - u - u^2 + u^3)^{-1}.$$
Pour $n \ge 1$ le coefficient $a(n)$ est égal au nombre de suites (n_1, n_2) d'entiers positifs satisfaisant à $n_1 + 2n_2 = n$.

5. — Soit $\mathbb{Z}_6$ l'anneau des entiers modulo 6. Dans l'algèbre $\mathbb{Z}_6[[u]]$, on considère les séries formelles
$$a = \sum_{n\ge 1} (3n) u^n \qquad b = \sum_{n\ge 1} (2n) u^n.$$
Quel est l'ordre de la série $a \circ b$?

6. — Soient (a_s) et (b_s) $(s \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ deux familles de séries formelles définies par :
$$a_s = \frac{s\,u^s}{1-u^s}; \qquad b_s = \frac{u^s}{(1-u^s)^2}.$$
Les familles (a_s) et (b_s) sont sommables et l'on a : $\sum\limits_{s\ge1} a_s = \sum\limits_{s\ge1} b_s$. (∗)

7. — Soient (a_s) et (b_s) $(s \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ deux familles de séries formelles définies par :
$$a_s = \frac{u^s}{1-u^s}; \qquad b_s = u^{s^2}\frac{1+u^s}{1-u^s}.$$
Les familles (a_s) et (b_s) sont sommables et l'on a : $\sum\limits_{s\ge1} a_s = \sum\limits_{s\ge1} b_s$.

8. — Soient (a_s) et (b_s) $(s \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ deux familles de séries formelles définies par :
$$a_s = \frac{u^{2s-1}}{1+u^{4s-2}}; \qquad b_s = (-1)^{s-1}\frac{u^{2s-1}}{1-u^{4s-2}}.$$
Les familles (a_s) et (b_s) sont sommables et leurs sommes respectives a et b sont égales.

9. *La formule binomiale par récurrence.* — Pour tout entier $m \ge 1$ on pose $a_m = (1-u)^{-m}$. On a les relations : $a_1(n) = 1$ $(n \ge 0)$; $a_m(0) = 1$ $(m \ge 1)$ et $a_m(n) = a_m(n-1) + a_{m-1}(n)$ $(n \ge 1,\ m \ge 2)$. On en déduit l'identité binomiale, c'est-à-dire $a_m(n) = \binom{n+m-1}{n} = (m)_n/n!$

10. *Les nombres de Fibonacci.* — La suite des nombres de Fibonacci $(F(n))$ $(n = 0, 1, \ldots)$ est définie par la relation de récurrence $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ $(n \ge 2)$, avec les conditions initiales $F(0) = F(1) = 1$. On pose $F = \sum\limits_{n\ge0} F(n)\,u^n$.

a) On a : $F = \dfrac{1}{1-u-u^2}$.

b) On pose $a_s = (u+u^2)^s$. Alors $F = \sum_{s\ge0} a_s$ et en calculant $a_s(n)$ on en déduit une expression du coefficient $F(n)$ comme somme de coefficients binomiaux.

11. — On définit par récurrence :
$$a_0 = 1\,; \qquad a_s = \frac{su}{1+su}a_{s-1} \quad (s \ge 1).$$

(∗) Les exercices 6, 7, 8, 11, 12 et 13 nous ont été aimablement fournis par Dominique Dumont.

a) La famille (a_s) $(s \in \mathbb{N})$ est sommable.

b) On a : $a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \cdots + \dfrac{a_s}{s} = u(1-a_s)$, d'où l'on tire : $\sum\limits_{s\ge1} \dfrac{a_s}{s} = u$.

c) On pose $h = u(1-u)^{-1}$. On montre que $a_s \circ h = s\,u\,a_{s-1}$ $(s \ge 1)$, d'où l'on peut déduire la valeur de $\sum\limits_{s\ge0} a_s$.

12. — Soit k un entier positif fixé. On considère l'équation différentielle : $y' = k\,y$, $y(0) = 1$, dans l'algèbre $\mathbb{Q}[[u]]$.

a) Cette équation possède une solution unique donnée par $y = \exp(ku)$.

b) On en déduit l'égalité : $(\exp u)^k = \exp(ku)$.

13. — On considère l'équation différentielle : $y' = y^3$; $y(0) = 1$.

a) On a $y^{(n)} = a_n\,y^{2n+1}$ $(n \ge 0)$, où (a_n) est une suite d'entiers à déterminer. On en déduit $y(n) = a_n/n!$ $(n \ge 0)$, c'est-à-dire $y = \sum\limits_{n\ge0} \dfrac{a_n}{n!} u^n$.

b) Soit $z = y^2$. Il est aisé de trouver une équation différentielle satisfaite par z et d'en déduire la valeur de $z(n)$ $(n \ge 0)$. On établit ainsi l'identité : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k\, a_{n-k} = 2^n\, n!$

14. *Nombres de Catalan et réversion de Lagrange.* — On considère la récurrence :

$$C(1) = 1; \qquad C(n+1) = \sum_{k=1}^{n} C(k)\,C(n+1-k) \quad (n \ge 1).$$

Les coefficients $C(2) = 1$, $C(3) = 2$, … sont dits *nombres de Catalan.* On pose $C = \sum\limits_{n\ge1} C(n)\,u^n$.

a) On a : $a \circ C = u$, où $a = u - u^2$.

b) On en déduit une expression pour $C(n)$ par la formule de réversion de Lagrange.

15. — Soit $a = u - u^2$ et $c = a^{[-1]}$.

a) Le premier énoncé sur la formule de réversion de Lagrange permet d'obtenir la valeur des coefficients $c^m(n)$ de la série puissance c^m.

b) Soient p et q deux séries formelles d'ordre un telles que $p = q \circ a$. Alors

$$p(n) = \sum_{n/2 \le k \le n} (-1)^{n-k} \binom{k}{n-k} q(k) \qquad (n \ge 1).$$

c) On en déduit : $n\,q(n) = \sum\limits_{1\le k\le n} \dbinom{2n-k-1}{n-k} k\,p(k) \quad (n \ge 1).$

16. *Involutions et polynômes d'Hermite.* — Soit I_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $[\,n\,]$, c'est-à-dire l'ensemble des permutations σ de $[\,n\,]$ telles que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ ou encore des permutations dont la décomposition en cycles ne comporte que des points fixes et des transpositions. On note $\operatorname{fix}\sigma$ (resp. $\operatorname{trans}\sigma$) le nombre de points fixes (resp. de transpositions) de l'involution σ et on forme le polynôme

$$H_n(x,y) = \sum_{\sigma \in I_n} x^{\operatorname{fix}\sigma} y^{\operatorname{trans}\sigma} \quad (n \geq 0).$$

a) On a $H_0(x,y) = 1$, $H_1(x,y) = x$ et pour $n \geq 2$ la relation de récurrence : $H_n(x,y) = x\,H_{n-1}(x,y) + (n-1)\,y\,H_{n-2}(x,y)$.

b) Par le Théorème 13.1, on obtient :

$$\sum_{n \geq 0} H_n(x,y)\frac{u^n}{n!} = \exp\Bigl(xu + y\frac{u^2}{2}\Bigr).$$

c) Pour $n \geq 0$, on a : $H_n(x,y) = \sum\limits_{i+2j=n} (n!/(i!\,2^j\,j!))\,x^i y^j$. Les coefficients peuvent s'obtenir à partir de la formule obtenue en b) en utilisant la formule (13.4) ou par un simple argument de comptage.

d) Le nombre d'involutions sans point fixe sur $[\,2n\,]$, soit $H_{2n}(0,1)$, est donné par $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$. Les polynômes d'Hermite classiques sont obtenus en faisant les substitutions $x \leftarrow 2x$, $y \leftarrow -2$.

17. $(*)$ *Fonctions sinus et Arcsinus.* — On définit

$$\sin u := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}; \qquad \cos u := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!};$$

et on a défini $\operatorname{Arcsin}(u)$ comme étant l'intégrale en 0 de la série ${}_1F_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{1/2}{-}; u^2\Bigr)$. Si l'anneau de base est le corps des complexes, on peut exprimer $\sin u$ et $\cos u$ par les formules habituelles en fonction des exponentielles $\exp(iu)$ et $\exp(-iu)$ et établir facilement : $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$.

Les deux séries $\sin u$ et $\operatorname{Arcsin}(u)$ sont sans terme constant et leurs coefficients de u ne sont pas nuls. Ces deux séries sont réverses l'une de l'autre : $\operatorname{Arcsin}(\sin u) = u$; $\sin(\operatorname{Arcsin}(u)) = u$. Il suffit d'établir la première de ces formules, en prouvant d'abord que l'on a : $\cos u = {}_1F_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{-1/2}{-}; \sin^2 u\Bigr)$.

$(*)$ Cet exercice nous a été aimablement proposé par Jean-Pierre Jouanolou.

18. — Faisant usage du Corollaire 5.3, on établit directement que $\mathrm{Arcsin}\, u$ est la série réverse de $\sin u$. On peut définir $\mathrm{tg}\, u$ comme $\sin u / \cos u$. D'autre part, $\mathrm{arctg}\, u$, telle que la série est définie dans le paragraphe 8, est aussi l'intégrale en 0 de $(1+u^2)^{-1}$. Par la même technique, on établit que la série réverse de $\mathrm{tg}\, u$ est $\mathrm{arctg}\, u$.

19. — Déterminer la fonction génératrice ordinaire de la suite $a(n) = n^m$ (m entier strictement positif donné), ainsi que la fonction génératrice ordinaire de la suite $a(n) = P(n)$, où P est un polynôme donné de degré m.

20. — Soit $f(u)$ (resp. $F(u)$) la fonction génératrice ordinaire (resp. exponentielle) de la suite $(a(n))$ $(n \ge 0)$. Exprimer en fonction de $f(u)$ (resp. de $F(u)$) la fonction génératrice ordinaire (resp. exponentielle) de la suite $(\alpha a(n+2) + \beta a(n+1) + \gamma a(n))$ $(n \ge 0)$, où α, β, γ sont des scalaires donnés.

21. — La suite $(a(n))$ $(n \ge 0)$ satisfait à la relation de récurrence $a(n+2) = 2\,a(n+1) - a(n)$ $(n \ge 0,\ a(0) = 0,\ a(1) = 1)$. Trouver la fonction génératrice ordinaire $f(u)$ (resp. exponentielle $F(u)$) de la suite $(a(n))$.

22. — Pour chaque entier $n \ge 0$, on note B_n le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bell, c'est-à-dire, le nombre de partitions (en sous-ensembles disjoints) de l'intervalle $[\,n\,]$. [Par convention : $B_0 = 1$.] Etablir la récurrence :

$$B_n = \sum_k \binom{n-1}{k} B_k \qquad (n \ge 1).$$

Montrer que la fonction génératrice exponentielle des nombres de Bell B_n $(n \ge 0)$ est donnée par : $\exp(\exp(u) - 1)$. (Utiliser le Théorème 13.1.)

23. — Soit $(J_1, J_2, \dots, J_p)$ une suite de p parties non vides de $\mathbb{N}$. On note $P(n, p; J)$ le sous-ensemble des partitions ordonnées $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ de n satisfaisant aux conditions : $n_1 \in J_1$, $n_2 \in J_2$, $\dots$, $n_p \in J_p$.

(a) Montrer que la fonction génératrice ordinaire de la suite $(\mathrm{card}\, P(n, p; J))$ $(n \ge 0)$ est donnée par :

$$\Bigl(\sum_{n \in J_1} u^n\Bigr)\Bigl(\sum_{n \in J_2} u^n\Bigr) \dots \Bigl(\sum_{n \in J_p} u^n\Bigr).$$

(b) Evaluer directement $P(n, p; J)$ lorsque $J_1 = J_2 = \dots = J_p = \mathbb{N}$, pour retrouver le développement de $(\sum_{n \ge 0} u^n)^p$.

(c) Evaluer directement $P(n,p;j)$ lorsque $J_1 = J_2 = \cdots = J_p = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, pour trouver le développement de $(\sum_{n\geq 1} u^n)^p$.

(d) Supposons que nous ayons 18 "instructions", qu'on ne peut distinguer, à répartir dans 4 mémoires, chaque mémoire devant recevoir nécessairement un nombre pair non nul d'instructions. Combien y a-t-il de façons de remplir ces quatre mémoires ?

24. — Soit $(J_1, J_2, \ldots, J_p)$ une suite de p parties non vides de $\mathbb{N}$. On note $F(n,p;J)$ le sous-ensemble des applications f de $[\,n\,]$ dans $[\,p\,]$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\operatorname{card} f^{-1}(1) \in J_1,\ \operatorname{card} f^{-1}(2) \in J_2,\ \ldots\ \operatorname{card} f^{-1}(p) \in J_p.$$

(a) Montrer que l'on a :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} \operatorname{card} F(n,p;J) = \Bigl(\sum_{n\in J_1} \frac{u^n}{n!}\Bigr)\Bigl(\sum_{n\in J_2} \frac{u^n}{n!}\Bigr)\cdots\Bigl(\sum_{n\in J_p} \frac{u^n}{n!}\Bigr).$$

(b) Pour $J_1 = J_2 = \cdots = J_p = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ quels sont les nombres qui apparaissent dans l'identité précédente ? Ecrire l'identité obtenue.

(c) Trouver le nombre de mots de longueur n, dans l'alphabet $\{a,b,c,d\}$, contenant un nombre pair de a et au moins une fois la lettre b.

25. — Soit a la série en la variable u définie par $a = u\,e^{-u}$.

(a) Trouver sa série réverse.

Soit b la série formelle en la variable u solution de l'équation $u\,e^b = b$. En déduire :

(b) $b = \sum\limits_{n\geq 1} u^n\, n^{n-1}/n!$

(c) $e^{\alpha\, b} = 1 + \sum\limits_{n\geq 1} u^n\, \alpha(\alpha+n)^{n-1}/n!$

(d) $e^{\alpha\, b}/(1-b) = 1 + \sum\limits_{n\geq 1} u^n\, (\alpha+n)^n/n!$

26. — On a l'identité

$$\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} [D^n(1+u+u^2)^n]_{u=0} = (1-2u-3u^2)^{-1/2}.$$

27. — Le développement en série de la fraction continue formelle

$$b(u) = \cfrac{u}{1+\cfrac{u}{1+\cfrac{u}{1+\cfrac{u}{\ddots}}}}$$

peut s'obtenir à partir de la formule de réversion de Lagrange. Les coefficients de cette série sont les nombres de Catalan signés.

28. — Soit $(a(i,j))$ les coefficients d'une matrice de Seidel (*cf.* § 12), définis à partir d'une suite initiale $a(0,j)$ $(j=0,1,\ldots)$. On rappelle que $a(i,j)=a(i-1,j)+a(i-1,j+1)$ $(i\ge 1,\, j\ge 0)$. Pour $i,j\ge 0$, on note $T_{i,0}\,a$ (resp. $T_{0,j}\,a$) (T pour “transversale”) la fonction génératrice de la diagonale issue du point $(i,0)$ (resp. de la diagonale issue du point $(0,j)$), de la matrice de Seidel $(a(i,j))$. Autrement dit,

$$T_{i,0}\,a=\sum_{j\ge 0} a(i+j,j)\,u^j;\qquad T_{0,j}\,a=\sum_{i\ge 0} a(i,i+j)\,u^i.$$

Ces fonctions génératrices s'expriment en fonction de la fonction génératrice $a(0,*)$ de la suite initiale $(a(0,j))$. On a :

(a) $T_{i,0}\,a\circ\Bigl(\dfrac{b^2}{1+b}\Bigr)=\dfrac{1+b}{2+b}\,(1+b^{-1})^i\,a(0,*)\circ b\,;$

(b) $T_{0,j}\,a\circ\Bigl(\dfrac{b^2}{1+b}\Bigr)=\dfrac{1+b}{2+b}\,b^{-j}\,a(0,*)\circ b\,;$

où la série b satisfait $b^2=u(1+b)$. Les identités s'obtiennent à l'aide de la formule de réversion de Lagrange.

29. *Les polynômes de Laguerre.* — Soit S un ensemble fini. Une *configuration de Laguerre* sur S est définie comme un triplet (A,B,τ), où (A,B) est une partition ordonnée de S et τ une injection de A dans $A+B$. Dans le paragraphe 9, on a vu qu'une telle injection était composée de cycles entièrement contenus dans A et de chemins ayant leur but dans B. Parmi ces derniers il y a ceux de longueur non nulle qui ont leur origine dans A et ceux de longueur nulle réduits à un seul sommet de B. Le nombre de chemins est donc égal au cardinal de B. Si X et Y sont deux variables, on définit le *poids* de la configuration (A,B,τ) par $w_\beta(A,B,\tau)=\beta^{\operatorname{cyc}\tau}\,X^{|A|}\,Y^{|B|}$, où $\operatorname{cyc}\tau$ est le nombre de cycles de τ (*cf.* § 9) et $|A|$, $|B|$ désignent les cardinaux de A et B.

(a) La fonction génératrice de toutes les configurations de Laguerre sur un ensemble S de cardinal n par le poids w_β est donnée par

$$\mathcal{L}_n(\beta,X,Y)=\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}(\beta+j)_i\,X^i\,Y^j.$$

(b) La fonction génératrice exponentielle des polynômes $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\beta^{\operatorname{cyc}\sigma}$ $(n\ge 0)$, c'est-à-dire $\sum\limits_{n\ge 0}\dfrac{u^n}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\beta^{\operatorname{cyc}\sigma}$, est donnée par ${}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}\beta\\ -\end{matrix};u\Bigr)=(1-u)^{-\beta}$.

(c) Une *partition linéarisée* d'un ensemble fini S est définie comme une partition $\pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ de S en blocs A_i non vides et pour chaque A_i d'un ordre total (ou *linéaire*) sur A_i. L'entier k est le *nombre de blocs* de π, que l'on note $\operatorname{bloc}\pi$. On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions linéarisées sur $[\,n\,]$. La fonction génératrice exponentielle des polynômes $a_n(Y)=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} Y^{\operatorname{bloc}\pi}$ $(n\ge 0)$ est donnée par

$$\sum_{n\ge 0}\frac{u^n}{n!}\,a_n(Y)=\exp\Bigl(\frac{Y\,u}{1-u}\Bigr).$$

(d) On a :

$$\sum_{n\ge 0}\frac{u^n}{n!}\mathcal{L}_n(\beta,X,Y)=(1-u\,X)^{-\beta}\exp\Bigl(\frac{Y\,u}{1-u\,X}\Bigr).$$

Le polynôme de Laguerre classique $L_n^{(\alpha)}(x)$ se déduit du polynôme $\mathcal{L}_n(\beta,X,Y)$ par multiplication par $n!$ et en posant $\beta=\alpha+1$, $X=1$ et $Y=-x$.

30. *Graphes bicoloriés.* — Dans cet exercice, on utilise la terminologie usuelle des graphes. Un graphe est dit *étiqueté* si on a donné des "étiquettes" à ses sommets. Il est dit *non orienté* si les arêtes joignant deux sommets ne sont pas orientées. On dit qu'un graphe étiqueté, non orienté, défini sur un ensemble S est *bicolorié* si de tout sommet de S partent exactement une arête coloriée bleue et une arête coloriée rouge, ces arêtes pouvant être des boucles joignant le sommet à lui-même.

(a) Tout graphe bicolorié sur un ensemble S fini de sommets a des composantes connexes de la forme indiquée dans la figure 3, où le trait continu (resp. pointillé) représente la couleur bleue (resp. rouge) et où les sommets sont représentés par des points

(A)

(B)

(C)

(D)

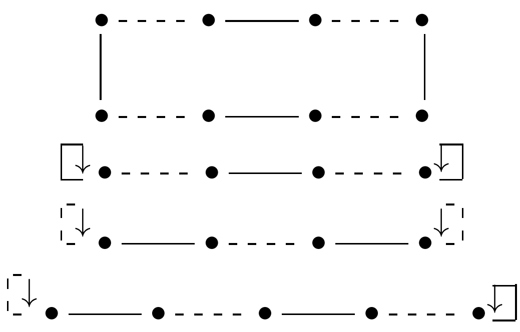


Fig. 3

(b) Le nombre de graphes bicoloriés ayant un nombre pair $2n$ de sommets et seulement des composantes connexes de type (A) est égal à $(1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1))^2$, qu'on note encore $((2n-1)!!)^2$.

(c) Soient x,y,ξ,η des variables. On appelle *biarête* une arête joignant deux sommets distincts ou, si l'on veut, une arête qui n'est pas une boucle.

On donne le poids x (resp. y, resp. ξ, resp. η) à une boucle bleue (resp. à une biarête bleue, resp. à une boucle rouge, resp. à une biarête rouge). Le poids d'un graphe est défini comme le produit des poids de ses boucles et biarêtes. La fonction génératrice exponentielle des graphes bicoloriés n'ayant que des composantes connexes de type (A) par leur poids est égale à : $(1-y\,\eta\,u^2)^{-1/2}$.

(d) La fonction génératrice exponentielle des graphes bicoloriés n'ayant que des composantes connexes de type (B) (resp. de type (C), resp. de type (D)) par leur poids est égale à :

$$\exp\Bigl(\frac{(1/2)\,x^2\,\eta\,u^2}{1-y\,\eta\,u^2}\Bigr),\qquad \exp\Bigl(\frac{(1/2)\,\xi^2\,y\,u^2}{1-y\,\eta\,u^2}\Bigr),\qquad \exp\Bigl(\frac{x\,\xi\,u}{1-y\,\eta\,u^2}\Bigr),$$

respectivement.

(e) Les polynômes d'Hermite $H_n(x,y)$ tels qu'ils ont été définis dans l'exercice 16 sont les polynômes générateurs des involutions par nombre de points fixes et nombre de transpositions. On a la formule bilinéaire suivante

$$\sum_{n\ge 0} H_n(x,y)\,H_n(\xi,\eta)\,\frac{u^n}{n!} = (1-y\,\eta\,u^2)^{-1/2}\exp\Bigl(\frac{(x^2\,\eta+\xi^2\,y)u^2+2x\,\xi\,u}{2(1-y\,\eta\,u^2)}\Bigr),$$

qui, avec la normalisation habituelle $x\leftarrow 2x$, $y\leftarrow -2$, $\xi\leftarrow 2\xi$, $\eta\leftarrow -2$, conduit à la traditionnelle formule de Mehler :

$$\sum_{n\ge 0} H_n(x)\,H_n(\xi)\,\frac{u^n}{n!} = (1-4u^2)^{-1/2}\exp\Bigl(\frac{-4(x^2+\xi^2)u^2+2x\,\xi\,u}{(1-4u^2)}\Bigr).$$

31. *Dérangements et matrices de Seidel.* — Une permutation sans point fixe est appelée *dérangement*. Soit $a(n)$ le nombre de dérangements d'ordre n (on pose $a(0)=1$).

(a) Calculer les valeurs $a(1), a(2), a(3)$ et $a(4)$.

(b) On a la relation de récurrence suivante

$$a(n) = (n-1)(a(n-2)+a(n-1))\quad (n\ge 2).$$

(c) La fonction génératrice exponentielle de la suite $(a(n))$ $(n\ge 0)$ est égale à

$$A(*) = \sum_{j\ge 0} a(j)\frac{u^j}{j!} = \frac{e^{-u}}{1-u}.$$

(d) On construit la matrice de Seidel en prenant la suite $(a(n))$ comme suite initiale. Donner les éléments $a(i,j)$ de la matrice de Seidel pour $i+j\le 5$.

(e) La suite finale de cette matrice est $(n!)$ $(n \geq 0)$, qui est la suite des nombres de toutes les permutations.

32. *Involutions et matrices de Seidel.* — Une permutation σ est dite *involutive* si $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ (*cf.* Exercice 16). Soit $a(n)$ le nombre des dérangements involutifs d'ordre n, c'est-à-dire des involutions sans point fixe. Leur dénombrement a déjà été obtenu dans l'Exercice 16 : $a(2n) = (2n-1)!!$ et $a(2n-1) = 0$ $(n \geq 1)$; par convention $a(0) = 1$. Leur fonction génératrice exponentielle a aussi été calculée et vaut $\exp(u^2/2)$.

(a) Soit A_n l'ensemble des involutions sans point fixe d'ordre n. Retrouver la formule $a(2n) = (2n-1)!!$, $a(2n-1) = 0$, en construisant une bijection de A_n sur $[n-1] \times A_{n-2}$

(b) On construit la matrice de Seidel en prenant la suite $(a(n))$ comme suite initiale. Donner les éléments $a(i,j)$ de la matrice de Seidel pour $i + j \leq 5$.

(c) Trouver la fonction génératrice exponentielle de la suite finale de cette matrice.

(d) Le coefficient $a(i,0)$ est le nombre de permutations involutives d'ordre i.

33. *La fonction génératrice exponentielle des polynômes Eulériens.*

(a) Pour $n \geq 1$ on considère la matrice $B_n = b(i,j)$ $(1 \leq i,j \leq n)$ dont les coefficients au-dessus de la diagonale sont tous égaux à t (t une variable) et à 1 sur et au-dessous de la diagonale. Alors $\det B_n = (1-t)^{n-1}$.

(b) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a : $t^{\operatorname{exc}\sigma} = b(1,\sigma(1))\, b(2,\sigma(2)) \cdots b(n,\sigma(n))$. (Voir § 15.3 pour la définition de “exc.”) Le polynôme Eulérien $A_n(t)$ est donc égal à l'expression

$$A_n(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} b(1,\sigma(1))\, b(2,\sigma(2)) \cdots b(n,\sigma(n)),$$

appelée *permanent* de la matrice B_n et notée $\operatorname{Per} B_n$, alors que

$$\det B_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, b(1,\sigma(1))\, b(2,\sigma(2)) \cdots b(n,\sigma(n)),$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la *signature* de la permutation σ, est le développement du déterminant de B_n.

(c) Si σ appartient à $\mathfrak{S}_n$ et a r orbites, sa signature $\varepsilon(\sigma)$ est égale à $(-1)^{r+n}$.

(d) On considère la famille $\mathfrak{S}$ des permutations munie du poids cardinal-compatible $w^{(+)}(r,\sigma) = t^{\operatorname{exc}\sigma}$. L'entier r désigne ici le nombre d'orbites de σ. Avec les notations du Corollaire 14.5, on a

$$\sum_{(r,\theta) \in S^{(+)}_{[n]}} (-1)^r\, w^{(+)}(r,\theta) = (-1)^n \det B_n.$$

(e) L'identité (14.7) et l'évaluation faite en (a) donne :

$$\sum_{n\ge 0} A_n(t)\,\frac{u^n}{n!} = \frac{1-t}{-t+\exp(u(t-1))}.$$

34. *Autre calcul pour obtenir la fonction génératrice exponentielle des polynômes Eulériens.* — Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $(n \ge 1)$, posons $\operatorname{des}_0 \sigma := 1+\operatorname{des}\sigma$ en convenant qu'il y a toujours une descente en dernière position, de sorte que $t\,A_n(t)$ est le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par des_0. En classant les permutations dans $\mathfrak{S}_n$ suivant la position de n, on trouve pour $n \ge 1$ la récurrence

$$t\,A_n(t) = t\,A_{n-1}(t) + \sum_{1\le i\le n-1} \binom{n-1}{i} t\,A_i(t)\,t\,A_{n-1-i}(t),$$

d'où

$$1+\sum_{n\ge 1} t\,A_n(t)\,\frac{u^n}{n!} = \exp\Bigl(\sum_{n\ge 1} t\,A_{n-1}(t)\,\frac{u^n}{n!}\Bigr).$$

Le système des deux équations composé de (16.3) et de cette dernière équation permet de calculer la fonction génératrice exponentielle obtenue dans l'exercice 33 et aussi la formule :

$$1+\sum_{n\ge 1} t\,A_n(t)\,\frac{u^n}{n!} = \frac{1-t}{1-t\,\exp(u(1-t))}.$$

35. *Excédances et descentes pour les endofonctions.* — Une endofonction $f \in \operatorname{End}_n$ $(n \ge 1)$ a une excédance en x si $f(x) > x$ *et* si x est une valeur prise par f. Trouver une définition satisfaisante pour le nombre de descentes, $\operatorname{des} f$, d'une endofonction f pour que la transformation fondamentale pour les endofonctions $f \mapsto \check f$ (*cf.* Proposition 17.2) satisfasse la propriété déjà connue pour les permutations, à savoir : $\operatorname{exc} f = \operatorname{des} \check f$.

36. *Comptages de fonctions.* — Pour $1 \le k \le n$ soit $\operatorname{End}_{n,k}$ (resp. $\operatorname{Acyc}_{n,k}$, resp. $\operatorname{Indec}_{n,k}$) l'ensemble des endofonctions (resp. de fonctions acycliques, resp. de fonctions indécomposables) de $[\,n\,]$ ayant k éléments récurrents. Trouver l'image de chacun de ces trois ensembles, ainsi que de Arbor_n, sous la transformation fondamentale $f \mapsto \check f$. En déduire :

$$\operatorname{card}\operatorname{End}_{n,k} = \binom{n}{k} k!\,k\,n^{n-1-k};$$

$$\operatorname{card}\operatorname{Acyc}_{n,k} = \binom{n}{k}\,k\,n^{n-1-k};$$

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\mathrm{Indec}_{n,k} &= \binom{n}{k}(k-1)!\,k\,n^{n-1-k};\\ \operatorname{card}\mathrm{Arbor}_n &= n^{n-1};\\ \operatorname{card}\mathrm{Acyc}_n &= (n+1)^{n-1}.\end{aligned}$$

37. *Une version combinatoire de l'exercice* 25. — On utilise les identités (16.3)–(16.7) et l'exercice 36.

(a) La série formelle $a = 1 + \sum\limits_{n\ge 1}(n+1)^{n-1}\,u^n/n!$ est l'unique solution dans $\mathbb{Q}[[u]]$ de l'équation de $a = \exp(u\,a)$.

(b) De même, $b = \sum\limits_{n\ge 1} n^{n-1}\,u^n/n!$ est l'unique solution de $b = u\exp b$. On a aussi $\exp(\alpha\,b) = 1 + \sum\limits_{n\ge 1}\alpha(\alpha+n)^{n-1}\,u^n/n!$.

(c) On a : $e^{\alpha\,b}/(1-b) = \sum\limits_{n\ge 0}(\alpha+n)^n\,u^n/n!$. [Utiliser conjointement les identités (16.5) et (16.6) en prenant le produit partitionnel des familles Acyc et End avec des poids appropriés et faire une légère modification de la transformation fondamentale.]

38. — On a l'identité : $(1-u)^{-1} = \prod\limits_{i\ge 0}(1+u^{(2^i)})$.

39. — Soit λ la partition $\lambda = (7,6,6,4,4,4,4,2)$. Écrire sa forme multiplicative, calculer son poids $|\lambda|$, sa longueur $l(\lambda)$; déterminer la partition conjuguée $\tilde{\lambda}$.

40. — Soient k un entier positif et $\lambda^{(k)}$ la partition $(2k-1, 2k-2, 2k-3, \ldots, k+1, k)$. Calculer son poids $|\lambda^{(k)}|$. Dessiner son diagramme de Ferrers pour $k = 3$.

41. — Dans cet exercice, les partitions doivent être exprimées comme des suites décroissantes d'entiers.

(a) Écrire toutes les partitions d'ordre 6.

(b) Écrire toutes les partitions d'ordre 10 dont toutes les parts sont distinctes.

(c) Écrire toutes les partitions d'ordre 10 dont toutes les parts sont impaires.

42. — Pour l'ordre lexicographique écrire les deux partitions qui sont voisines de la partition $\lambda = (7,6,6,4,4,4,4,2)$.

43. *Programmation.* — Écrire un programme `NextPart(λ)` qui, pour toute partition λ, donne la partition suivante dans l'ordre lexicographique. A l'aide de ce programme, vérifier les résultats des exercices 41 et 42.

44. — Le nombre de partitions d'ordre n dont toutes les parts sont distinctes est égal au nombre de partitions d'ordre n dont toutes les parts sont impaires. Donner une démonstration combinatoire de cette propriété.

45. — Établir l'identité suivante :

$$(1-u)(1-u^2)(1-u^3)\cdots = \sum_\lambda (-1)^{l(\lambda)} u^{|\lambda|},$$

où la sommation est faite sur l'ensemble des partitions dont toutes les parts sont distinctes.

46. — A toute partition λ, on associe les deux statistiques $s(\lambda)$ et $\sigma(\lambda)$ définies par :

$$\begin{cases} s(\lambda) = \lambda_{l(\lambda)}, \\ \sigma(\lambda) = \max\{j : \lambda_j = \lambda_1 - j + 1\}. \end{cases}$$

Interpréter ces deux statistiques dans le diagramme de Ferrers de λ. Calculer leurs valeurs pour les partitions $(6,5,3,2,1)$, $(7,6,3)$ et $(2k-1, 2k-2, 2k-3, \cdots, k+1, k)$, respectivement.

47. — Donner une démonstration combinatoire du théorème pentagonal :

$$(1-u)(1-u^2)(1-u^3)\cdots = \sum_{n\ge 0} \epsilon_n u^n,$$

avec

$$\epsilon_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{s'il existe } k \text{ tel que } n = (3k^2 \pm k)/2\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

[Utiliser d'abord l'exercice 45 en partitionnant les partitions dont toutes les parts sont distinctes en deux sous-ensembles, suivant que le diagramme de Ferrers est un trapèze ou non. Dans le second cas, distinguer quatre sous-cas, par comparaison des statistiques $s(\lambda)$ et $\sigma(\lambda)$ définies dans l'exercice 46. Noter encore que l'on a $(3k^2-k)/2 = (3k'^2-k')/2$ si et seulement si $k = k'$.]

48. — Calculer $p(n)$, le nombres de partitions d'ordre n, pour $n \le 10$ à l'aide du théorème pentagonal.

49. *Un calcul de déterminant.* — Pour chaque permutation σ d'ordre r on définit $f(\sigma) = \sum_{i=1}^r i(i-\sigma(i))$. Alors

(1) $f(\mathrm{id}) = 0$.

(2) $f(\sigma) - f(\sigma \circ (i, i+1)) = \sigma(i+1) - \sigma(i)$.

Evaluer

$$\det\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} \\ \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} \end{pmatrix},$$

puis montrer que l'on a : $\det\left(\binom{i+j}{i}\right)_{0\le i,j\le n} = 1$.

Un *chemin de Dyck* de longueur $2n$ est une suite d'entiers positifs $(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$ tel que $s_0 = s_{2n} = 0$ et $|s_{i+1} - s_i| = 1$ pour tout $0 \le i \le 2n-1$. On note c_n le nombre des chemins de Dyck de longueur $2n$. Vérifier que la suite (012321210101210) est un chemin de Dyck de longueur 14. Calculer c_0, c_1, c_2 et c_3 en écrivant tous les chemins de Dyck possibles.

Etablir l'identité

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et calculer le déterminant :

$$\det\begin{pmatrix} \binom{0}{0}/1 & \binom{2}{1}/2 & \binom{4}{2}/3 & \binom{6}{3}/4 \\ \binom{2}{1}/2 & \binom{4}{2}/3 & \binom{6}{3}/4 & \binom{8}{4}/5 \\ \binom{4}{2}/3 & \binom{6}{3}/4 & \binom{8}{4}/5 & \binom{10}{5}/6 \\ \binom{6}{3}/4 & \binom{8}{4}/5 & \binom{10}{5}/6 & \binom{12}{6}/7 \end{pmatrix}.$$

Enfin, établir l'identité

$$\det\left(\frac{1}{i+j+1}\binom{2(i+j)}{i+j}\right)_{0\le i,j\le n} = 1.$$

Solutions des exercices du Chapitre 1

1. Pour tout $n \ge 0$ et tout $s \ge 0$, on a $a_s(n) = s$. Par conséquent, l'ensemble des indices s pour lesquels le coefficient de u^n dans a_s est strictement positif est l'ensemble (infini) $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$. La famille n'est donc pas sommable.

2. Pour tout $n \ge 1$ et tout $s \ge 1$ on a $a_s(n) = 1$ si s est un diviseur de n et 0 autrement. Comme le nombre de diviseurs de n est fini, la famille est donc sommable. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. On a donc
$$\sum_{s\ge 1} a_s = \sum_{s\ge 1}\sum_{n\ge 1} u^{ns} = \sum_{n\ge 1} d(n)\, u^n.$$
Le calcul de $d(n)$ se fait de la façon suivante. Si la décomposition de n en facteurs premiers est $p^r q^s \ldots$, on a $d(n) = (r+1)(s+1)\cdots$

3. Le coefficient de u^n dans a_s est 1 si p.g.c.d.$(s,n) = 1$ et $n \le s+1$; et 0 sinon. Les seuls indices s pour lesquels $a_s(n) \ne 0$ sont au plus égaux à $(n-1)$. Il y en donc un nombre fini. La famille est donc sommable. Posons $\varphi(n)$ égal au nombre d'entiers $s \le n-1$ et p.g.c.d.$(s,n) = 1$. Alors
$$\sum_{s\ge 1} a_s = \sum_{n\ge 1} u^n\, \varphi(n).$$
Comment calcule-t-on $\varphi(n)$? Si la décomposition de n en facteurs premiers est $p^r q^s \ldots$, alors $\varphi(n) = n\Bigl(1-\dfrac{1}{p}\Bigr)\Bigl(1-\dfrac{1}{q}\Bigr)\cdots$, un résultat qu'on démontre de la façon suivante. D'abord si n est une puissance d'un nombre premier p^r, l'ensemble des nombres inférieurs à n et qui ont un diviseur en commun avec n est formé des nombres $p, 2p, 3p, \ldots, p^{r-1}p$. On a donc $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^r\Bigl(1-\dfrac{1}{p}\Bigr)$. Enfin, φ est multiplicative, c'est-à-dire si $(m,n) = 1$, on a $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, car par un raisonnement d'inclusion-exclusion, on peut écrire en posant $f(n) = n - \varphi(n)$ (le nombre d'entiers inférieurs à n et qui ne sont pas premiers avec n),
$$\begin{aligned}\varphi(mn) &= mn - f(mn) = mn - mf(n) - nf(m) + f(m)f(n)\\ &= (m - f(m))(n - f(n)) = \varphi(m)\varphi(n),\end{aligned}$$

soit la relation cherchée pour φ.

4. Le coefficient constant de $1-u-u^2+u^3$ étant égal à 1, la série est inversible dans $\mathbb{Q}[[u]]$. Ensuite $1-u-u^2+u^3=(1-u)(1-u^2)$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-u-u^2+u^3}=\frac{1}{1-u}\,\frac{1}{1-u^2}&=\Bigl(\sum_{n_1\ge 0}u^{n_1}\Bigr)\Bigl(\sum_{n_2\ge 0}u^{2n_2}\Bigr)\\&=\sum_{n_1,n_2\ge 0}u^{n_1+2n_2}=\sum_{n\ge 0}u^n\,a(n),\end{aligned}$$

avec $a(n)$ égal au nombre de couples d'entiers positifs (n_1,n_2) tels que $n_1+2n_2=n$, soit évidemment $[n/2]+1$. On peut encore écrire

$$\Bigl(\sum_{n\ge 0}u^n\,a(n)\Bigr)(1-u-u^2+u^3)=1,$$

d'où $a(n)+a(n-3)=a(n-1)+a(n-2)$ pour $n\ge 3$, avec $a(0)=1$, $a(1)=1$, $a(2)=2$. Il faudrait résoudre cette équation de récurrence à quatre termes, mais ici, on peut simplement essayer de deviner la solution et l'on trouve $a(n)=[n/2]+1$.

5. On peut écrire $b=2b'$, avec $b'=\sum_{n\ge 1}n\,u^n$. Comme cette série b est sans terme constant, on peut la substituer dans a. On obtient : $a\circ b=\sum_{n\ge 1}(3n)(2b')^n=\sum_{n\ge 1}(3\cdot 2^n)n(b')^n=\sum_{n\ge 1}(6\cdot 2^{n-1})n(b')^n=0$, puisque les coefficients sont des entiers modulo 6. L'ordre de $a\circ b$ est donc $+\infty$.

6. Pour $s\ge 1$, on a $o(a_s)=o(b_s)=s$; les deux familles sont donc sommables, d'après la remarque (iv) du paragraphe 2. Soient a et b leurs sommes respectives. D'abord $a_s(n)=s$ ou 0, suivant que $s\,|\,n$ ou $s\nmid n$; d'où $a(n)=\sum_{s\,|\,n}s$. Comme $u(1-u)^{-2}=\sum_{n\ge 1}n\,u^n$, on a $b_s(n)=n/s$ ou 0, suivant que $s\,|\,n$ ou $s\nmid n$. Par conséquent, $b(n)=\sum_{s\,|\,n}n/s=\sum_{s'\,|\,n}s'=a(n)$ et donc $a=b$.

7. Les ordres de a_s et de b_s sont s et s^2, respectivement ; les deux familles sont donc sommables ; soient a et b leurs sommes. Ici $a_s(n)=1$ ou 0, suivant que s divise n ou non et comme $b_s=u^{s^2}(1+2\sum_{p\ge 1}u^{ps})=u^{s^2}+2\sum_{p\ge 1}u^{s(s+p)}$, on obtient

$$b_s(n) = \begin{cases} 2, & \text{si } s \mid n \text{ et } s < \sqrt{n}\,; \\ 1, & \text{si } s = \sqrt{n} \ (s \text{ entier})\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $a(n)$ et $b(n)$ sont tous deux égaux au nombre des diviseurs de n ; pour $b(n)$ le comptage est fait une fois suivant que le diviseur est inférieur, égal ou supérieur à $\sqrt{n}$.

8. Les ordres de a_s et de b_s sont égaux à $2s-1$; les deux familles sont donc sommables. Pour tout entier impair $m = 2i-1$, on pose $\chi(m) = (-1)^{(m-1)/2} = (-1)^{i-1}$, ou encore $\chi(m) = 1$ ou -1 suivant que m est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Alors $a_s = \sum\limits_{k\ge1} u^{(2s-1)(2k-1)}\chi(2k-1)$ et $a(n)$ est égal à $\sum\limits_{d\,|\,n} \chi(d)$ ou à 0 suivant que n est impair ou pair. De même, $b_s = (-1)^{s-1} \sum\limits_{k\ge1} u^{(2s-1)(2k-1)}$; le coefficient $b_s(n)$ est égal à $\chi(s)$ si $s\,|\,n$ et n impair et il est égal à 0, si n est pair ou si $s \nmid n$. De là $b(n)$ est égal à $\sum\limits_{s\,|\,n} \chi(s)$ ou à 0 suivant que n est impair ou non. D'où $a = b$.

9. Pour $m \ge 2$, on a $a_m = (1-u)^{-1}a_{m-1}$, d'où $a_m(0) = a_{m-1}(0) = \cdots = a_1(0) = 1$ et $a_m(n) = \sum\limits_{0\le k\le n} a_{m-1}(k)$. Par suite, $a_m(n) = a_m(n-1) + a_{m-1}(n)$. Cette récurrence, avec les conditions aux limites $a_1(n) = 1$ $(n \ge 0)$ et $a_m(0) = 1$ $(m \ge 1)$, caractérise la suite double $(a_m(n))$ $(n \ge 0,\ m \ge 1)$. Or $b_m(n) = \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-2}{n-1} + \binom{n+m-2}{n} = b_m(n-1) + b_{m-1}(n)$ et $b_1(n) = \binom{n}{n} = 1$ $(n \ge 0)$, $b_m(0) = \binom{m-1}{0} = 1$ $(m \ge 1)$. Donc $a_m(n) = b_m(n) = \binom{n+m-1}{n} = (m)_n/n!$

10. a) On a : $F = 1 + u + \sum\limits_{n\ge2} F(n)\,u^n = 1 + u + \sum\limits_{n\ge2} u^n F(n-1) + \sum\limits_{n\ge2} u^n\,F(n-\ 2) = 1 + u + u(F-1) + u^2\,F$, soit $F = (1-u-u^2)^{-1}$.

b) Comme $(u+u^2)^s = \sum\limits_{0\le k\le s} u^{s+k}\binom{s}{k} = \sum\limits_{s\le n\le 2s} u^n\binom{s}{n-s}$, on a : $a_s(n) = \binom{s}{n-s}$ si $s \le n \le 2s$ et $a_s(n) = 0$ autrement. La série $G = \sum\limits_{s\ge0} a_s$ a un sens puisque $o(a_s) = s$ et satisfait l'équation $G = 1 + (u+u^2)G$, d'où $G = (1-u-u^2)^{-1} = F$ et $F(n) = G(n) = \sum\limits_{s\ge0} a_s(n) = \sum\limits_{\lceil n/2\rceil\le s\le n} \binom{s}{n-s}$.

11. a) Comme $o(a_s) = o(a_{s-1}) + 1$, on a $o(a_s) = s$; la famille (a_s) est donc sommable.

b) Comme $a_s/s = u(a_{s-1} - a_s)$ $(s \ge 1)$, on déduit $a_1 + (a_2/2) + \cdots + (a_s/s) = u(a_0 - a_s) = u(1-a_s)$. Or $o(ua_s) = s+1$, donc $\sum\limits_{s\ge1} a_s/s = u$.

c) D'abord $a_1 \circ h = (u/(1-u))/(1+(u(1-u)^{-1})) = u = ua_0$. Ensuite, par récurrence sur s, on a : $a_s \circ h = \Big(\dfrac{su}{1+su} \circ h\Big)(a_{s-1} \circ h) = \dfrac{su}{1+(s-1)u}(s-1)ua_{s-2} = su\dfrac{(s-1)u}{1+(s-1)u}a_{s-2} = sua_{s-1}$. Par suite, $(a_s/s) \circ h = ua_{s-1}$ et $\sum_{s\geq 1} ua_{s-1} = \sum_{s\geq 1}(a_s/s) \circ h = u \circ h = u/(1-u)$, d'où $\sum_{s\geq 0} a_s = (1-u)^{-1}$.

12. a) Avec $y = \sum_{n\geq 1} u^n y(n)$, l'équation différentielle peut s'exprimer par la récurrence : $y(n+1) = (k/(n+1))\, y(n),\ y(0) = 1$. Cette récurrence définit une suite $y(n)$ unique : $y(n) = k^n/n!$. D'où $y = \exp(ku)$.

b) Avec $z = (\exp u)^k$, on a : $z' = k(\exp u)^{k-1}(\exp u)' = k\,(\exp u)^k$, d'où $z' = k\,z,\ z(0) = 1$ et donc $z = y = \exp(ku)$.

13. a) Par dérivations successives : $y^{(0)} = y,\ y' = y^3,\ y'' = 3y^2y' = 3y^5$, $\ldots,\ y^{(n)} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)y^{2n+1}$. Comme $y^{(n)}(0) = n!\,y(n)$, on en déduit : $y = 1 + \sum_{n\geq 1} u^n\,(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))/n!$.

b) Par dérivation : $z = y^2,\ z' = 2yy' = 2y^4 = 2z^2$, soit $z' = 2z^2,\ z(0) = 1$. D'où $z'' = 4zz' = 8z^3,\ z''' = 24z^2z' = 48z^4$, $\ldots\ ,\ z^{(n)} = (2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))z^{n+1}$. D'où $z(n) = 2^n$. L'identité $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n} \frac{a_k}{k!}\frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = 2^n$ est la traduction de $y^2 = z$.

14. a) La récurrence est équivalente à l'identité : $C^2 = C - u$. D'où $u = C - C^2$ et $u = a \circ C$ avec $a = u - u^2$. Donc $C = a^{[-1]}$.

b) Ici $C(n) = \frac{1}{n}\operatorname{res}(a^{-n}) = \frac{1}{n}\operatorname{res}(u^{-n}(1-u)^{-n})$. Comme $(1-u)^{-n} = \sum_{k\geq 0}(n)_k\,u^k/k!$, le coefficient de u^{n-1} vaut $(n)_{n-1}/(n-1)! = \binom{2n-2}{n-1}$. D'où $C(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

15. a) Pour déterminer $c^m(n) = (m/n)a^{-n}(-m)$, on calcule d'abord le coefficient de u^{-m} dans $(u(1-u))^{-n}$, qui est égal au coefficient de u^{n-m} dans $(1-u)^{-n}$, soit $\binom{2n-m-1}{n-m}$. D'où $c^m(n) = \frac{m}{n}\binom{2n-m-1}{n-m}$.

b) En effet, $p = \sum_{k\geq 1}(u-u^2)^k q(k) = \sum_{k\geq 1}\big(\sum_{0\leq i\leq k}\binom{k}{i}(-1)^i u^{k+i}\big)q(k) = \sum_{n\geq 1} u^n\big(\sum_{n/2\leq k\leq n}(-1)^{n-k}\binom{k}{n-k}q(k)\big)$.

c) On a $q = q \circ u = q \circ a \circ c = p \circ c = \sum_{k\geq 1} c^k\,p(k)$. D'où $q(n) = \sum_{1\leq k\leq n} c^k(n)\,p(k) = \sum_{1\leq k\leq n}\frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-k}p(k)$.

16. a) Il n'y a qu'une involution dans I_1 et elle ne contient qu'un seul point fixe. Si, dans une involution σ appartenant à I_n $(n \geq 2)$, l'élément n

est point fixe, la restriction de σ à $[n-1]$ appartient à I_{n-1}. Donc $x\,H_{n-1}(x,y) = \sum_{\sigma\in I_n,\,\sigma(n)=n} x^{\mathrm{fix}\,\sigma} y^{\mathrm{trans}\,\sigma}$. Soit $I_n(i)$ l'ensemble des involutions σ dans I_n contenant la transposition (i,n) $(1\le i\le n-1)$. Alors $y\,H_{n-1}(x,y) = \sum_{\sigma\in I_n(i)} x^{\mathrm{fix}\,\sigma} y^{\mathrm{trans}\,\sigma}$. On en déduit la relation de récurrence annoncée en faisant varier i dans $\{1,2,\ldots,n-1\}$.

b) En posant $a(n) = H_n(x,y)$ pour $n\ge 1$ et $b(1)=x$, $b(2)=y$, $b(n)=0$ pour $n\ge 3$, on voit que la relation de récurrence établie dans a) n'est autre que l'identité (13.5). En écrivant la formule (13.3) correspondante, on en déduit la formule à prouver.

c) On a : $\exp(xu+yu^2/2) = \exp(xu)\exp(yu^2/2) = \bigl(\sum_i x^i u^i/i!\bigr) \times \bigl(\sum_j (y^j u^{2j})/(2^j\,j!)\bigr)$. Le coefficient de u^n dans ce produit, qui doit être égal à $H_n(x,y)/n!$ vaut bien $\sum_{i+2j=n} x^i y^j/(i!\,2^j\,j!)$. On vérifie aussi directement que $n!/(i!\,2^j\,j!)$ est bien le nombre de permutations de $1,2,\ldots,n$ composé exactement de i points fixes et de j transpositions.

d) En effet, $H_{2n}(0,1) = (2n)!/(2^n\,n!) = (2n-1)!!$

17. On a : $\cos^2 u = 1-\sin^2 u = {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}-1\\ -\end{matrix};\sin^2 u\Bigr)$ (à cause du paramètre -1 tous les coefficients de la série sont nuls à partir du second terme). Cette dernière expression vaut $\Bigl({}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}-1/2\\ -\end{matrix};\sin^2 u\Bigr)\Bigr)^2$ d'après (4.12). D'où $\cos u = \pm\,{}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}-1/2\\ -\end{matrix};\sin^2 u\Bigr)$. Il faut choisir le signe plus puisque le terme constant de la série $\cos u$ est 1. Maintenant, $\mathrm{Arcsin}(\sin u) = u$ entraîne $D(\mathrm{Arcsin}(\sin u)) = 1$, soit ${}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}1/2\\ -\end{matrix};\sin^2 u\Bigr)\cos u = 1$, soit encore d'après (8.6) $\cos u = {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}-1/2\\ -\end{matrix};\sin^2 u\Bigr)$, qui vient d'être établie.

18. On a $(\sin u)' = \cos u = {}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}-1/2\\ -\end{matrix};\sin^2 u\Bigr)$, comme établi dans l'exercice précédent ; d'où la série réverse de $\sin u$ est $\mathrm{Int}_0\,{}_1F_0\Bigl(\begin{matrix}+1/2\\ -\end{matrix};u^2\Bigr) = \mathrm{Arcsin}\,u$. De même, $(\mathrm{tg}\,u)' = 1+(\mathrm{tg}\,u)^2$ et la série réverse de $(\mathrm{tg}\,u)$ est $\mathrm{Int}_0\,(1+u^2)^{-1} = \mathrm{Arctg}\,u$.

19. On a : $\sum_{n\ge 0} n^m u^n = (u\,D)\sum_{n\ge 0} n^{m-1}u^n = (u\,D)^2\sum_{n\ge 0} n^{m-2}u^n = \cdots = (uD)^m\sum_{n\ge 0} u^n = (uD)^m\,(1/(1-u))$. Ensuite, $\sum_{n\ge 0} P(n)\,u^n = P(uD)(1-u)^{-1}$.

20. Simples manipulations. On trouve :
$\alpha u^{-2}(f(u)-a(0)-a(1)u)+\beta u^{-1}(f(u)-a(0))+\gamma f(u)$;
$\alpha\,D^2\,F(u)+\beta\,D\,F(u)+\gamma\,F(u)$.

21. Simples manipulations. On trouve : $f(u) = u(1-u)^{-2}$ et $F(u) = u\,e^u$.

22. Pour construire une partition de $[\,n\,]$, il suffit de se donner un sous-ensemble de $[n-1]$ et de faire de ce sous-ensemble un bloc en lui rajoutant n. Si ce bloc ainsi formé est de cardinal $(n-k)$, on lui rajoute une partition de l'ensemble restant. Il y a ainsi B_k partitions possibles qu'on peut associer à ce bloc.
En posant $a(n) = B_n$, puis $b(n) = 1$ pour $n \geq 1$, on voit que la formule (13.5) n'est autre que la formule de récurrence des nombres de Bell prouvée. La formule (13.3) récrite avec ces paramètres donne ainsi $\exp \sum\limits_{n\geq 1} (u^n/n!) = \exp(\exp(u)-1)$ comme fonction génératrice exponentielle des nombres de Bell.

23. (a) Le développement du produit donne $\sum u^{n_1+n_2+\cdots+n_p}$, où la somme est sur les suites d'entiers $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ telles que $n_1 \in J_1$, $n_2 \in J_2$, $\ldots$, $n_p \in J_p$. On fait une première sommation pour ces suites d'entiers qui sont de somme n et l'on obtient $\sum\limits_{n\geq 0} u^n \operatorname{card} P(n,p,J)$.

(b) On peut envoyer, de façon bijective, toute suite d'entiers positifs $(n_1, n_2 \ldots, n_{p-1}, n_p)$ de somme n sur une suite strictement croissante $(1 \leq n_1+1 < n_1+n_2+2 < \cdots < n_1+\cdots+n_{p-1}+p-1 \leq n+p-1)$ de longueur $(p-1)$. Le nombre de telles suites est donc $\binom{n+p-1}{p-1}$. D'où $\sum\limits_{n\geq 0} u^n \binom{p+n-1}{p-1} = \big(\sum\limits_{n\geq 0} u^n\big)^p$, qui n'est autre que l'identité binomiale.

(c) Lorsque $J_1 = \cdots = J_p = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on peut envoyer, toujours de façon bijective, toute suite $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de $P(n,p;J)$ sur la suite strictement croissante $(1 \leq n_1 < n_1+n_2 < \cdots < n_1+\cdots+n_{p-1} \leq n-1)$ de longueur $(p-1)$. Le nombre de telles suites est $\binom{n-1}{p-1}$. D'où $\sum\limits_{n\geq p} u^n \binom{n-1}{p-1} = \big(\sum\limits_{n\geq 1} u^n\big)^p$.

(d) Il s'agit de trouver le nombre de suites (n_1, n_2, n_3, n_4) telles que $n_1+n_2+n_3+n_4 = 18$ et tous les n_i pairs et non nuls, ou encore de trouver le coefficient de u^{18} dans le développement de $\big(\sum\limits_{n\geq 1} u^{2n}\big)^4 = \sum\limits_{n\geq 4} u^{2n}\binom{n-1}{3}$. Le nombre cherché est donc $\binom{9-1}{3} = 56$.

24. (a) Le membre de droite de l'identité vaut $\sum\limits_{n\geq 0} u^n \sum (1/n_1!)\cdots(1/n_p!)$, où la seconde sommation est sur toutes les suites appartenant à l'ensemble $P(n,p;J)$ décrit dans l'exercice 23. Ce second membre peut encore s'écrire $\sum\limits_{n\geq 0} u^n/n! \sum n!/(n_1!\cdots n_p!)$. Or le coefficient multinomial $n!/(n_1!\cdots n_p!)$ est le cardinal de l'ensemble $\Delta(n_1,\ldots,n_p)$ des suites $(A_1,\ldots,A_p)$ de parties de $[\,n\,]$ telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\operatorname{card} A_i = n_i$ pour $i = 1,\ldots,p$.

Soit $F(n,p;n_1,\ldots,n_p)$ l'ensemble des applications f de $[\,n\,]$ dans $[\,p\,]$ telles que $\operatorname{card} f^{-1}(i) = n_i$ $(i=1,\ldots,p)$. Il est clair que $f \mapsto (f^{-1}(1),\ldots,f^{-1}(p))$ est une bijection de $F(n,p;n_1,\ldots,n_p)$ sur $\Delta(n_1,\ldots,n_p)$. En sommant sur les suites $(n_1,\ldots,n_p)$ de $P(n,p;J)$, on obtient bien $\sum n!/(n_1!\cdots n_p!) = \sum \operatorname{card} F(n,p;n_1,\ldots,n_p) = \operatorname{card} F(n,p;J)$.

(b) Lorsque $J_1 = \cdots = J_p = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'ensemble $F(n,p;J)$ ne contient que des *surjections* de $[\,n\,]$ sur $[\,p\,]$. Donc $\operatorname{card} F(n,p;J) = p!\,S(n,p)$, où $S(n,p)$ est le *nombre de Stirling de seconde espèce*. D'où $\sum\limits_{n\ge p}(u^n/n!)\,p!\,S(n,p) = \big(\sum\limits_{n\ge 1}(u^n/n!)\big)^p = (\exp u - 1)^p$ $(p\ge 1)$. En sommant enfin par rapport à n, on retrouve la fonction génératrice des nombres de Bell (*cf.* Exercice 23) : $1+\sum\limits_{n\ge1}(u^n/n!)\sum\limits_{1\le p\le n} S(n,p) = 1+\sum\limits_{n\ge1}(u^n/n!)B_n = \exp(\exp u - 1)$.

(c) Ici $p=4$, $J_1 = 2\mathbb{N}$, $J_2 = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $J_3 = J_4 = \mathbb{N}$. Le nombre $a(n)$ en question est donné par

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge0}\frac{u^n}{n!}\,a(n) &= \Big(\sum_{n\ge0}\frac{u^{2n}}{(2n)!}\Big)\Big(\sum_{n\ge1}\frac{u^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n\ge0}\frac{u^n}{n!}\Big)^2\\ &= \frac12(e^u+e^{-u})(e^u-1)e^{2u}\\ &= \frac12\sum_{n\ge0}\frac{u^n}{n!}(4^n-3^n+2^n-1).\end{aligned}$$

D'où $a(n) = (4^n-3^n+2^n-1)/2$.

25. (a) On utilise la toute première formule de réversion de Lagrange (Théorème 7.1). Pour tout $n\ge1$ le coefficient $b(n)$ de u^n dans cette série réverse b est égal à $b(n) = (1/n)a^{(-n)}(-1)$. Or $a^{-n} = u^{-n}e^{nu}$ et le coefficient de u^{-1} dans a^{-n} est égal au coefficientde u^{n-1} dans e^{nu}, soit $n^{n-1}/(n-1)!$. On a donc $b(n) = n^{n-1}/n!$ $(n\ge1)$.

(b) On utilise la formule (7.2a) avec $f(u)=e^u$ et $c(u)=u$. Alors $[D^{n-1}(c'\,f^n)]_{u=0} = [D^{n-1}(e^{nu})]_{u=0} = n^{n-1}$.

(c) On utilise la formule (7.2a) avec $f(u)=e^u$ et $c(u)=e^{\alpha u}$. Alors $[D^{n-1}(c'\,f^n)]_{u=0} = [D^{n-1}(\alpha e^{(\alpha+n)u})]_{u=0} = \alpha(\alpha+n)^{n-1}$.

(d) On utilise la formule (7.2b) avec $f(u)=e^u$ et $d(u)=e^{\alpha u}$. Alors $[D^n(f^n\,d)]_{u=0} = [D^n(e^{(n+\alpha)u})]_{u=0} = (\alpha+n)^n$ $(n\ge0)$ et $d\circ b/(1-u.f'\circ b) = e^{\alpha b}/(1-u.e^b) = e^{\alpha b}/(1-b)$.

26. On utilise la formule (7.2b) avec $f(u)=1+u+u^2$ et $d(u)=1$ et b est une série qui satisfait l'équation $u(1+b+b^2)=b$ ou $u^{-1} = b+1+b^{-1}$.

Or $1-u.f'\circ b = 1-u(1+2b) = u(b^{-1}-b) = (u^2((b^{-1}+b)^2-4))^{1/2} = (u^2((u^{-1}-1)^2-4))^{1/2} = (1-2u-3u^2)^{1/2}$. D'où $1/(1-2u-3u^2)^{1/2}$ est la formule close pour le développement demandé.

27. On a $b(u) = \dfrac{u}{1+b(u)} = u.(f\circ b)$ avec $f(u) = \dfrac{1}{1+u}$. On utilise (7.2a) avec $c = u$. On trouve $(1/(n-1)!)[D^{n-1}(f^n)]_{u=0} = (1/(n-1)!)[D^{n-1}(1+u)^{-n}]_{u=0} = (-1)^{n-1}(n)_{n-1}/(n-1)! = (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}$. D'où $b(u) = \sum\limits_{n\geq 1} u^n\,(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}/n = u - u^2 + 2u^3 - 5u^4 + 14u^5 - 42u^6 + \cdots$

28. (a) Dans les deux cas on se reporte à la formule donnant $a(i,j)$ en fonction des coefficients $a(0,k)$.

(a) Dans $T_{i,0}\,a$, le coefficient $a(i+j,j)$ de u^j est égal au coefficient de u^{i+2j} dans $(1+u)^{i+j}\,a(0,*)$, soit au coefficient de u^j dans $(1+u^{-1})^j\,(1+u^{-1})^i\,a(0,*)$, soit encore à $(1/j!)[D^j\,f^j\,d]_{u=0}$ avec $f = 1+u^{-1}$ et $d = (1+u^{-1})^i\,a(0,*)$. D'après (7.2a), $T_{i,0}\,a = (d\circ b)/(1-u.f'\circ b) = ((1+b^{-1})^i\,a(0,*)\circ b)/(1+ub^{-2})$ avec $b = u(f\circ b) = u(1+b^{-1})$. D'où $u = b^2/(1+b)$ et $1+ub^{-2} = (2+b)/(1+b)$. On en tire $T_{i,0}\,a\circ\Big(\dfrac{b^2}{1+b}\Big) = \dfrac{1+b}{2+b}\,(1+b^{-1})^i\,a(0,*)\circ b.$

(b) Dans $T_{0,j}\,a$, le coefficient $a(i,i+j)$ de u^i est égal au coefficient de u^{2i+j} dans $(1+u)^i\,a(0,*)$, soit au coefficient de u^i dans $(1+u^{-1})^i\,u^{-j}\,a(0,*)$, soit encore à $(1/i!)[D^i\,f^i\,d]_{u=0}$ avec $f = 1+u^{-1}$ et $d = u^{-j}\,a(0,*)$. D'après (7.2a), $T_{0,j}\,a = (d\circ b)/(1-u.f'\circ b) = (b^{-j}\,a(0,*)\circ b)/(1+ub^{-2})$ avec $b = u(f\circ b) = u(1+b^{-1})$. D'où $u = b^2/(1+b)$ et $1+ub^{-2} = (2+b)/(1+b)$. On en tire
$T_{0,j}\,a\circ\Big(\dfrac{b^2}{1+b}\Big) = \dfrac{1+b}{2+b}\,b^{-j}\,a(0,*)\circ b.$

29. (a) Pour A fixé, de cardinal i et $B = S\setminus A$ de cardinal j, la fonction génératrice des injections de A dans $A+B$ par le poids w_β est donnée par $(\beta+j)_i\,X^i\,Y^j$ par la Proposition 9.3. Il suffit donc de sommer par rapport à tous les sous-ensembles A de cardinal i, puis par rapport à i.

(b) L'identité résulte de la Proposition 9.1 et de (4.11).

(c) On fait appel au Théorème 13.1. L'identité à démontrer est équivalente à l'identité $a_n(Y) = n!\,Y + \sum\limits_{1\leq i\leq n-1}\binom{n-1}{i}\,a_i(Y)\,(n-i)!\,Y\ (n\geq 1)$.
Or la fonction génératrice des partitions linéarisées ne comportant qu'un bloc est évidemment $n!\,Y$. Dans les autres partitions linéarisées le bloc contenant n est de cardinal $(n-i)$ avec $1\leq i\leq n-1$. Le poids de ce bloc est donc $(n-i)!\,Y$. En le retirant, il reste

une partition linéarisée sur un ensemble de cardinal i de fonction génératrice $a_i(Y)$. Ces ensembles ne contiennent pas n. Leur nombre est donc égal à $\binom{n-1}{i}$.

(d) L'identité découle de la description du graphe d'une injection décrite au paragraphe 9. Une configuration de Laguerre (A, B, τ) sur S est ainsi composée d'une permutation σ sur un sous-ensemble C de A et d'une partition linéarisée π sur l'ensemble $S \setminus C$. De plus, si $S = [\,n\,]$, on a : $w_\beta(A, B, \tau) = \beta^{\mathrm{cyc}\,\tau}\, X^{|A|}\, Y^{|B|} = \beta^{\mathrm{cyc}\,\sigma}\, X^{n-\mathrm{bloc}\,\pi}\, Y^{\mathrm{bloc}\,\pi}$. Par conséquent, $\mathcal{L}_n(\beta, X, Y) = X^n \sum\limits_{(C,\sigma)} \beta^{\mathrm{cyc}\,\sigma} \sum\limits_{\pi \in \mathcal{P}([\,n\,]\setminus C)} (X^{-1}Y)^{\mathrm{bloc}\,\pi}$, où $\mathcal{P}([\,n\,]\setminus C)$ désigne l'ensemble des partitions linéarisées sur $[\,n\,]\setminus C$. Soit encore $\mathcal{L}_n(\beta, X, Y) = X^n \sum\limits_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \beta^{\mathrm{cyc}\,\sigma} \sum\limits_{\pi \in \mathcal{P}_{n-k}} (X^{-1}Y)^{\mathrm{bloc}\,\pi} = \sum\limits_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} X^k\, (\beta)_k\, X^{n-k}\, a_{n-k}(X^{-1}Y)$. Ainsi $\mathcal{L}_n(\beta, X, Y)$ est le coefficient de $u^n/n!$ dans le produit de la fonction génératrice exponentielle des polynômes $X^k(\beta)_k$ $(k \ge 0)$ par la fonction génératrice exponentielle des polynômes $X^j\, a_j(X^{-1}Y)$ $(j \ge 0)$, soit donc le produit de $(1 - u\,X)^{-\beta}$ par $\exp(X^{-1}Y\, uX/(1 - uX)) = \exp(Y\, u/(1 - uX))$.

30. (a) Soit v un sommet. Si deux boucles sont incidentes à v, ce sommet appartient à une composante connexe de type (D) n'ayant aucune arête. Si de v ne part qu'une seule boucle et que cette boucle est de couleur rouge (pointillée), il y part également une arête de couleur bleue. Cette arête est incidente à un sommet $v' \neq v$, d'où part ou bien une boucle de couleur rouge — et la composante connexe contenant v et v' est de type (C) — ou bien une arête de couleur rouge incidente à un sommet v'' différent de v et de v'. Comme le graphe est fini, la composante connexe contenant ces sommets sera alors nécessairement de type (C) ou (D). De la même façon, si d'un sommet v ne part qu'une seule boucle de couleur bleue, on voit que la composante connexe contenant v est de type (B) ou (D).
Tout sommet appartenant à l'une des composantes connexes de type (B), (C) ou (D) est forcément relié à un sommet d'où part une boucle. Dans le cas contraire, la finitude du graphe et l'alternance des couleurs des arêtes imposent que la composante connexe contenant ce sommet est un cycle de type (A), qui contient donc un nombre pair d'arêtes, autant d'arêtes bleues que d'arêtes rouges.

(b) L'énoncé est vrai pour $n = 1$. Pour $n \ge 2$, le nombre de graphes bicoloriés tels que le sommet étiqueté $2n$ se trouve dans un cycle de deux sommets est égal à $((2n-3)!!)^2\,(2n-1)$. Si le sommet étiqueté $2n$ se trouve dans un cycle d'au moins quatre sommets, désignons par v, v' $(v < v')$ les deux sommets adjacents au sommet $2n$. De ce cycle, retirons $2n$, les deux arêtes bleue et rouge qui partent de celui-ci, ainsi que v' et relions l'arête devenue sans but au sommet v. Soit c la couleur de cette arête. Le graphe de départ peut être caractérisé par le triplet (v, v', c). Ainsi le nombre de graphes où le sommet $2n$ est dans un cycle d'au moins quatre sommets est égal à $((2n-3)!!)^2 \binom{2n-1}{2} 2 = ((2n-3)!!)^2\,(2n-2)(2n-1)$. Le nombre total vaut donc $((2n-3)!!)^2\;(2n-1)^2 = ((2n-1)!!)^2$. Une manière encore plus directe d'obtenir ce dénombrement est de dire qu'il y a autant de graphes bicoloriés sur $[\,n\,]$ n'ayant que des composantes connexes de type (A) que de couples d'involutions de $[\,n\,]$ sans point fixe.

(c) Comme $((2n-1)!!)^2/(2n)! = \left(\frac{1}{2}\right)_n/n!$, on voit que la fonction génératrice exponentielle vaut $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)_n (y\eta)^n\, u^{2n}/n! = (1-y\eta u^2)^{-1/2}$.

(d) La fraction rationnelle dans la première exponentielle écrite se développe comme

$$\frac{(1/2)x^2\,\eta\,u^2}{1-y\,\eta\,u^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} x^2 y^{n-1}\eta^n(2n)!\,\frac{u^{2n}}{(2n)!},$$

qui n'est autre que la fonction génératrice exponentielle des graphes bicoloriés constitués par une seule composante connexe de type (B). Or tout graphe bicolorié ayant $2n$ sommets et n'ayant que des composantes connexes de type (B) est complètement caractérisé par une collection $\{(I_1,\gamma_1),\ldots,(I_r,\gamma_r)\}$, où $\{I_1,\ldots,I_r\}$ est une partition de $[2n]$ et où pour chaque $k=1,\ldots,r$ le symbole γ_k désigne un graphe bicolorié connexe de type (B) sur l'ensemble I_k. Pour obtenir la fonction génératrice exponentielle de la suite de tous les graphes bicoloriés n'ayant que des composantes connexes de type (B), il suffit donc de prendre l'exponentielle de la précédente fraction rationnelle. Les deux autres fonctions génératrices s'établissent de la même façon.

(e) Le produit $H_n(x,y)\,H_n(\xi,\eta)$ n'est autre que la fonction génératrice des graphes bicoloriés de n sommets. L'ensemble des graphes bicoloriés n'est autre que le produit partitionnel (au sens du paragraphe 14) des quatre familles de graphes bicoloriés n'ayant que des composantes de type (A), (B), (C) et (D), respectivement. La fonction génératrice exponentielle des graphes bicoloriés est donc égale au produit des quatre fonctions génératrices exponentielles précédemment calculées.

31. (a) $a(1)=0, a(2)=1, a(3)=2, a(4)=9$.

(b) Notons A_n l'ensemble des dérangements d'ordre n. On construit une bijection ϕ de A_n sur $[n-1]\times A_{n-2} + [n-1]\times A_{n-1}$ de la façon suivante. Soit $\sigma \in A_n$. Si $\sigma(n) = k$ et $\sigma(k) = n$, on pose $\phi(\sigma) = (k, \tau) \in [n-1] \times A_{n-2}$ avec $\tau(i) = \sigma(i)$ pour $i \neq n, k$. Si $\sigma(n) = k$, $\sigma(k) = l \neq n$ et $\sigma(j) = n$, on pose $\phi(\sigma) = (k, \tau) \in [n-1] \times A_{n-1}$ avec $\tau(i) = \sigma(i)$ pour $i \neq n, j$ et $\tau(j) = k$.

(c) D'après (b), $a(n) - na(n-1) = (-1)(a(n-1) - (n-1)a(n-2)) = \cdots = (-1)^{n-2}(a(2) - 2a(1)) = (-1)^n$. Par conséquent, $(1-u)A(*) = (1-u) \sum_{j\geq 0} a(j)\, u^j/j! = \sum_{j\geq 1} (a(j) - ja(j-1))\, u^j/j! + 1 = \sum_{j\geq 0} (-1)^j\, u^j/j! = e^{-u}$.

(d)

1	0	1	2	9	44
1	1	3	11	53	
2	4	14	64		
6	18	78			
24	96				
120					

(e) $A(*, 0) = e^u A(0, *) = e^u e^{-u}/(1-u) = 1/(1-u) = \sum_{j\geq 0} j!\, u^j/j!$. D'où $a(j, 0) = j!$.

32. (a) Soit $\sigma \in A_n$. Si $\sigma(n) = k$, on a $\sigma(k) = n$. On envoie σ sur le couple $(k, \tau) \in [n-1] \times A_{n-2}$ avec $\tau(i) = \sigma(i)$ pour $i \neq n, k$. Le caractère bijectif est évident. On en tire $a(n) = (n-1)a(n-2)$, d'où $a(2n) = (2n-1)(2n-3)\cdots 1 \cdot a(0) = (2n)!/(2^n n!)$ et $a(2n+1) = 2n(2n-2)\cdots 2 \cdot a(1) = 0$.

(b)

1	0	1	0	3	0
1	1	1	3	3	
2	2	4	6		
4	6	10			
10	16				
26					

(c) $A(*, 0) = e^u\, A(0, *) = e^u \exp(u^2/2) = \exp(u + u^2/2)$.

(d) *cf.* Exercice 16.

33. (a) et (b) : calcul facile.

(c) Soit $\mathrm{even}(\sigma)$ (resp. $\mathrm{odd}(\sigma)$) le nombre de cycles de longueur paire (resp. impaire) de la permutation σ. D'abord $\varepsilon(\sigma) \equiv \mathrm{even}(\sigma) \pmod 2$; ensuite $\mathrm{odd}(\sigma) \equiv n \pmod 2$. D'où $r + n \equiv \mathrm{even}(\sigma) + \mathrm{odd}(\sigma) + n \equiv \mathrm{even}(\sigma) \equiv \varepsilon(\sigma) \pmod 2$.

(d) Découle de (b) et (c).

(e) Une simple manipulation de la série exponentielle.

34. Dans la formule de récurrence, le facteur $t\, A_{n-1}(t) = A_{n-1}(t)\, t\, A_0(t)$ est le polynôme générateur des permutations par des_0, finissant

par n. On compare la formule de récurrence obtenue avec (13.5) pour établir immédiatement la seconde formule. Enfin, le système linéaire à deux équations et aux deux inconnues $\sum_{n\ge1} A_n(t)\,u^n/n!$ et $\sum_{n\ge1} t\,A_n(t)\,u^n/n!$ est facile à résoudre.

35. On dit que x est une *descente* pour $\check f$ si le *mot* $\check f(1)\check f(2)\dots\check f(n)$ contient une lettre égale à x, si l'on a $\check f(i) > \check f(i+1) = x$ pour un certain $i \ge 1$ et si x n'apparaît pas dans le facteur $\check f(1)\check f(2)\dots\check f(i)$. Soit $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ la Z-factorisation de $\check f$ (*cf.* Proposition 16.2). On sait que $v_0 = \check\pi_f$. D'où x est une descente de v_0, donc une valeur prise, si et seulement si $f(x) > x$, d'après (15.13). Si l'on a $f(x) > x$, x non-récurrent, mais valeur prise par f, alors x apparaît dans le mot $\check f$. Désignons par k le plus petit entier pour lequel le mot v_k contient une lettre égale à x. Par construction de $\check f$, la lettre x est non précédée dans $v_0v_1\dots v_{k-1}$ et le mot v_k contient le facteur de deux lettres $f(x)\,x$. Donc x est une descente pour $\check f$. Réciproquement, si x est une descente pour $\check f$ et n'apparaît pas dans v_0, la lettre non-précédée égale à x ne peut être première lettre d'un facteur v_k. Par définition de $\check f$, l'image de x par f est donc un entier supérieur à x, donc x est une excédance pour f.

36. Soit $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ la Z-factorisation de $\check f$ (*cf.* Proposition 16.2). Alors $v_0 = \check\pi_f$. Les propriétés de la transformation fondamentale pour les *permutations* développées dans § 14.4 entraînent que si f est dans $\mathrm{End}_{n,k}$ (resp. dans $\mathrm{Acyc}_{n,k}$, resp. dans $\mathrm{Indec}_{n,k}$), le facteur v_0 est de longueur k et est un mot multilinéaire (i.e. sans répétition) (resp. un mot multilinéaire strictement croissant, resp. un mot multilinéaire débutant par sa plus grande lettre). De plus, la première lettre de v_1 doit être égale à une lettre de v_0. Les $(n-1-k)$ autres lettres du mot $\check f$ sont arbitrairement prises dans $[\,n\,]$. Le nombre de facteurs v_0 possibles est donc égal à $\binom{n}{k}\,k!$ (resp. $\binom{n}{k}$, resp. $\binom{n}{k}\,(k-1)!$). Si f est dans Arbor_n, alors les deux premières lettres de $\check f$ sont égales, les autres arbitraires, d'où $\operatorname{card}\mathrm{Arbor}_n = n \cdot n^{n-2}$. Enfin, en sommant $\operatorname{card}\mathrm{Acyc}_{n,k}$ de $k = 1$ à $k = n$, on trouve bien $(n+1)^{n-1}$ pour le cardinal de Acyc_n. Ce comptage peut être trouvé directement : on envoie bijectivement tout $f \in \mathrm{Acyc}_n$ sur une arborescence g de $[0,n]$ dans lui-même, de point fixe 0, en posant $g(x) = 0$ ou $f(x)$, suivant que x est ou non un point fixe de f et $g(0) = 0$. L'image d'un tel g par la transformation fondamentale est alors un mot $\check g$ débutant par deux lettres égales à 0, suivies par $(n-1)$ lettres arbitrairement prises dans $[0,n]$. Le nombre de tels mots $\check g$ est bien égal à $(n+1)^{n-1}$.

37. (a) Dans l'identité (17.5) prenons comme poids w le poids-unité, soit

$w(f)=1$ pour toute arborescence et donc aussi pour toute fonction acyclique. On obtient $\sum\limits_{n\ge 0} |\operatorname{Acyc}_n| \dfrac{u^n}{n!} = \exp\bigl(\sum\limits_{n\ge 1} |\operatorname{Arbor}_n| \dfrac{u^n}{n!}\bigr)$. Or $|\operatorname{Arbor}_n| = n^{n-1} = n\cdot n^{n-2} = n\,|\operatorname{Acyc}_{n-1}|$ pour $n\ge 1$. En posant $a := \sum\limits_{n\ge 0} |\operatorname{Acyc}_n| \dfrac{u^n}{n!}$, on a donc l'identité $a=\exp(u\,a)$. De même, en posant $b := \sum\limits_{n\ge 1} |\operatorname{Arbor}_n| \dfrac{u^n}{n!}$, on peut récrire la toute première identité comme $\sum\limits_{n\ge 0} |\operatorname{Arbor}_{n+1}| \dfrac{u^n}{(n+1)!} = \exp b$. En multipliant par u, puisque $|\operatorname{Arbor}_1| = 1$, on obtient : $b = u\,\exp b$.

(b) Prenons comme fonction-poids $w(g)=\alpha$ pour toute arborescence g, de sorte que $w^{(+)}(f)=\alpha^r$ si la fonction acyclique f a r points fixes (ou orbites). L'identité (17.5) donne : $1+\sum\limits_{n\ge 1} w^{(+)}(\operatorname{Acyc}_n) \dfrac{u^n}{n!} = \exp\bigl(\sum\limits_{n\ge 1} \alpha\, n^{n-1} \dfrac{u^n}{n!}\bigr)$. Or $w^{(+)}(\operatorname{Acyc}_n) = \sum\limits_{1\le r\le n} \alpha^r \binom{n}{r}\, r\, n^{n-r-1} = \alpha(\alpha+n)^{n-1}$, d'où $\exp(\alpha\, b) = 1 + \sum\limits_{n\ge 1} \alpha(\alpha+n)^{n-1} \dfrac{u^n}{n!}$.

(c) D'après (17.5) et (17.6), la série $e^{\alpha\, b}/(1-b)$ est la fonction génératrice du produit partitionnel des familles Acyc et End, munies des poids suivants : $w(g)=\alpha^k$, si la fonction acyclique g a k points fixes et le poids-unité pour toute endofonction. Le produit partitionnel de Acyc et End est la famille des endofonctions f dont *certains* points fixes (s'ils existent) sont marqués. Le poids $w'(f)$ de l'endofonction est alors α^k, où k est le nombre de ses points fixes marqués. Réordonnons les éléments récurrents de cette endofonction f de façon que ces k points soient les *plus petits* éléments récurrents. Alors $\check{f}$ débute par ces k lettres marquées, en ordre croissant, suivies par $(n-k)$ lettres *quelconques* prises dans $[\,n\,]$. Le polynôme générateur des endofonctions de End_n ayant ces k points marqués est donc $\alpha^k\, n^{n-k}$. Le polynôme générateur des endofonctions ayant k points fixes marqués par le poids w' est alors : $\binom{n}{k}\alpha^k\, n^{n-k}$. D'où $w'(\operatorname{End}_n) = \sum\limits_{0\le k\le n} \binom{n}{k}\alpha^k\, n^{n-k} = (\alpha+n)^n$.

38. Posons $a_1 = 1-u$, $a_s = 1$ pour tout $s\ge 2$ et pour $n\ge 1$ fixé $b_1 = \prod\limits_{0\le i\le n} (1+u^{(2^i)})$, puis $b_{1+s} = (1+u^{(2^{n+s})})$ pour $s\ge 1$.

Par récurrence sur n, on a immédiatement $a_1\cdot b_1 = 1-u^{(2^{n+1})}$. La Proposition 19.1 (c) entraîne $\prod\limits_{s\ge 1} a_s \cdot \prod\limits_{s\ge 1} b_s = (a_1\cdot b_1)\prod\limits_{s\ge 2} b_s = (1-u^{(2^{n+1})})\cdot \prod\limits_{s\ge 1}(1+u^{(2^{n+s})})$. La série $(1-u)\cdot\prod\limits_{i\ge 0}(1+u^{(2^i)})-1$ est donc d'ordre supérieur ou égal à 2^{n+1}. Comme n est arbitraire, elle est donc égale a 1.

39. $\lambda = 1^0 2^1 3^0 4^4 5^0 6^2 7^1$, $|\lambda| = 37$, $l(\lambda) = 8$ et $\tilde{\lambda} = (8, 8, 7, 7, 3, 3, 1)$.

40. On a $|\lambda^{(k)}| = k^2 + k(k-1)/2 = (3k^2 - k)/2$ et pour $k = 3$ le diagramme de Ferrers se présente comme :

$$\begin{array}{ccccc} * & * & * & & \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * \end{array}$$

41. (a) Les partitions d'ordre 6 sont : (6), $(5,1)$, $(4,2)$, $(4,1,1)$, $(3,3)$, $(3,2,1)$, $(3,1^3)$, (2^3), $(2^2,1^2)$, $(2,1^4)$, (1^6).
(b) Les partitions d'ordre 10 ayant des parts distinctes sont (10), $(9,1)$, $(8,2)$, $(7,3)$, $(7,2,1)$, $(6,4)$, $(6,3,1)$, $(5,4,1)$, $(5,3,2)$, $(4,3,2,1)$.
(c) Les partitions d'ordre 10 n'ayant que des parts impaires sont $(9,1)$, $(7,3)$, $(7,1^3)$, (5^2), $(5,3,1^2)$, $(5,1^5)$, $(3^3,1)$, $(3^2,1^3)$, $(3,1^7)$, (1^{10}).

42. Ce sont $(7,6^2,5,1^{13})$ et $(7,6^2,4^4,1^2)$.

43. On représente la partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ par une suite d'entiers $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_l)$ en posant $p_0 = l$ et $p_i = \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq l$. On illustre le programme dans le langage C :

```
 void NextPart(int p[]) /* p = partition,
 p[0] = la longueur, p[1] !=1 */
{
 int j, q, r, n, i=p[0] ;

 /* calcul n = (le nombre de 1 dans la partition) + 1 */
 while(p[i]==1) i-- ;
 n=p[0]-i+1 ;

 /* calcul q, r le quotient et le reste */
 q=n/(p[i]-1) ;
 r=n%(p[i]-1) ;

 /* construire la nouvelle partition */
 p[i]-- ;
 for (j=i+1 ; j<=i+q ; j++) p[j]=p[i] ;
 p[0]=i+q ;
 if (r>0) p[++p[0]]=r ;
}
```

44. On construit une bijection qui envoie une partition λ dont toutes les parts sont distinctes sur une partition μ dont toutes les parts

sont impaires. S'il y a une part paire $(2r)$ dans λ, on obtient une nouvelle partition en remplaçant cette part par deux parts égales (r, r). On itère cette procédure jusqu'à obtenir une partition dont toutes les parts sont impaires. Par exemple, pour $\lambda = (6, 4)$, on a $(6, 4) \mapsto (6, 2^2) \mapsto (6, 2, 1^2) \mapsto (6, 1^4) \mapsto (3^2, 1^4) = \mu$. On peut vérifier que cette construction est bien bijective.

45. Le coefficient de $u^{i_1+\cdots+i_r}$ dans le membre de droite, où $i_1, \ldots, i_r$ sont des entiers distincts n'est autre que $(-1)^{i_1+\cdots+i_r}$.

46. La statistique $s(\lambda)$ est le nombre de points dans la ligne la plus haute et $\sigma(\lambda)$ est le nombre de points dans la ligne oblique à 135°, située à droite, sur le bord du diagramme de Ferrers, comme indiqué dans la figure suivante :

$$\begin{array}{cccccccccc}
s & s & s & & & & & & & \\
* & * & * & * & & & & & & \\
* & * & * & * & * & * & * & \sigma & & \\
* & * & * & * & * & * & * & * & \sigma & \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & \sigma
\end{array}$$

On a $s(6, 5, 3, 2, 1) = 1, \sigma(6, 5, 3, 2, 1) = 2$, $s(7, 6, 3) = 3, \sigma(7, 6, 3) = 2$ et $s(2k-1, 2k-2, 2k-3, \cdots, k+1, k) = \sigma(2k-1, 2k-2, 2k-3, \cdots, k+1, k) = k$.

47. On utilise l'exercice 45. Notons $\mathcal{P}_D$ l'ensemble des partitions ayant des parts toutes distinctes. On partage cet ensemble en 3 sous-ensembles : $\mathcal{P}_D = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3$, où

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \{\lambda \mid s(\lambda) \le \sigma(\lambda),\ \lambda \text{ n'est pas un trapèze}\}\\
&\qquad + \{\lambda \mid s(\lambda) \le \sigma(\lambda) - 1,\ \lambda \text{ est un trapèze}\},\\
\mathcal{P}_2 &= \{\lambda \mid s(\lambda) \ge \sigma(\lambda) + 1,\ \lambda \text{ n'est pas un trapèze}\}\\
&\qquad + \{\lambda \mid s(\lambda) \ge \sigma(\lambda) + 2,\ \lambda \text{ est un trapèze}\},\\
\mathcal{P}_3 &= \{\lambda \mid \sigma \le s(\lambda) \ge \sigma(\lambda) + 1,\ \lambda \text{ est un trapèze}\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_1$, on déplace la ligne la plus haute en la posant à côté de la ligne oblique la plus à droite ; on obtient une partition $\mu \in \mathcal{P}_2$ comme indiqué dans la figure suivante :

$$\lambda = \begin{pmatrix}
s\ s\ s \\
*\ *\ *\ * \\
*\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ \sigma \\
*\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ \sigma \\
*\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ \sigma
\end{pmatrix} \mapsto \mu = \begin{pmatrix}
*\ *\ *\ * \\
*\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ \sigma\ s \\
*\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ \sigma\ s \\
*\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ \sigma\ s
\end{pmatrix}$$

Il est clair $(-1)^{l(\lambda)}x^{|\lambda|} = -(-1)^{l(\mu)}x^{|\mu|}$. On peut vérifier que cette construction est bijective. D'où

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_D}(-1)^{l(\lambda)}x^{|\lambda|} = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_3}(-1)^{l(\lambda)}x^{|\lambda|}.$$

D'autre part

$$\mathcal{P}_3 = \{(2k-1, 2k-2, 2k-3, \cdots, k+1, k)\} \\ + \{(2k, 2k-1, 2k-2, \cdots, k+1)\}.$$

D'après l'exercice 40 et l'indication donnée, on a :

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_3}(-1)^{l(\lambda)}x^{|\lambda|} = \sum_{n\geq 0}\epsilon_n x^n.$$

48. On calcule d'abord le tableau

$$\begin{array}{ccccccc} k & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ (3k^2-k)/2 & = & 0 & 1 & 5 & 12 & 22 \\ (3k^2+k)/2 & = & 0 & 2 & 7 & 15 & 26 \end{array}$$

puis on écrit l'identité du théorème pentagonal

$$\sum_n p(n)x^n = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots$$

Avec la convention $p(i) = 0$ pour $i < 0$, on obtient :

$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7) = 0$ pour tout $n \leq 10$.

A partir de $p(0) = 1$, on calcule

$$\begin{array}{ccccccccccccc} n & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ p(n) & = & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 15 & 22 & 30 & 42 \end{array}$$

49. Les indications devraient suffire.

CHAPITRE 2

LES q-SÉRIES GÉNÉRATRICES

Sommaire

La transformation de Laplace inverse permet d'associer à une série formelle à une variable une autre série formelle dont le coefficient d'ordre n est *normalisé* par le facteur $n!$ Cette normalisation a de nombreux avantages : la dérivée d'une série ainsi normalisée — on parle alors de série génératrice *exponentielle* — s'obtient par simple décalage des coefficients ; les formules qui lient les coefficients de l'exponentielle d'une série formelle a aux coefficients de la série a elle-même ont une forme élégante ; enfin, on peut obtenir une expression close pour les séries génératrices *exponentielles* de plusieurs polynômes classiques.

L'algèbre des séries génératrices exponentielles n'est pas la panacée universelle. On ne peut calculer dans cette algèbre la série génératrice de plusieurs autres suites de polynômes. D'autres normalisations sont apparues, d'horizons divers. Dès le milieu du dix-neuvième siècle, on a vu apparaître, avec Heine, des séries où le facteur $n!$ était remplacé par un polynôme de degré n en une autre variable, des séries où le monôme u^n est normalisé par le polynôme noté $(q;q)_n$, en une autre variable q et défini par

$$(0.1)\qquad (q;q)_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n=0\,; \\ (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n), & \text{si } n\ge 1. \end{cases}$$

L'algèbre de ces séries a été puissamment développée au début du siècle par Jackson, est tombée en désuétude, puis a repris de la vigueur récemment dans plusieurs domaines des mathématiques, notamment dans l'étude des groupes quantiques et dans de nombreux problèmes de nature combinatoire.

On a appelé les séries ainsi normalisées des *q-séries.* Du point de vue des séries formelles, ce ne sont que des séries formelles en deux variables, disons u et q, où la seconde variable q, utilisée pour la normalisation, joue un rôle privilégié. Quelques éléments de base sur l'algèbre des séries formelles en deux variables ont été donnés à propos de l'étude des matrices de Seidel (*cf.* chap. 1, § 12). Notons $\Omega[[u,q]]$ l'algèbre des séries formelles en deux variables u et q, à coefficients dans l'anneau Ω. Comme l'on a vu, tout élément de cette algèbre s'exprime comme une série

$$(0.2)\qquad a = \sum_{n\ge 0, m\ge 0} a(n,m)\, u^n\, q^m,$$

où, pour tout couple (n,m), le symbole $a(n,m)$ est un élément de Ω. Une telle série peut encore être vue comme une série *en une variable* u, à coefficients dans l'anneau des séries $\Omega[[q]]$ en une variable q. On écrit alors

$$(0.3)\qquad a = \sum_{n\ge 0} u^n \Bigl(\sum_{m\ge 0} a(n,m)\, q^m\Bigr).$$

Pour tout entier $n\ge 0$, l'expression $(q;q)_n$ est un polynôme en q, inversible dans $\Omega[[q]]$, puisque son coefficient constant est 1. On peut donc récrire la série a comme

$$(0.4)\qquad a = \sum_{n\ge 0} \frac{u^n}{(q;q)_n}\, b(n;q),$$

où $b(n;q)$ est la série formelle en la variable q

$$(0.5)\qquad b(n;q) := (q;q)_n \cdot \Bigl(\sum_{m\ge 0} a(n,m)\, q^m\Bigr).$$

Toute série formelle a écrite sous la forme (0.4) est dite *q-série.* Le coefficient de $u^n/(q;q)_n$ est alors une série formelle en l'unique variable q.

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude de ces séries. Il importe de donner, d'abord, l'outil de base, qui permet pratiquement d'établir toutes les identités sur les q-séries ; cet outil est le *théorème q-binomial*, dont l'étude est faite dans le premier paragraphe. Il convient, ensuite, de passer en revue les modèles combinatoires connus, où le polynôme $(q;q)_n$ défini plus haut, apparaît comme un polynôme générateur. On est ainsi conduit vers l'étude des statistiques dites *mahoniennes* faite au deuxième paragraphe. Aux coefficients binomiaux traditionnels correspondent les coefficients q-binomiaux ou polynômes gaussiens. Nous donnons plusieurs environnements combinatoires où ces polynômes apparaissent (voir § 3).

Le *Verfahren de MacMahon* est un premier outil qui permet de transcrire dans l'algèbre des q-séries les propriétés de certaines statistiques sur le groupe symétrique ou sur des classes de réarrangements (voir § 4). L'*indice majeur* et le *nombre d'inversions* sont les deux statistiques mahoniennes fondamentales. Nous donnons, au paragraphe 5, la construction d'une transformation qui permet de passer de l'une à l'autre.

Les séries trigonométriques classiques ont un q-analogue étudié au paragraphe 6. Les polynômes Eulériens, abordés au chap. 1, § 16, ont deux q-analogues distincts, dont les définitions et les propriétés sont données dans les paragraphes 7 et 8.

1. Le théorème q-binomial

Reprenons les notations (0.3)–(0.5). Lorsque, pour chaque $n \geq 0$, le rapport $b(n+1;q)/b(n;q)$ est une *fraction rationnelle* en q^n, égale à 1 pour $q = 0$ et telle que $b(0;q) = 1$, on obtient ce qu'on appelle une *série hypergéométrique basique.* Dans l'expression analytique d'une telle série, on adopte la notation suivante qui prolonge la notation (0.1) : pour tout élément ω de l'anneau, on définit la *q-factorielle montante en* ω par

$$(1.1) \qquad (\omega;q)_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0\,; \\ (1-\omega)(1-\omega q)\ \ldots\ (1-\omega q^{n-1}), & \text{si } n \geq 1\,; \end{cases}$$

dans sa version *finie* et

$$(1.2) \qquad (\omega;q)_\infty := \lim_n (\omega;q)_n = \prod_{n\geq 0} (1-\omega q^n);$$

dans sa version *infinie*.

Si l'anneau de base Ω est le corps des complexes, la fraction rationnelle $b(n+1;q)/b(n;q)$ peut être mise sous la forme :

$$\frac{b(n+1;q)}{b(n;q)} = \frac{(1-\alpha_1 q^n)\ldots(1-\alpha_r q^n)}{(1-\beta_1 q^n)\ldots(1-\beta_s q^n)},$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ sont des complexes. Par itération, on en déduit

$$b(n;q) = \frac{b(n;q)}{b(n-1;q)} \cdots \frac{b(2;q)}{b(1;q)} \frac{b(1;q)}{b(0;q)}$$

$$= \frac{(1-\alpha_1 q^{n-1})\dots(1-\alpha_r q^{n-1})}{(1-\beta_1 q^{n-1})\dots(1-\beta_s q^{n-1})} \times \cdots \times \frac{(1-\alpha_1 q)\dots(1-\alpha_r q)}{(1-\beta_1 q)\dots(1-\beta_s q)}\,\frac{(1-\alpha_1)\dots(1-\alpha_r)}{(1-\beta_1)\dots(1-\beta_s)},$$

soit

$$b(n;q) = \frac{(\alpha_1;q)_n \dots (\alpha_r;q)_n}{(\beta_1;q)_n \dots (\beta_s;q)_n}. \tag{1.3}$$

Pour un anneau de base Ω quelconque, on prend l'expression de $b(n;q)$ donnée en (1.3) comme définition. Comme chaque q-factorielle montante $(\beta_i;q)_n$ a un coefficient constant égal à 1, elle est toujours inversible dans $\Omega[[q]]$, de sorte que l'expression $b(n;q)$ donnée en (1.3) a toujours un sens. On appelle donc *série hypergéométrique basique* toute q-série de la forme

$${}_r\varphi_s\Big(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_r\\ \beta_1,\dots,\beta_s\end{matrix};q,u\Big) := \sum_{n\ge 0} \frac{(\alpha_1;q)_n \dots (\alpha_r;q)_n}{(\beta_1;q)_n \dots (\beta_s;q)_n}\,\frac{u^n}{(q;q)_n}. \tag{1.4}$$

Cette série peut donc être définie dans toute algèbre $\Omega[[u,q]]$ de séries formelles à deux variables u et q, quel que soit l'anneau de base Ω. Lorsque $r=0$ (resp. $s=0$, resp. $r=0$ et $s=0$), on adopte les notations ${}_0\varphi_s\Big(\begin{matrix}\overline{}\\ \beta_1,\dots,\beta_s\end{matrix};q,u\Big)$ (resp. ${}_r\varphi_0\Big(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_r\\ \underline{}\end{matrix};q,u\Big)$, resp. ${}_0\varphi_0\Big(\begin{matrix}-\\ -\end{matrix};q,u\Big)$).

Le *théorème q-binomial* donne, en fait, un moyen d'exprimer la série ${}_1\varphi_0\big(\begin{smallmatrix}\alpha\\ -\end{smallmatrix};q,u\big)$ comme un produit infini.

THÉORÈME 1.1 (théorème q-binomial). — *On a l'identité :*

$$\sum_{n\ge 0} (\alpha;q)_n \frac{u^n}{(q;q)_n} = \frac{(\alpha\, u;q)_\infty}{(u;q)_\infty} = \prod_{n\ge 0} \frac{1-\alpha\, u\, q^n}{1-uq^n}, \tag{1.5}$$

ou encore :

$${}_1\varphi_0\Big(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix};q,u\Big) = \frac{(\alpha\, u;q)_\infty}{(u;q)_\infty}. \tag{1.6}$$

Avant de donner la démonstration de ce théorème, il importe de faire plusieurs remarques.

(a) L'*ordre* $o(a)$ d'une série formelle $a=\sum_{n\ge 0, m\ge 0} a(n,m)\, u^n\, q^m$ est défini comme le plus petit entier $k\ge 0$ tel que le polynôme

$$\sum_{n+m=k} a(n,m)\, u^n\, q^m,$$

dit *polynôme homogène de degré k de a* (en u et q) ne soit pas nul. Considérons une famille (a_s) $(s \geq 0)$ de séries formelles à deux variables. Comme pour les séries formelles en une variable, on vérifie que si l'ordre de a_s tend vers l'infini avec s, alors le produit infini $\prod_{s\geq 0}(1-a_s)$ est bien une série formelle. Dans le produit infini $(\alpha u; q)_\infty$, lorsque $\alpha \neq 0$, le terme $\alpha\, u\, q^n$ est une série (réduite à un monôme) d'ordre $(n+1)$. Comme $o(\alpha\, u\, q^n)$ tend vers l'infini avec n, le produit infini $(\alpha\, u; q)_\infty$ est bien défini. Il en est de même du produit infini $(u; q)_\infty$ apparaissant au dénominateur.

(b) Dans le coefficient $(\alpha; q)_n/(q; q)_n$ de u^n dans la formule (1.5), faisons la substitution $\alpha \leftarrow q^\alpha$. On obtient $(q^\alpha; q)_n/(q; q)_n$; faisons ensuite tendre q vers 1. On obtient $(\alpha)_n/n!$. On dit que $(q^\alpha; q)_n/(q; q)_n$ est le *q-analogue* de la factorielle montante $(\alpha)_n/n!$ Or la série $\sum_{n\geq 0} u^n\, (\alpha)_n/n!$ est la *série hypergéométrique* ${}_1F_0\big({\alpha \atop -}; u\big)$. Au chap. 1, § 4, on a vu que l'identité

$$(1.7) \qquad {}_1F_0\Big({\alpha \atop -}; u\Big) = (1-u)^{-\alpha}$$

permettait de donner un sens à l'expression $(1-u)^{-\alpha}$ lorsque α n'est pas entier (positif ou négatif). L'identité (1.6) est dite le *q-analogue* de (1.7).

La différence importante entre ces deux formules est la suivante : lorsqu'on se place dans l'algèbre des séries formelles, la formule (1.7) est une *définition* de $(1-u)^{-\alpha}$ lorsque α n'est pas entier, alors que (1.4) est une *identité*. Au chap. 1, § 15, nous avons encore exprimé $(1-u)^{-\alpha}$ comme étant la série $\exp(\alpha \log(1-u)^{-1})$, où “log” est la bijection qui envoie les séries dont le terme constant est égal à 1 sur les séries sans terme constant.

En revanche, lorsque l'on considère les séries ${}_1F_0\big({\alpha \atop -}; u\big)$ et ${}_1\varphi_0\big({\alpha \atop -}; q, u\big)$ comme des séries de puissances des variables *complexes* u et q, les deux formules (1.6) et (1.7) sont des *identités*, pourvu que les modules de u et q soient inférieurs à 1. La première démonstration que nous donnons ci-dessous de (1.6) s'inspire d'ailleurs de la *démonstration* classique de (1.7) dans le cas analytique. Cependant, la fin de la démonstration fait appel à un argument de topologie de séries formelles et non pas à un argument de nature analytique.

(c) Pour les besoins de la démonstration du Théorème 1.1, citons l'identité suivante, facile à établir :

$$(1.8) \qquad (\alpha; q)_n - (\alpha\, q; q)_n = (\alpha\, q; q)_{n-1}\, \alpha(q^n - 1) \quad (n \geq 1).$$

Il existe de nombreuses relations sur les q-factorielles montantes. Parmi celles qui sont fréquemment utilisées dans les calculs, citons la propriété d'*associativité* (immédiate à établir)

$$(1.9) \qquad (\alpha; q)_{n+k} = (\alpha; q)_n\, (\alpha q^n; q)_k$$

et de *renversement des indices*

$$(\alpha^{-1}q^{1-n};q)_n = (\alpha;q)_n\,(-\alpha^{-1})^n\,q^{-n(n-1)/2}, \tag{1.10}$$

pour lequel on peut donner la démonstration suivante : par définition, on a, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}(\alpha;q)_n &= (1-\alpha)(1-\alpha q)\cdots(1-\alpha q^{n-1})\\ &= (-\alpha)(1-\alpha^{-1})(-\alpha q)(1-\alpha^{-1}q^{-1})\cdots(-\alpha q^{n-1})(1-\alpha^{-1}q^{-(n-1)})\\ &= (-\alpha)^n q^{n(n-1)/2}(1-\alpha^{-1})(1-\alpha^{-1}q^{-1})\cdots(1-\alpha^{-1}q^{1-n})\\ &= (-\alpha)^n q^{n(n-1)/2}(\alpha^{-1}q^{1-n};q)_n,\end{aligned}$$

une formule qui est encore valable pour $n=0$.

Enfin, notons que la relation

$$(\alpha;q)_n = \frac{(\alpha;q)_\infty}{(\alpha q^n;q)_\infty} \tag{1.11}$$

permet de définir la q-factorielle montante $(\alpha;q)_n$ pour *tout nombre réel* n.

(d) Si on récrit l'identité (1.5) avec $\alpha = q^N$, on trouve

$$\frac{(q^N u;q)_\infty}{(u;q)_\infty} = (u;q)_N^{-1} = \sum_{n\geq 0}(q^N;q)_n \frac{u^n}{(q;q)_n}. \tag{1.12}$$

Or, si l'on considère u et q comme des variables complexes de module strictement inférieur à 1 et si l'on fait tendre q vers 1, on obtient l'identité

$$(1-u)^{-N} = \sum_{n\geq 0}(N)_n\,\frac{u^n}{n!},$$

c'est-à-dire l'identité binomiale usuelle.

Première démonstration du Théorème 1.1. — Partons de la série ${}_1\varphi_0\big({\alpha \atop -};q,u\big) = \sum\limits_{n\geq 0} u^n\,(\alpha;q)_n/(q;q)_n$ et évaluons la *q-différence*

$$\begin{aligned}{}_1\varphi_0\Big({\alpha \atop -};q,u\Big) - {}_1\varphi_0\Big({\alpha \atop -};q,qu\Big) &= \sum_{n\geq 1}\frac{(\alpha;q)_n}{(q;q)_n}u^n(1-q^n) = \sum_{n\geq 1}\frac{(\alpha;q)_n}{(q;q)_{n-1}}u^n\\ &= (1-\alpha)u\Big(1+\sum_{n\geq 2}\frac{(\alpha\,q;q)_{n-1}}{(q;q)_{n-1}}u^{n-1}\Big)\\ &= (1-\alpha)u\,{}_1\varphi_0\Big({\alpha\,q \atop -};q,u\Big).\end{aligned} \tag{1.13}$$

D'autre part, en utilisant (1.8), on a :

$$
\begin{aligned}
{}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,u\Bigr)-{}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha\,q}{-};q,u\Bigr)&=\sum_{n\ge1}\frac{(\alpha;q)_n-(\alpha\,q;q)_n}{(q;q)_n}u^n\\
&=-\alpha\sum_{n\ge1}\frac{(\alpha\,q;q)_{n-1}}{(q;q)_{n-1}}u^n\\
&=-\alpha\,u\,{}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha\,q}{-};q,u\Bigr).
\end{aligned}\tag{1.14}
$$

De (1.13) et (1.14), on tire

$$
{}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,u\Bigr)=\frac{1-\alpha\,u}{1-u}\,{}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,q\,u\Bigr),
$$

et par itération

$$
{}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,u\Bigr)=\frac{(\alpha\,u;q)_m}{(u;q)_m}\,{}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,q^m\,u\Bigr)\quad(m\ge0).\tag{1.15}
$$

Si l'on considérait ${}_1\varphi_0\bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,u\bigr)$ comme une série analytique de la variable complexe u, il suffirait de dire que ${}_1\varphi_0\bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,u\bigr)$ est continu à l'intérieur du disque unité et comme cette série est égale à 1 pour $u=0$, l'identité (1.6) découle de (1.15) en faisant tendre m vers l'infini.

Tenons-nous en à la seule topologie des séries formelles et considérons un couple d'entiers positifs (i,j) tels que $i+j\ge1$. Dès que $m\ge j+1$ les coefficients de $u^i\,q^j$ dans

$$
\frac{(\alpha\,u;q)_\infty}{(u;q)_\infty}\quad\text{et dans}\quad\frac{(\alpha\,u;q)_m}{(u;q)_m}
$$

sont égaux. Or, ${}_1\varphi_0\bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,q^m\,u\bigr)$ est de la forme $1+q^m\,u\,a$, où a est une série formelle en les deux variables u et q. Par conséquent, quel que soit i, les coefficients de $u^i\,q^j$ dans

$$
\frac{(\alpha\,u;q)_m}{(u;q)_m}\quad\text{et dans}\quad\frac{(\alpha\,u;q)_m}{(u;q)_m}(1+q^m\,u\,a)={}_1\varphi_0\Bigl(\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{-};q,u\Bigr)
$$

sont les mêmes. Ce qui établit l'identité (1.6). $\square$

Seconde démonstration du Théorème 1.1. — Le membre de droite de l'identité (1.6) est une série formelle que nous pouvons noter

$$
b(u,q):=\sum_{n\ge0}c_n(q)\,u^n,
$$

où, pour tout $n \geq 0$, le coefficient $c_n(q)$ est une série formelle en la variable q. Or

$$b(u,q) = \frac{1-\alpha\, u}{1-u} \prod_{n\geq 0} \frac{(1-\alpha\, u\, q\, q^n)}{(1-u\, q\, q^n)} = \frac{1-\alpha\, u}{1-u} b(uq,q),$$

d'où

$$(1-\alpha\, u) b(uq,q) = (1-u) b(u,q),$$

ou encore

$$(1-\alpha u) \sum_{n\geq 0} c_n(q)\, q^n u^n = (1-u) \sum_{n\geq 0} c_n(q)\, u^n.$$

Cherchons le coefficient de u^{n+1} dans chacun des membres. On trouve :

$$c_{n+1}(q) q^{n+1} - \alpha\, q^n\, c_n(q) = c_{n+1}(q) - c_n(q)\,;$$

d'où

$$c_{n+1}(q) = c_n(q) \frac{1-\alpha\, q^n}{1-q^{n+1}}.$$

Comme $c_0(q) = 1$, on trouve, par récurrence sur n, l'expression souhaitée, à savoir :

$$c_n(q) = \frac{(\alpha;q)_n}{(q;q)_n}. \quad \square$$

En posant $a = 0$ dans (1.6), il vient :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(u;q)_\infty}. \tag{1.16}$$

Considérons le produit infini $(-u;q)_\infty$ et reprenons *le même* argument développé dans la seconde démonstration ci-dessus. Si l'on pose $(-u;q)_\infty = \sum\limits_{n\geq 0} c_n(q)\, u^n$, on trouve $c_{n+1}(q)q^{n+1} + c_n(q)q^n = c_{n+1}(q)$, d'où

$$c_{n+1}(q) = \frac{q^n c_n(q)}{(1-q^{n+1})}.$$

Comme $c_0(q) = 1$, on obtient

$$c_{n+1}(q) = \frac{q^{(n+1)n/2}}{(q;q)_{n+1}};$$

soit donc l'identité

$$\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2} \frac{u^n}{(q;q)_n} = (-u;q)_\infty. \tag{1.17}$$

Les deux séries apparaissant en (1.16) et en (1.17) sont respectivement notées $e_q(u)$ et $E_q(u)$. On les appelle *première* et *seconde q-exponentielle.*

2. Statistiques mahoniennes

Supposons donné, pour chaque entier $n \geq 0$, un ensemble $S_{[n]}$ de cardinal $n!$ (par exemple, le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$) et supposons que pour chaque $n \geq 0$ soit défini une statistique $f : S_{[n]} \to \mathbb{N}$ telle que le polynôme générateur

$$a(n) := \sum_{s \in S_{[n]}} q^{f(s)}$$

soit égal à

$$a(n) = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \quad (n \geq 0). \tag{2.1}$$

On dit alors que f est une statistique *mahonienne* sur la famille $(S_{[n]})$ $(n \geq 0)$. La série

$$a := \sum_{n \geq 0} u^n \, \frac{a(n)}{(q;q)_n} \tag{2.2}$$

est appelée *q-fonction génératrice* de la suite des polynômes $(a(n))$ $(n \geq 0)$.

Il est souvent commode d'associer à tout entier positif n son *q-analogue* défini par

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \tag{2.3}$$

et la *q-factorielle* de n

$$\begin{aligned} [n]_q! &:= [n]_q \, [n-1]_q \, \cdots [2]_q \, [1]_q \\ &= \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \frac{(1-q^{n-1})}{(1-q)} \cdots \frac{(1-q^2)}{(1-q)} \frac{(1-q)}{(1-q)} \\ &= \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le polynôme générateur défini en (2.2) est donc égal à la q-factorielle de n.

La q-fonction génératrice définie en (2.2) a ainsi la forme très simple suivante :

$$a = \sum_{n \geq 0} u^n \, \frac{1}{(q;q)_n} \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} = \Bigl(1 - \frac{u}{1-q}\Bigr)^{-1}. \tag{2.5}$$

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'introduire plusieurs statistiques mahoniennes, qui interviennent de façon naturelle dans l'étude des q-séries et d'en étudier leurs propriétés.

La première de ces statistiques, que nous appelons “tot” pour “total”, est banale, mais est d'une grande commodité pour les calculs. Pour chaque $n \geq 0$ désignons par SE_n l'ensemble des suites *sous-excédantes* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On entend par là des suites de longueur n d'entiers x_i satisfaisant les inégalités $0 \leq x_i \leq i-1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Le cardinal de SE_n est naturellement égal à $n!$ Pour toute suite $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in SE_n$, on définit

$$\operatorname{tot} x := x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{2.6}$$

PROPOSITION 2.1. — *La statistique* “tot” *sur* SE_n *est mahonienne, c'est-à-dire pour tout* $n \geq 1$*, le polynôme générateur de* SE_n *par la statistique* “tot” *est donné par :*

$$\sum_{x \in SE_n} q^{\operatorname{tot} x} = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}. \tag{2.7}$$

Démonstration. — Le résultat est banal pour $n = 1$. Ensuite, par récurrence sur n, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{x \in SE_n} q^{\operatorname{tot} x} &= \sum_{x' \in SE_{n-1}} q^{\operatorname{tot} x'} \sum_{0 \leq x_n \leq n-1} q^{x_n} \\ &= \frac{(q;q)_{n-1}}{(1-q)^{n-1}} (1 + q + \cdots + q^{n-1}) \\ &= \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}. \quad \square\end{aligned}$$

Les trois autres statistiques mahoniennes que nous introduisons sont définies sur le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$; ce sont le *nombre d'inversions* “inv”, l'*indice majeur* “maj” et la *statistique de Denert* “den”.

Soit $\sigma = \sigma(1) \ldots \sigma(n)$ une permutation, écrite comme un mot linéaire. Classiquement, on définit le *nombre d'inversions*, $\operatorname{inv} \sigma$, de la permutation σ comme étant le nombre de couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

L'*indice majeur* $\operatorname{maj} \sigma$ de σ est la *somme des positions* i pour lesquelles on a une descente $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Utilisons la notation $\chi\{A\} = 1$ ou 0, suivant que l'énoncé A est vrai ou faux. Alors, l'indice majeur de σ est défini par

$$\operatorname{maj} \sigma := \sum_{1 \leq i \leq n-1} i \, \chi\{\sigma(i) > \sigma(i+1)\}. \tag{2.8}$$

La définition de "den" repose sur la notion d'*intervalle cyclique*. Soient i, j deux entiers stictement positifs ; on définit l'*intervalle cyclique* $\rrbracket i, j \rrbracket$ par

$$\rrbracket i, j \rrbracket := \begin{cases}]i, j], & \text{si } i \le j\,; \\ [1, j] +]i, +\infty[, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

La *statistique de Denert*, $\operatorname{den}\sigma$, de la permutation σ est définie comme le nombre de couples (i, j) tels que $1 \le i < j \le n$ et $\sigma(i) \in \rrbracket \sigma(j), j \rrbracket$.

Pour démontrer que les trois statistiques qui viennent d'être définies sont mahoniennes sur $\mathfrak{S}_n$, nous construisons trois *bijections* $\sigma \mapsto x$ de $\mathfrak{S}_n$ sur SE_n satisfaisant respectivement.

$$\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{tot} x, \quad \operatorname{maj}\sigma = \operatorname{tot} x, \quad \operatorname{den}\sigma = \operatorname{tot} x.$$

La construction de ces trois bijections fait appel à trois différents *codages* des permutations. L'image x de σ par chacune de ces bijections est appelée le inv-*codage*, le maj-*codage* et le den-*codage* de σ, respectivement

2.1. *Le* inv-*codage*. — On l'appelle encore *codage de Lehmer*. Soit $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$ une permutation. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on définit x_i comme étant égal au nombre de termes $\sigma(j)$ qui sont situés à la gauche de $\sigma(i)$ et qui sont plus grands que lui, soit

$$x_i := \sum_{1 \le j \le i-1} \chi\big(\sigma(j) > \sigma(i)\big).$$

La suite $x := (x_1, \dots, x_n)$ ainsi définie est évidemment sous-excédante et la correspondance $\sigma \mapsto x$ bien bijective. De plus, la somme $\operatorname{tot} x$ des x_i est précisément égale au *nombre d'inversions* $\operatorname{inv}\sigma$ de la permutation σ.

Dans l'exemple suivant, on a écrit sous chaque élément $\sigma(i)$ l'élément correspondant x_i du inv-codage.

$$\begin{array}{rl} \sigma = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 9 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\ x = & \;\;\, 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 5 \;\; 1 \end{array}$$

En particulier, $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{tot} x = 16$.

Pour reconstruire σ à partir de son inv-codage x, on définit d'abord $\sigma(n) = n - x_n$. Les éléments $\sigma(k+1)$, …, $\sigma(n)$ ayant été obtenus, on élimine tous les termes de la suite $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ qui sont égaux à l'un des $\sigma(l)$ pour un certain $l \ge k+1$. Alors, $\sigma(k)$ est égal au $(x_k + 1)^{\text{ième}}$ terme de la suite $(n, n-1, \dots, 2, 1)$, lorsque celle-ci est lue de la gauche vers la droite.

Par exemple, partons de la suite sous-excédante $x=(0,1,1,2,0,4,2,5,1)$ de longueur $n=9$; on a d'abord $\sigma(9):=n-x_n=9-1=8$. On forme, ensuite, la suite $(9,7,6,5,4,3,2,1)$, où l'on a supprimé 8. Alors $\sigma(8)$ est égal au $(x_8+1)=(5+1)=6^{\text{ième}}$ terme de cette suite, soit $\sigma(8)=3$. La suite courante devient $(9,7,6,5,4,2,1)$, dont le $(x_7+1)=(2+1)=3^{\text{ième}}$ terme est 6 ; d'où $\sigma(7)=6$. On considère alors $(9,7,5,4,2,1)$ dont le $(x_6+1)=(4+1)=5^{\text{ième}}$ terme est 2 ; d'où $\sigma(6)=2$. Et ainsi de suite.

2.2. *Le* maj-*codage.* — Partant d'une permutation $\sigma'\in\mathfrak{S}_{n-1}$, écrite comme un mot $\sigma'(1)\ldots\sigma'(n-1)$, on peut engendrer n permutations $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ en insérant la lettre n tout en début de mot, ou bien entre les lettres $\sigma'(i)$ et $\sigma'(i+1)$ pour $1\le i\le n-2$, ou encore juste à la fin du mot ; disons, respectivement, *en position* $i=0,1,2,\ldots,(n-1)$. Ainsi, toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ est caractérisée par un couple (σ',i) où $\sigma'\in\mathfrak{S}_{n-1}$ et $0\le i\le n-1$. La surjection $\psi:\sigma\mapsto\sigma'$ de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_{n-1}$ consiste à enlever la lettre n du mot $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$.

Pour décrire le maj-codage, on *renumérote* les n positions possibles où l'on peut insérer n dans $\sigma'=\sigma'(1)\ldots\sigma'(n-1)$ de la façon suivante : on donne d'abord la numérotation $j=0$ si n est inséré à la droite de $\sigma'(n-1)$; supposons que σ' ait d descentes, c'est-à-dire d positions $\sigma'(i)\sigma'(i+1)$ telles que $\sigma'(i)>\sigma'(i+1)$. On numérote celles-ci de $j=1$ à $j=d$ *de la droite vers la gauche* ; on donne ensuite la numérotation $j=d+1$ pour l'insertion en début de mot et les numérotations $j=d+2,d+3,\ldots,n-1$ pour les $(n-2-d)$ insertions dans les autres positions lorsqu'on lit le mot σ' *de la gauche vers la droite*. Si la lettre n dans la permutation originale σ est en position j dans la *renumérotation* des positions juste décrite, on pose $\sigma_{n-1}:=\sigma'=\psi(\sigma)$, $x_n:=j$ et on note

$$[\sigma_{n-1},x_n] \tag{2.9}$$

cette nouvelle manière de décrire la permutation $\sigma_n:=\sigma$.

De même, à σ_{n-1} correspond un couple $[\sigma_{n-2},x_{n-1}]$ et par itération, on obtient une suite de couples $[\sigma_{n-3},x_{n-2}]$, … , $[\sigma_0,x_1]$, où σ_0 est la permutation vide et $x_1=0$. On obtient ainsi une suite (forcément) sous-excédante $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, qu'on appelle le *maj-codage* de σ.

Exemple. — Soit la permutation $\sigma=7\,1\,5\,4\,9\,2\,6\,3\,8$. Les permutations $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_8,\sigma_9$ sont simplement les *sous-mots* réduits à la lettre 1, puis aux lettres $1,2,\ldots$, aux lettres $1,2,\ldots,8$, enfin aux lettres $1,2,\ldots,9$.

On a ainsi successivement :

$\sigma_1=1$ et $x_1=0$;

$\sigma_2=1\,2$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_1 sont numérotés (en indice) ${}_1 1_0$, on a : $x_2=0$;

$\sigma_3=1\,2\,3$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_2 sont numérotés ${}_1 1_2 2_0$, on a : $x_3=0$;

$\sigma_4 = 1\,4\,2\,3$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_3 sont numérotés ${}_1 1_2 2_3 3_0$, on a : $x_4 = 2$;

$\sigma_5 = 1\,5\,4\,2\,3$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_4 sont numérotés ${}_2 1_3 4_1 2_4 3_0$, on a $x_5 = 3$;

$\sigma_6 = 1\,5\,4\,2\,6\,3$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_5 sont numérotés ${}_3 1_4 5_2 4_1 2_5 3_0$, on a : $x_6 = 5$;

$\sigma_7 = 7\,1\,5\,4\,2\,6\,3$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_6 sont numérotés ${}_4 1_5 5_3 4_2 2_6 6_1 3_0$, on a : $x_7 = 4$;

$\sigma_8 = 7\,1\,5\,4\,2\,6\,3\,8$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_7 sont numérotés ${}_5 7_4 1_6 5_3 4_2 2_7 6_1 3_0$, on a : $x_8 = 0$;

$\sigma_9 = 7\,1\,5\,4\,9\,2\,6\,3\,8$ et comme les emplacements d'insertion dans σ_8 sont numérotés $\sigma_8 = {}_5 7_4 1_6 5_3 4_2 2_7 6_1 3_8 8_0$, on a : $x_9 = 2$.

Le maj-codage de σ vaut donc $x = (0,0,0,2,3,5,4,0,2)$. On remarque que $\operatorname{maj}\sigma = \operatorname{tot} x = 16$.

Pour reconstruire la permutation σ à partir d'une suite sous-excédante $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on part de $\sigma_1 := 1$, puis on obtient $\sigma_2 := [\sigma_1, x_2]$ (dans les notations de (2.9)), ... , jusqu'à obtenir $\sigma := \sigma_n = [\sigma_{n-1}, x_n]$.

Proposition 2.2. — *Soit $\psi : \sigma \mapsto \sigma'$ la surjection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_{n-1}$ qui consiste à enlever la lettre n du mot $\sigma(1)\ldots\sigma(n)$. Pour $n \geq 2$ et pour toute permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$, le polynôme générateur de la classe $\psi^{-1}(\sigma')$ par l'indice majeur est donné par :*

$$\sum_{\sigma \in \psi^{-1}(\sigma')} q^{\operatorname{maj}\sigma} = q^{\operatorname{maj}\sigma'}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}). \tag{2.10}$$

En utilisant la notation (2.9)*, on a encore*

$$\operatorname{maj}[\sigma_{n-1}, x_n] = \operatorname{maj}\sigma_{n-1} + x_n \tag{2.11}$$

et si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le maj-codage de σ,

$$\operatorname{maj}\sigma = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \operatorname{tot} x. \tag{2.12}$$

Démonstration. — Les identités (2.10) et (2.12) découlent de (2.11), que nous démontrons. Lorsque n est inséré à la fin du mot $\sigma' = \sigma_{n-1}$, c'est-à-dire dans la position numérotée 0, on a bien $\operatorname{maj}[\sigma', 0] = \operatorname{maj}\sigma'$. Si n est inséré dans la $x_n{}^{\text{ième}}$ descente $(1 \leq x_n \leq d = \operatorname{des}\sigma')$ (numérotée de droite à gauche), les x_n descentes situées les plus à droite sont décalées d'un cran vers la droite ; les autres ne sont pas modifiées, d'où (2.11) est vérifiée. De même, (2.11) est vérifiée pour $x_n = d + 1$, puisque cette numérotation correspond à une insertion de n en début de mot. Maintenant, si $\sigma'(i) < \sigma'(i+1)$ est la $k^{\text{ième}}$ non-descente lorsqu'on lit σ' de la gauche vers la droite $(1 \leq k \leq n - d - 2)$, le facteur gauche $\sigma'(1)\sigma'(2)\ldots\sigma'(i)$ contient $i - k$ descentes et le facteur droit $\sigma'(i+1)\sigma'(i+2)\ldots\sigma'(n-1)$ exactement $d - i + k$ descentes. L'insertion de n entre $\sigma'(i)$ et $\sigma'(i+1)$, donc dans une position numérotée $d+k+1$, augmente l'indice majeur de $(i+1)+(d-i+k)=d+k+1$, puisqu'une nouvelle descente est créée entre $\sigma'(i)$ et $\sigma'(i+1)$ et que les $(d-i+k)$ descentes du facteur droit $\sigma'(i+1)\sigma'(i+2)\ldots\sigma'(n-1)$ sont décalées d'un cran vers la droite. $\square$

2.3. *Le den-codage.* — La statistique de Denert, $\operatorname{den}\sigma$, d'une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ peut se calculer à l'aide de son *den-codage* que l'on définit comme suit. Pour chaque entier j $(1\le j\le n)$, on définit x_j comme étant le nombre d'entiers i tels que

$$1\le i\le j-1 \quad\text{et}\quad \sigma(i)\in \rrbracket\sigma(j),j\rrbracket. \tag{2.13}$$

On pose alors $\operatorname{den}\sigma := x_1+x_2+\cdots+x_n$. Cette définition est tout à fait conforme à la définition globale donnée ci-dessus. Elle a l'avantage de fournir immédiatement la définition du den-codage comme étant la suite $x:=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Il est évident que x est sous-excédante et que l'application $\sigma\mapsto x$ est injective et donc bijective. Illustrons par un exemple la détermination du den-codage.

Dans l'exemple ci-dessous, la première ligne donne la liste des entiers j de 1 à 9, la seconde la valeur correspondante de $\sigma(j)$, la troisième la valeur de l'intervalle cyclique $\rrbracket\sigma(j),j\rrbracket$, la quatrième la valeur de x_j, comme étant la nombre d'entiers i satisfaisant $1\le i\le j-1$ et $\sigma(i)\in\rrbracket\sigma(j),j\rrbracket$.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma(j)$	7	1	5	4	9	2	6	3	8
$\rrbracket\sigma(j),j\rrbracket$	$\{1,8,9\}$	$\{2\}$	$\{6,7,8,9,1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{3,4,5,6\}$	$\{7\}$	$\{4,5,6,7,8\}$	$\{9\}$
x_j	0	0	2	0	3	2	1	4	1

Le den-codage de σ est donc $x=(0,0,2,0,3,2,1,4,1)$. En particulier, $\operatorname{den}\sigma=13$.

Pour retrouver σ à partir de x, on définit d'abord $\sigma(n)=n-x_n$. Supposons que $\sigma(j+1)$, …, $\sigma(n)$ ont été déterminés à partir de x_{j+1}, … , x_n. On écrit alors la suite

$$j,(j-1),\ldots,2,1,n,(n-1),\ldots,(j+1),$$

et on retire de cette liste tous les éléments qui sont égaux à $\sigma(l)$ pour un certain $l\ge j+1$. Alors $\sigma(j)$ est la $(x_j+1)^{\text{ième}}$ lettre dans la suite lorsque celle-ci est lue de gauche à droite.

Il résulte des propriétés des trois bijections de $\mathfrak{S}_n$ sur SE_n précédemment construites que les trois statistiques “inv,” “maj” et “den” sont mahoniennes. De plus, en composant ces différentes bijections avec leurs inverses, on peut construire des bijections de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même, qui envoient "inv" sur "maj", "inv" sur "den" et "maj" sur "den."

3. L'algèbre des coefficients q-binomiaux

Considérons le produit $c = a \cdot b$ de deux séries formelles en u écrites sous la forme

$$a = \sum_{i \ge 0} \frac{u^i}{i!}\, a(i) \quad \text{et} \quad b = \sum_{j \ge 0} \frac{u^j}{j!}\, b(j).$$

Si l'on veut exprimer la série produit c encore sous la forme

$$c = \sum_{n \ge 0} \frac{u^n}{n!}\, c(n),$$

on voit que, pour tout $n \ge 0$, on est conduit à l'identité

$$c(n) = \sum_{\substack{i \ge 0,\, j \ge 0 \\ i+j=n}} \binom{n}{i} a(i)\, b(j),$$

où $\binom{n}{i}$ est naturellement le coefficient binomial $\dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$.

Si l'on remplace maintenant les factorielles $i!$, $j!$, $n!$ apparaissant au dénominateur par leurs q-analogues $(q;q)_i$, $(q;q)_j$, $(q;q)_n$, tels qu'ils ont été définis en (0.1) et si les coefficients $a(i)$, $b(j)$, $c(n)$ sont remplacés par des séries formelles $a(i,q)$, $b(j,q)$, $c(n,q)$ en la variable q, on voit qu'on obtient l'identité

$$c(n,q) = \sum_{\substack{i \ge 0,\, j \ge 0 \\ i+j=n}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} a(i,q)\, b(j,q),$$

où

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_i\,(q;q)_{n-i}} \quad (0 \le i \le n). \tag{3.1}$$

On peut encore écrire :

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \frac{(q^{i+1};q)_{n-i}}{(q;q)_{n-i}} = \frac{(q^{n-i+1};q)_i}{(q;q)_i}. \tag{3.2}$$

L'expression $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ est appelée *coefficient q-binomial* ou *polynôme gaussien.* Il est tout à fait remarquable que ce coefficient soit un polynôme en q, à coefficients entiers positifs, une propriété que l'on établit de façon algébrique.

Dans la définition (3.1) convenons que le coefficient q-binomial $\left[{n \atop i}\right]$ est nul lorsque la condition $0 \le i \le n$ n' est *pas* satisfaite. Par définition, on a tout d'abord

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1; \tag{3.3}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

On trouve, ensuite, deux formules du triangle de Pascal, à savoir

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} + q^{n-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}; \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + q^{i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}; \tag{3.6}$$

qu'on établit, en calquant le calcul traditionnel sur les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} &= \frac{(q;q)_{n-1}}{(q;q)_i\,(q;q)_{n-i}}((1-q^n)-(1-q^{n-i})) \\ &= \frac{(q;q)_{n-1}\,q^{n-i}(1-q^i)}{(q;q)_i\,(q;q)_{n-i}} \\ &= \frac{q^{n-i}(q;q)_{n-1}}{(q;q)_{i-1}\,(q;q)_{n-i}} = q^{n-i}\begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-i \end{bmatrix} + q^{n-(n-i)} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-i-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + q^{i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, le passage à la limite $\lim\limits_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ est immédiat.

La relation (3.3) et l'une des relations (3.5), (3.6) montrent que le coefficient q-binomial $\left[{n \atop i}\right]$ est un *polynôme* en q, à coefficients positifs, de degré $i(n-i)$. Il est beaucoup plus difficile de montrer que ce polynôme est unimodal.

Les premières valeurs des coefficients q-binomiaux $\left[{n \atop i}\right]$ sont les suivantes : $\left[{1 \atop 0}\right] = \left[{1 \atop 1}\right] = 1$. $\left[{2 \atop 0}\right] = \left[{2 \atop 2}\right] = 1$; $\left[{2 \atop 1}\right] = 1+q$; $\left[{3 \atop 0}\right] = \left[{3 \atop 3}\right] = 1$; $\left[{3 \atop 1}\right] = \left[{3 \atop 2}\right] = 1+q+q^2$; $\left[{4 \atop 0}\right] = \left[{4 \atop 4}\right] = 1$; $\left[{4 \atop 1}\right] = \left[{4 \atop 3}\right] = 1+q+q^2+q^3$; $\left[{4 \atop 2}\right] = 1+q+2q^2+q^3+q^4$; $\left[{5 \atop 0}\right] = \left[{5 \atop 5}\right] = 1$; $\left[{5 \atop 1}\right] = \left[{5 \atop 4}\right] = 1+q+q^2+q^3+q^4$; $\left[{5 \atop 2}\right] = \left[{5 \atop 3}\right] = 1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$.

Dans les formules (1.16) et (1.17), nous avons obtenu deux formules pour chacune des deux q-exponentielles $e_q(u)$ et $E_q(u)$, d'abord comme des produits infinis, puis comme des q-séries complètement explicitées, à savoir :

$$e_q(u) = \frac{1}{(u;q)_\infty} = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{(q;q)_n}; \tag{3.7}$$

$$E_q(u) = (-u;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2} \frac{u^n}{(q;q)_n}. \tag{3.8}$$

Les coefficients q-binomiaux permettent d'obtenir des expressions pour les produits *finis* $1/(u;q)_N$ et $(-u;q)_N$ (N entier positif). Démontrons que l'on a les identités :

$$\frac{1}{(u;q)_N} = \sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} N+n-1 \\ n \end{bmatrix} u^n; \tag{3.9}$$

$$(-u;q)_N = \sum_{0\leq n\leq N} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} q^{n(n-1)/2}\, u^n. \tag{3.10}$$

Pour établir (3.9) reportons-nous à (1.12). On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(u;q)_N} &= \frac{(q^N u;q)_\infty}{(u;q)_\infty} = \sum_{n\geq 0} (q^N;q)_n \frac{u^n}{(q;q)_n} \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(q;q)_{N+n-1}}{(q;q)_{N-1}\,(q;q)_n} u^n = \sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} N+n-1 \\ n \end{bmatrix} u^n. \end{aligned}$$

Pour établir (3.10) reportons-nous au théorème q-binomial. Il vient

$$\begin{aligned} (-u;q)_N &= \frac{(-u;q)_\infty}{(-uq^N;q)_\infty} = \frac{(q^{-N}\,(-uq^N);q)_\infty}{(-uq^N;q)_\infty} \\ &= \sum_{n\geq 0} (q^{-N};q)_n\, \frac{(-uq^N)^n}{(q;q)_n} = \sum_{0\leq n\leq N} (q^{-N};q)_n\, \frac{(-uq^N)^n}{(q;q)_n}. \end{aligned}$$

La sommation est, en effet, finie puisque $(q^{-N};q)_n$ est nul dès que $n \geq N+1$. En utilisant la formule (1.10) pour $\alpha = q^{-N}$, à savoir

$$(q^{N+1-n};q)_n = (q^{-N};q)_n\,(-q^N)^n\, q^{-n(n-1)/2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}(-u;q)_N &= \sum_{0\le n\le N} (q^{N+1-n};q)_n\, q^{n(n-1)/2} \frac{u^n}{(q;q)_n}\\ &= \sum_{0\le n\le N} \begin{bmatrix} N\\ n\end{bmatrix} q^{n(n-1)/2}\, u^n,\end{aligned}$$

d'après (3.2) avec les substitutions $n \leftarrow N$ et $i \leftarrow n$. $\square$

Une autre façon d'établir (3.9) et (3.10) est de procéder par récurrence sur N et d'utiliser les formules du triangle de Pascal (3.5) et (3.6).

4. Structures q-binomiales

Pour permettre d'entrer dans l'algèbre des q-coefficients binomiaux, il importe de décrire les structures combinatoires les plus courantes, les admettant comme polynômes générateurs. Comme $\lim\limits_{q\to 1} \left[{N+n \atop n}\right] = \binom{N+n}{n}$, il s'agit de trouver, pour tout couple d'entiers (N,n), un ensemble A de cardinal $\binom{N+n}{n}$ et une statistique f sur cet ensemble satisfaisant

$$\sum_{a\in A} q^{f(a)} = \begin{bmatrix} N+n\\ n\end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Nous donnons quatre de ces structures : les *classes de partitions d'entiers*, les *suites croissantes d'entiers*, les *mots binaires*, les *partitions ordonnées en deux blocs*. Chacune de ces structures a une géométrie propre qui permet de donner une définition naturelle à la statistique sous-jacente.

4.1. *Partitions d'entiers.* — D'après (3.9), on a :

$$\frac{1}{(1-u)(1-uq)\cdots(1-uq^N)} = \sum_{n\ge 0} \begin{bmatrix} N+n\\ n\end{bmatrix} u^n. \tag{4.2}$$

Or le membre de gauche de cette équation s'exprime comme une série formelle en les deux variables q et u

$$\sum_{n\ge 0} u^n \sum_{m\ge 0} p(m,n,N)\, q^m,$$

où $p(m,n,N)$ est égal au nombre de suites $(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_N)$ d'entiers positifs tels que

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_N = n \quad \text{et} \quad 1.m_1 + 2.m_2 + \cdots + N.m_N = m, \tag{4.3}$$

ou encore au nombre de partitions de m dont la notation multiplicative est $1^{m_1} 2^{m_2} \ldots N^{m_N}$ et le nombre de parts est au plus égal à n (à cause de la présence du coefficient m_0). Par conséquent,

$p(m,n,N)$ est égal au nombre de partitions de m en au plus n parts, toutes au plus égales à N.

Notons que $p(m,n,N)=0$ dès que $m\geq nN+1$. Soit $\mathcal{P}(n,N)$ l'ensemble des partitions en au plus n parts, toutes au plus égales à N (leur diagramme de Ferrers est donc contenu dans un rectangle de base N et de hauteur n). Désignons par $\|\pi\|$ le *poids* d'une partition $\pi\in\mathcal{P}(n,N)$, c'est-à-dire $\|\pi\|=m$ si π est une partition de m. On a donc

$$\begin{bmatrix}N+n\\ n\end{bmatrix}=\sum_{0\leq m\leq nN}p(m,n,N)\,q^m=\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n,N)}q^{\|\pi\|}. \tag{4.4}$$

Pour établir (4.4), on peut aussi procéder par récurrence sur $N+n$, cette formule étant naturellement banale pour $N+n=1$. On utilise, par exemple, (3.6), qui se récrit

$$\begin{bmatrix}N+n\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N+(n-1)\\ n-1\end{bmatrix}+q^n\begin{bmatrix}(N-1)+n\\ n\end{bmatrix}.$$

Dans le membre de droite, le facteur $\left[{N+(n-1)\atop n-1}\right]$ est le polynôme générateur des partitions en au plus $(n-1)$ parts, toutes au plus égales à N. Appelons-les *de première espèce*. Le facteur $\left[{(N-1)+n\atop n}\right]$ est le polynôme générateur des partitions π dont le diagramme de Ferrers est contenu dans le rectangle $(N-1)\times n$. Ajoutons à la gauche du diagramme de Ferrers de chaque π une colonne de hauteur n. On obtient le diagramme de Ferrers d'une partition π' ayant exactement n parts, toutes au plus égales à N. Disons que ces partitions π' sont *de seconde espèce*. Leur polynôme générateur est égal à $q^n\left[{(N-1)+n\atop n}\right]$ par récurrence. Or, toute partition en au plus n parts, toutes au plus égales à N, est soit de première espèce, soit de seconde espèce (voir Fig. 1). $\square$

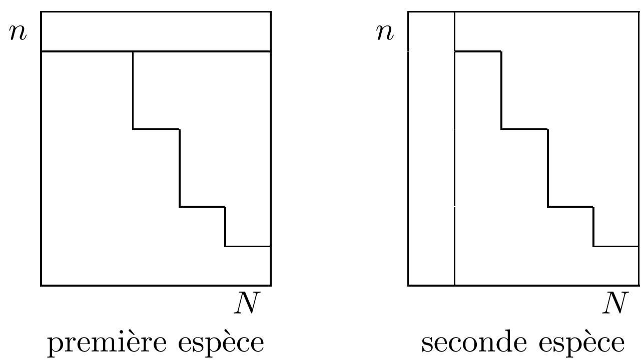


Fig. 1

4.2. *Suites croissantes d'entiers.* — Ce modèle s'avèrera très commode, car beaucoup d'objets combinatoires peuvent se coder facilement par des suites d'entiers. Pour tout couple d'entiers (N, n), notons $SC(N, n)$ (resp. $SSC(N, n)$) l'ensemble des suites croissantes (resp. strictement croissantes) d'entiers postifs $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ satisfaisant $0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_N \le n$ (resp. $0 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_N \le n$). Posons, comme précédemment, $\operatorname{tot} b = b_1 + b_2 + \cdots + b_N$.

PROPOSITION 4.1. — *Pour tout couple d'entiers (N, n), on a :*

$$\begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{b \in SC(N,n)} q^{\operatorname{tot} b} = \sum_{b \in SC(n,N)} q^{\operatorname{tot} b}; \tag{4.5}$$

$$q^{N(N-1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ N \end{bmatrix} = \sum_{B \in SSC(N,n)} q^{\operatorname{tot} B}. \tag{4.6}$$

Démonstration. — On note la symétrie de la formule (4.5) en N et n, symétrie qui disparaît pour (4.6). Pour établir (4.5) on construit une bijection $\pi \mapsto b$ de $\mathcal{P}(n, N)$ sur $SC(n, N)$ telle que $\|\pi\| = \operatorname{tot} b$. Soit $\pi = (\pi_1 \ge \pi_2 \ge \cdots \ge \pi_n \ge 0)$ une partition en au plus n parts, toutes au plus égales à N. La bijection est simplement donnée par

$$\pi \mapsto (\pi_n, \dots, \pi_2, \pi_1) = b.$$

Supposons $n \ge N - 1$. Pour démontrer (4.6), on utilise la bijection traditionnelle $B \mapsto b$ qui fait passer d'une suite strictement croissante $B \in SSC(N, n)$ en une suite croissante $b \in SC(N, n - N + 1)$, à savoir

$$(0 \le B_1 < B_2 < \cdots < B_N \le n) \mapsto (0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_N \le n - N + 1),$$

où $b_1 := B_1$, $b_2 := B_2 - 1$, $b_3 := B_3 - 2$, $\dots$, $b_N := B_N - N + 1$. On en déduit $\operatorname{tot} B = \frac{N(N-1)}{2} \operatorname{tot} b$ et

$$\begin{aligned} \sum_{B \in SSC(N,n)} q^{\operatorname{tot} B} &= q^{N(N-1)/2} \sum_{b \in SC(N, n-N+1)} q^{\operatorname{tot} b} \\ &= q^{N(N-1)/2} \begin{bmatrix} N + (n - N + 1) \\ N \end{bmatrix} = q^{N(N-1)/2} \begin{bmatrix} n+1 \\ N \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

4.3. *Mots binaires.* — Notons $MB(N, n)$ l'ensemble des mots de longueur $(N + n)$ contenant exactement N fois 1 et n fois 0. Si $x = x_1 x_2 \dots x_{N+n}$ est un tel mot, on peut définir le *nombre d'inversions*, $\operatorname{inv} x$, du mot x comme étant le nombre de lettres 1 qui sont à la gauche de lettres 0.

Exemple. — Dans le mot ci-dessous, on écrit, sous chaque lettre égale à 0, le nombre de 1 situés sur sa gauche. On obtient :

$$\begin{array}{rl} x = & 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ & 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 0\ 3\ 3\ 0 \end{array}$$

D'où $\operatorname{inv} x = 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 10$.

Proposition 4.2. — *Pour tout couple d'entiers* (N, n), *on a :*

$$\begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{x \in MB(N,n)} q^{\operatorname{inv} x}. \tag{4.17}$$

Démonstration. — De nouveau, on construit une bijection $\pi \mapsto x$ de $\mathcal{P}(N, n)$ sur $MB(N, n)$ satisfaisant $\|\pi\| = \operatorname{inv} x$. Toute partition $\pi \in \mathcal{P}(N, n)$ peut être, dans sa version multiplicative, décrite comme un monôme $i_1^{n_1} i_2^{n_2} \ldots i_r^{n_r}$, où $0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le N$, $n_1 \ge 1$, $n_2 \ge 1, \ldots, n_r \ge 1$ et $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Si le nombre de parts $l(\pi)$ de π est strictement inférieur à n, on pose $n_1 = n - l(\pi)$ et $i_1 = 0$. La partition π n'a donc que des parts égales à $i_2, \ldots, i_r$, répétées $n_2, \ldots, n_r$, respectivement. Si $l(\pi) = n$, alors $1 \le i_1$ et π a des parts égales à $i_1, \ldots, i_r$, répétées $n_1, \ldots, n_r$ fois, respectivement.

A la partition π, on fait alors correspondre le mot x défini par

$$x := 1^{i_1} 0^{n_1} 1^{i_2 - i_1} 0^{n_2} 1^{i_3 - i_2} 0^{n_3} \ldots 0^{n_{r-1}} 1^{i_r - i_{r-1}} 0^{n_r} 1^{N - i_r}.$$

Le mot x a bien $i_1 + (i_2 - i_1) + (i_3 - i_2) + \cdots + (i_r - i_{r-1}) + (N - i_r) = N$ lettres égales à 1 et $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{r-1} + n_r = n$ lettres égales à 0. De plus $\|\pi\| = i_1.n_1 + i_2.n_2 + \cdots + i_r.n_r = i_1.n_1 + (i_1 + (i_2 - i_1)).n_2 + \cdots + (i_1 + (i_2 - i_1) + \cdots + (i_r - i_{r-1})).n_r = \operatorname{inv} x$. Enfin, l'application $\pi \mapsto x$ est évidemment injective, donc bijective. $\square$

Remarque. — Une manière géométrique de voir la bijection $\pi \mapsto x$ décrite dans la précédente démonstration est de dessiner le diagramme de Ferrers de la partition π, à l'intérieur d'un triangle de base N et de hauteur n. Le bord ("rim") du diagramme de Ferrers est une ligne polygonale, composée de pas verticaux et horizontaux de longueur 1, partant du point en haut à gauche, de coordonnées $(0, n)$, pour arriver au point en bas à droite, de coordonnées $(N, 0)$. Ce bord a donc exactement n pas verticaux et N pas horizontaux. On lit alors le bord de π de haut en bas et de gauche à droite en attribuant une étiquette 0 à chaque pas vertical et une étiquette 1 à chaque pas horizontal. Le mot x ainsi lu est précisément le mot binaire décrit dans la précédente bijection.

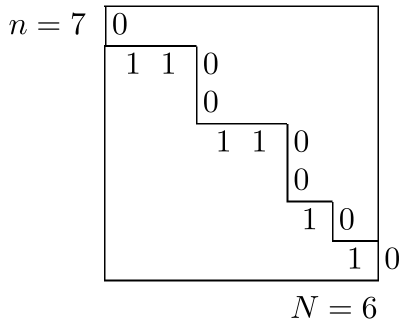


Fig. 2

Exemple. — Considérons la partition $\pi = (6, 5, 4, 4, 2, 2)$ appartenant à $\mathcal{P}(6, 7)$. Dans sa version multiplicative, elle peut être décrite comme le monôme $0^1 2^2 4^2 5^1 6^1$. Le mot x qui correspond à ce monôme est le mot $x = 1^0 0^1 1^{2-0} 0^2 1^{4-2} 0^2 1^{5-4} 0^1 1^{6-5} 0^1 1^{6-6} = 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0$, qui est précisément le mot qu'on lit le long du bord de son diagramme de Ferrers, de haut en bas et de droite à gauche avec l'étiquetage indiqué dans la remarque.

4.4. *Partitions ordonnées en deux blocs.* — Considérons l'ensemble $[N + n]$ des $(N + n)$ entiers $1, 2, \ldots, N + n$. Si (A, B) est une partition ordonnée de $[N + n]$ en deux blocs, on note $\gamma(A)$ et $\gamma(B)$ les mots *croissants* formés par les éléments de A et de B, respectivement. Il n'y a aucune inversion de lettres dans chacun des mots $\gamma(A)$, $\gamma(B)$; le nombre d'inversions $\operatorname{inv} \gamma(A)\gamma(B)$ du produit de juxtaposition $\gamma(A)\gamma(B)$ est alors égal au nombre de couples (a, b) tels que $a \in A$, $b \in B$ et $a > b$.

Proposition 4.3. — *Pour tout couple d'entiers (N, n), on a :*

$$\begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{(A,B)} q^{\operatorname{inv} \gamma(A)\gamma(B)},$$

où la somme est sur toutes les partitions ordonnées (A, B) de $[N + n]$ en deux blocs tels que $|A| = N$ et $|B| = n$.

Démonstration. — D'après la Proposition 4.2, le coefficient q-binomial $\begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix}$ est la fonction génératrice des mots binaires $x = x_1 x_2 \ldots x_{N+n}$ contenant N lettres égales à 1 et n lettres égales à 0, par nombre d'inversions. A un tel mot binaire x, faisons correspondre une partition ordonnée (A, B) de $[N + n]$, en posant : $i \in A$ ou $i \in B$ suivant que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$. Ainsi, l'inversion $x_j = 1$, $x_{j'} = 0$, $j < j'$, dans le mot x, correspond à l'inversion $j' > j$ entre l'élément $j' \in A$ et l'élément $j \in B$. $\square$

5. Les coefficients q-multinomiaux

Ils forment une q-extension naturelle des coefficients multinomiaux et sont introduits comme suit. Pour tout entier $r \geq 1$ et toute suite d'entiers positifs $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$, posons

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 + \cdots + m_r \\ m_1, m_2, \ldots, m_r \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_{m_1+m_2+\cdots+m_r}}{(q;q)_{m_1}(q;q)_{m_2}\ldots(q;q)_{m_r}}. \tag{5.1}$$

Pour simplifier l'écriture, on supprime l'indice q s'il n'y a pas d'ambiguité. Dans le cas $r = 2$, on retrouve l'expression du polynôme gaussien étudié dans le paragraphe précédent. Que le coefficient q-multinomial soit un polynôme en q à coefficients entiers résulte des interprétations combinatoires données par la suite.

Lorsque q tend vers 1, le coefficient q-multinomial défini en (5.1) tend vers le coefficient multinomial $\binom{m_1+m_2+\cdots+m_r}{m_1,m_2,\ldots,m_r}$, comme on peut le vérifier immédiatement. Il faut donc s'attendre à ce que le coefficient q-multinomial soit un polynôme générateur d'un ensemble de cardinal $\binom{m_1+m_2+\cdots+m_r}{m_1,m_2,\ldots,m_r}$ par une certaine statistique.

Les deux interprétations combinatoires du coefficient q-binomial en termes de classes de partitions et de suites croissantes se prolongent mal au cas multinomial. En revanche, lorsqu'on passe des mots *binaires*, étudiés dans le paragraphe précédent, aux mots dont les lettres appartiennent à un alphabet de cardinal r ($r \geq 2$) et qu'on prolonge la définition de la statistique "inv" à ces classes de mots, le coefficient q-multinomial a une interprétation aisée.

Pour $r \geq 1$ et pour toute suite $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ d'entiers positifs, notons $R(\mathbf{m})$ la classe de tous les mots de longueur $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ qui sont des *réarrangements* du mot croissant $1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}$. Le nombre de tels réarrangements est bien égal au coefficient multinomial $\binom{m_1+m_2+\cdots+m_r}{m_1,m_2,\ldots,m_r}$.

Soit $w = x_1x_2\ldots x_m$ un mot appartenant à la classe $R(\mathbf{m})$. Le *nombre d'inversions* de w est défini comme le nombre de couples (i,j) tels que $1 \leq i < j \leq m$ et $x_i > x_j$. Comme pour les mots binaires, on le note $\operatorname{inv} w$.

Il est commode pour tout mot $w = x_1x_2\ldots x_m$ de déterminer, pour chaque $j = 1, \ldots, m$, le nombre z_j de lettres x_i situées *à la gauche de* x_j telles que $x_i > x_j$. On a alors $\operatorname{inv} w = z_1 + \cdots + z_m$.

Dans l'exemple suivant, le nombre d'inversions de w est déterminé à partir des nombres z_j

$$\begin{aligned} w = {} & 3\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 5\ 4\ 3 \\ z = {} & 0\ 1\ 0\ 0\ 3\ 3\ 0\ 1\ 3 \end{aligned}$$

et l'on a bien : $\operatorname{inv} w = \operatorname{tot} z = 1 + 3 + 3 + 1 + 3 = 11$.

Théorème 5.1. — *Le coefficient q-multinomial* $\begin{bmatrix} m_1+m_2+\cdots+m_r \\ m_1,m_2,\ldots,m_r \end{bmatrix}$ *est le polynôme générateur de l'ensemble* $R(\mathbf{m})$ *par le nombre d'inversions.*

En d'autres termes, on a :

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2+\cdots+m_r \\ m_1,m_2,\ldots,m_r \end{bmatrix} = \sum_{w\in R(\mathbf{m})} q^{\operatorname{inv} w}. \tag{5.2}$$

Démonstration. — La relation (5.2) est banale pour $r=1$ et elle est aussi vraie pour $r=2$ d'après la Proposition 4.2. Considérons la factorisation

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m_1+m_2+\cdots+m_{r+1} \\ m_1,m_2,\ldots,m_{r+1} \end{bmatrix} &= \frac{(q;q)_{m_1+m_2+\cdots+m_{r+1}}}{(q;q)_{m_1}(q;q)_{m_2}\ldots(q;q)_{m_{r+1}}} \\
&= \frac{(q;q)_{m_1+m_2+\cdots+m_{r+1}}}{(q;q)_{m_1+m_2+\cdots+m_r}(q;q)_{m_{r+1}}}\,\frac{(q;q)_{m_1+m_2+\cdots+m_r}}{(q;q)_{m_1}(q;q)_{m_2}\ldots(q;q)_{m_r}} \\
&= \begin{bmatrix} m_1+m_2+\cdots+m_{r+1} \\ m_1+m_2+\cdots+m_r, m_{r+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1+m_2+\cdots+m_r \\ m_1,m_2,\ldots,m_r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

et prenons un mot $w=x_1x_2\ldots x_{m'}$ de l'ensemble $R(m_1,m_2,\ldots,m_{r+1})$, de sorte que sa longueur est $m'=m_1+m_2+\cdots+m_{r+1}$. Les inversions $x_i>x_j$ $(i<j)$ de w se répartissent en deux catégories : (i) celles de la forme $x_i=r+1>s=x_j$, où s est l'un des entiers 1, 2, … , r ; (ii) celles de la forme $x_i=s>t=x_j$, où l'on a $r\ge s>t\ge 1$.

Notons w_1 le mot de longueur m' obtenu de w en remplaçant toutes les lettres inférieures ou égales à r par 1 et toutes les lettres égales à $(r+1)$ par 2. De même, notons w_2 le *sous-mot* de longueur $m=m_1+m_2+\cdots+m_r$ déduit de w en supprimant *toutes* les lettres égales à $(r+1)$.

L'application $w\mapsto(w_1,w_2)$ est, de façon évidente, une bijection de $R(m_1,m_2,\ldots,m_{r+1})$ sur $R(m_1+m_2+\cdots+m_r,m_{r+1})\times R(m_1,m_2,\ldots,m_r)$. De plus,

$$\operatorname{inv} w = \operatorname{inv} w_1 + \operatorname{inv} w_2. \tag{5.3}$$

Or, par récurrence sur r, on a :

$$\sum_{w_1} q^{\operatorname{inv} w_1} = \begin{bmatrix} m_1+m_2+\cdots+m_{r+1} \\ m_1+m_2+\cdots+m_r, m_{r+1} \end{bmatrix};$$

$$\sum_{w_2} q^{\operatorname{inv} w_2} = \begin{bmatrix} m_1+m_2+\cdots+m_r \\ m_1,m_2,\ldots,m_r \end{bmatrix}.$$

L'identité (5.2) est alors une conséquence de ces deux identités et de (5.3). □

6. Le Verfahren de MacMahon

Le mot allemand "Verfahren" signifie procédé, manière de faire, ... Ce terme s'applique à cette méthode de réarrangement de suites de nombres, imaginée par MacMahon pour le traitement de certaines q-séries.

Il est immédiat que $1/(q;q)_m$ est la fonction génératrice des partitions d'entiers en au plus m parts. Si on écrit une telle partition sous la forme classique $\pi = (\pi_1 \ge \pi_2 \ge \cdots \ge \pi_m \ge 0)$, alors la suite $b = (b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m) := (\pi_m, \ldots, \pi_2, \pi_1)$ forme une suite croissante de m entiers positifs. En abrégé, on écrit : $b \in SC(m)$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{(q;q)_m} = \sum_{b \in SC(m)} q^{\operatorname{tot} b}, \tag{6.1}$$

où $\operatorname{tot} b = b_1 + \cdots + b_m$.

On dit qu'une statistique "stat" est *mahonienne*, si sur chaque classe $R(\mathbf{m})$, elle satisfait l'identité

$$\frac{1}{(q;q)_{m_1+\cdots+m_r}} \sum_{w \in R(\mathbf{m})} q^{\operatorname{stat} w} = \frac{1}{(q;q)_{m_1} \cdots (q;q)_{m_r}}. \tag{6.2}$$

Le Théorème 5.1 ne dit rien d'autre que le nombre d'inversions "inv" est une statistique mahonienne. Or, en utilisant (6.1), on peut récrire (6.2) sous la forme

$$\sum_{b \in SC(m),\, w \in R(\mathbf{m})} q^{\operatorname{tot} b + \operatorname{stat} w} = \sum_{b^{(1)}, \ldots, b^{(r)}} q^{\operatorname{tot} b^{(1)} + \cdots + \operatorname{tot} b^{(r)}}, \tag{6.3}$$

où $b^{(1)} \in SC(m_1)$, ... , $b^{(r)} \in SC(m_r)$. On peut donc dire qu'une statistique "stat" est *mahonienne* si à tout couple $(b, w) \in SC(m) \times R(\mathbf{m})$ correspond une suite unique $(b^{(1)}, \ldots, b^{(r)}) \in SC(m_1) \times \cdots \times SC(m_r)$ telle que l'on ait

$$\operatorname{tot} b + \operatorname{stat} w = \operatorname{tot} b^{(1)} + \cdots + \operatorname{tot} b^{(r)}. \tag{6.4}$$

Le but de ce paragraphe est d'utiliser cette définition, disons constructive, pour faire apparaître l'indice majeur, comme une statistique mahonienne, non seulement sur les permutations, mais sur les réarrangements de mots quelconques.

A toute suite $(b^{(1)}, \ldots, b^{(r)})$ correspond, de façon unique, une matrice à deux lignes

$$\begin{pmatrix} b^{(1)}_{m_1} & \ldots & b^{(1)}_1 & b^{(2)}_{m_2} & \ldots & b^{(2)}_1 & \ldots & b^{(r)}_{m_r} & \ldots & b^{(r)}_1 \\ 1 & \ldots & 1 & 2 & \ldots & 2 & \ldots & r & \ldots & r \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

où, dans la première ligne, on a écrit successivement les composantes des suites $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, ... , $b^{(r)}$ chaque fois en ordre *décroissant* (en partant du plus grand terme).

L'idée du Verfahren de MacMahon est de réarranger les *colonnes* de cette matrice de façon à obtenir une première ligne *décroissante* et ceci de façon biunivoque. Pour la seconde ligne de la matrice, on passe alors du mot $1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}$ à un réarrangement bien défini de celui-ci. Pour réaliser ce réarrangement des colonnes, on utilise la *règle de commutation* suivante :

$$\text{(6.6)} \quad \textit{deux colonnes } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \textit{ commutent si et seulement si } c \neq c'.$$

Moyennant cette règle de commutation, à toute matrice du type (6.5) correspond, *de façon bijective*, une matrice

$$\text{(6.7)} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix},$$

dont la première ligne est *décroissante* et si l'on a $y_k = y_{k+1}$, alors $x_k \leq x_{k+1}$, ou, de façon équivalente,

$$\text{(6.8)} \qquad x_k > x_{k+1} \Longrightarrow y_k > y_{k+1}.$$

Autrement dit, s'il y a *descente* dans la seconde ligne, il y a aussi descente dans la première ligne, l'inverse n'étant pas nécessairement vrai.

Par exemple, prenons $r = 3$, $m_1 = 6$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$, $b^{(1)} = (0,0,1,1,5,6)$, $b^{(2)} = (1,3)$, $b^{(3)} = (1,1,4,5)$, de sorte que $m = m_1 + m_2 + m_3 = 12$. La matrice de type (6.5) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 6\;5\;1\;1\;0\;0\;3\;1\;5\;4\;1\;1 \\ 1\;1\;1\;1\;1\;1\;2\;2\;3\;3\;3\;3 \end{pmatrix},$$

qui, après réarrangement des colonnes, utilisant la règle (6.6), donne la matrice de type (6.7) ayant la propriété (6.8) :

$$\begin{pmatrix} 6\;5\;5\;4\;3\;1\;1\;1\;1\;1\;0\;0 \\ 1\;1\;3\;\mathbf{3}\;\mathbf{2}\;1\;1\;2\;3\;\mathbf{3}\;1\;1 \end{pmatrix}.$$

Les termes de la seconde ligne qui sont supérieurs à leurs successeurs sont en gras. On voit que les termes correspondants de la première ligne sont aussi supérieurs à leurs successeurs (propriété (6.8)).

Revenons au cas général et appelons $v := y_1y_2\ldots y_m$ le mot constitué par les coefficients de la première ligne de la matrice (6.7). Par construction même, il est l'*unique* réarrangement *décroissant* du produit de juxtaposition $b^{(1)}\ldots b^{(r)}$. De même soit $w := x_1x_2\ldots x_m$ le mot formé par les coefficients de la seconde ligne de la matrice (6.7). C'est donc un mot bien défini appartenant à $R(\mathbf{m})$.

Pour $k = 1, 2, \ldots, m$, notons z_k le nombre de descentes dans le facteur droit $x_k x_{k+1} \ldots x_m$ de w, c'est-à-dire le nombre d'indices j tels que $k \le j \le m-1$ et $x_j > x_{j+1}$, puis posons $b_k := y_k - z_k$ $(1 \le k \le m)$. Si $x_k > x_{k+1}$, alors $z_k = z_{k+1} + 1$ par définition de z_k, mais encore $y_k \ge y_{k+1} + 1$ d'après (6.8). Il en résulte $b_k = y_k - z_k \ge y_{k+1} + 1 - (z_{k+1} + 1) = b_{k+1}$. En revanche, si $x_k \le x_{k+1}$, on a toujours $y_k \ge y_{k+1}$, puisque v est décroissant, mais aussi $z_k = z_{k+1}$, d'où encore $b_k = y_k - z_k \ge y_{k+1} - z_{k+1} = b_{k+1}$.

On en conclut que la suite b définie par $b := (b_m, \ldots, b_2, b_1)$ satisfait les relations $0 \le b_m \le \cdots \le b_2 \le b_1$, soit $b \in SC(m)$. Enfin, on a, en désignant par $z(w)$ la suite $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tot} b^{(1)} + \cdots + \operatorname{tot} b^{(r)} &= y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ &= (b_1 + z_1) + (b_2 + z_2) + \cdots + (b_m + z_m) \\ &= \operatorname{tot} b + \operatorname{tot} z(w). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Comparant cette dernière identité avec (6.4), on voit donc que $\operatorname{tot} z(w)$ est une nouvelle *statistique mahonienne*, s'il est bien vérifié que l'application $(b^{(1)}, \ldots, b^{(r)}) \mapsto (b, w)$ est bijective. Or la construction qui vient d'être faite est parfaitement réversible : si l'on part d'un mot $w \in R(\mathbf{m})$ et d'une suite $b = (b_m, \ldots, b_2, b_1) \in SC(m)$, on détermine d'abord la suite $z(w) = (z_1, \ldots, z_m)$. On sait alors que le mot $v = y_1 \ldots y_{m-1} y_m$ défini par $y_i := b_i + z_i$ $(1 \le i \le m)$ est décroissant. On forme alors la matrice à deux lignes $\binom{v}{w}$ et en appliquant la règle de commutation (6.6), on définit les suites $b^{(1)}$, ... , $b^{(r)}$ par (6.5) et naturellement (6.9) est bien vérifié.

Reprenons l'exemple traité ci-dessus ; on avait obtenu

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\ 5\ 5\ 4\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 3\ \mathbf{3}\ \mathbf{2}\ 1\ 1\ 2\ 3\ \mathbf{3}\ 1\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} v\ &= 6\ 5\ 5\ 4\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ w\ &= 1\ 1\ 3\ 3\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 3\ 1\ 1 \\ z(w) &= 3\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ b\ &= 3\ 2\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{aligned}$$

On a bien :

$$\begin{aligned} \operatorname{tot} b^{(1)} + \cdots + \operatorname{tot} b^{(r)} &= (6+5+1+1) + (3+1) + (5+4+1+1) = 28 \\ &= \operatorname{tot} b + \operatorname{tot} z(w) = (3+2+2+1+1) + (12+2+5) = 28. \end{aligned}$$

Revenant au cas général, peut-on mieux caractériser cette nouvelle statistique mahonienne "$\operatorname{tot} z(w)$" qui vient d'être trouvée ? Oui, c'est en fait la statistique l'*indice majeur*, "maj", déjà introduite au paragraphe 2 pour les seules permutations et dont la définition est prolongée aux mots quelconques.

Définition. — Soit $w = x_1x_2 \ldots x_m$ un mot dont les lettres sont prises dans l'alphabet $\{1, 2, \ldots, r\}$. L'*indice majeur*, "$\operatorname{maj} w$", du mot w est défini par

$$\operatorname{maj} w := \sum_{1 \le i \le m-1} i\,\chi(x_i > x_{i+1}). \tag{6.10}$$

Autrement dit, pour calculer l'indice majeur d'un mot, on détermine ses descentes et leurs positions. L'indice majeur est alors la somme des positions de ces descentes.

PROPOSITION 6.2. — *Pour tout mot w, on a :* $\operatorname{maj} w = \operatorname{tot} z(w)$.

Démonstration. — Si $w = x_1x_2 \ldots x_m$ et $1 \le i \le m$, on a défini z_i comme étant le nombre de descentes dans le facteur droit $x_ix_{i+1} \ldots x_m$, puis défini $z(w)$ comme étant la suite des z_i. Si w est de longueur 1, on a évidemment $\operatorname{maj} w = \operatorname{tot} z(w) = 0$. Si w est de longueur supérieure ou égale à deux, posons $w' := x_1x_2 \ldots x_{m-1}$ et $z(w') = (z'_1, \ldots, z'_{m-1})$. Si $x_{m-1} \le x_m$, alors $\operatorname{maj} w = \operatorname{maj} w'x_m = \operatorname{maj} w' = \operatorname{tot} z(w') = \operatorname{tot} z(w'x_m) = \operatorname{tot} z(w)$. Si $x_{m-1} > x_m$, alors $\operatorname{maj} w = \operatorname{maj} w' + (m-1)$, puisqu'il y a une descente en position $(m-1)$. Par ailleurs, on a : $z(w) = ((z'_1+1), \ldots, (z'_{m-1}+1))$; d'où $\operatorname{tot} z(w) = \operatorname{tot} z(w') + (m-1)$. □

Résumons dans le théorème suivant les résultats démontrés concernant l'indice majeur.

THÉORÈME 6.3. — *L'indice majeur est une statistique q-multinomiale, ou encore pour toute classe de réarrangements $R(\mathbf{m})$, on a l'identité :*

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 + \cdots + m_r \\ m_1, m_2, \ldots, m_r \end{bmatrix} = \sum_{w \in R(\mathbf{m})} q^{\operatorname{maj} w}. \tag{6.11}$$

7. Un raffinement du Verfahren de MacMahon

Réexaminons la bijection *inverse* de la bijection

$$(b^{(1)}, \ldots, b^{(r)}) \mapsto (b, w) \tag{7.1}$$

de $SC(m_1) \times \cdots \times SC(m_r)$ sur $SC(m) \times R(\mathbf{m})$, qui avait permis de démontrer que la statistique "maj" satisfaisait l'identité (6.3) lorsqu'on remplaçait "stat" par "maj". Chaque terme z_i de la suite $z(w) =$

$(z_1, z_2, \dots, z_m)$ compte le nombre de descentes dans le facteur droit $x_i x_{i+1} \dots x_m$ du mot w. Par conséquent,

$$z_1 = \operatorname{des} w. \tag{7.2}$$

Comme $y_1 = b_m + z_1$ et que y_1 est le terme maximum de tous les termes des suites $b^{(1)}, \dots, b^{(r)}$, on a aussi :

$$b^{(1)}_{m_1} \le b_m + \operatorname{des} w, \ \dots\ , b^{(r)}_{m_r} \le b_m + \operatorname{des} w. \tag{7.3}$$

Prenons un entier positif s', puis une suite croissante b telle que $0 \le b_1 \le \dots \le b_m \le s'$, c'est-à-dire, dans les notations du précédent paragraphe, $b \in SC(m, s')$, enfin un mot $w \in R(\mathbf{m})$ et posons

$$s := s' + \operatorname{des} w. \tag{7.4}$$

Les inégalités (7.3) entraînent alors

$$b^{(1)} \in SC(m_1, s), \dots, b^{(r)} \in SC(m_r, s). \tag{7.5}$$

La bijection décrite tout au long du précédent paragraphe a donc aussi la propriété donnée dans la proposition suivante.

Proposition 7.1. — *A tout triplet (s', b, w) tel que $s' \ge 0$, $b \in SC(m, s')$ et $w \in R(\mathbf{m})$ correspond de façon bijective une suite $(s, b^{(1)}, \dots, b^{(r)})$, où $s = s' + \operatorname{des} w$ et où $b^{(1)} \in SC(m_1, s)$, ..., $b^{(r)} \in SC(m_r, s)$, ayant la propriété :*

$$\operatorname{tot} b^{(1)} + \dots + \operatorname{tot} b^{(r)} = \operatorname{tot} b + \operatorname{maj} w.$$

Notons maintenant $A_{\mathbf{m}}(t, q)$ le polynôme générateur de la classe $R(\mathbf{m})$ par la bistatistique $(\operatorname{des}, \operatorname{maj})$, c'est-à-dire

$$A_{\mathbf{m}}(t, q) = \sum_{w \in R(\mathbf{m})} t^{\operatorname{des} w} q^{\operatorname{maj} w}. \tag{7.6}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t;q)_{m+1}} A_{\mathbf{m}}(t,q) &= \sum_{s' \ge 0} t^{s'} \begin{bmatrix} m+s' \\ s' \end{bmatrix} A_{\mathbf{m}}(t,q) && \text{[d'après (3.9)]} \\
&= \sum_{s' \ge 0} t^{s'} \sum_{b \in SC(m,s')} q^{\operatorname{tot} b} A_{\mathbf{m}}(t,q) && \text{[d'après (4.5)]} \\
&= \sum_{\substack{s' \ge 0,\, b \in SC(m,s'), \\ w \in R(\mathbf{m})}} t^{s' + \operatorname{des} w} q^{\operatorname{tot} b + \operatorname{maj} w}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s\ge 0} t^s \sum_{\substack{s'\ge 0,\, b\in SC(m,s'),\\ w\in R(\mathbf{m}),\, s'+\operatorname{des} w=s}} q^{\operatorname{tot} b+\operatorname{maj} w}$$

$$= \sum_{s\ge 0} t^s \sum_{\substack{b^{(1)}\in SC(m_1,s),\dots,\\ b^{(r)}\in SC(m_r,s)}} q^{\operatorname{tot} b^{(1)}+\cdots+\operatorname{tot} b^{(r)}},$$

[d'après la Proposition 7.1]

soit

$$\frac{1}{(t;q)_{m+1}} A_{\mathbf{m}}(t,q) = \sum_{s\ge 0} t^s \begin{bmatrix} m_1+s \\ s \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} m_r+s \\ s \end{bmatrix} \qquad \text{[d'après (4.5)].} \tag{7.7}$$

La formule (7.7) peut aussi s'exprimer comme une identité entre séries formelles, non plus entre q-séries, mais dans une algèbre de séries normalisées par des dénominateurs de la forme $(t;q)_{m+1}$, en r variables $u_1, u_2, \dots, u_r$. Par commodité, posons $\mathbf{u}^{\mathbf{m}} := u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_r^{m_r}$, puis $(\mathbf{u};q)_{s+1} := (u_1;q)_{s+1} \cdots (u_r;q)_{s+1}$ et rappelons que $m = m_1 + \cdots + m_r$.

Multiplions (7.7) par $\mathbf{u}^{\mathbf{m}}$ et sommons les deux membres par rapport à toutes les suites $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ de r entiers positifs. Alors

$$\sum_{\mathbf{m}} A_{\mathbf{m}}(t,q) \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}}}{(t;q)_{1+m}} = \sum_{s\ge 0} t^s \sum_{\mathbf{m}} \mathbf{u}^{\mathbf{m}} \begin{bmatrix} m_1+s \\ s \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} m_r+s \\ s \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{s\ge 0} t^s \Bigl(\sum_{m_1} u_1^{m_1} \begin{bmatrix} m_1+s \\ s \end{bmatrix}\Bigr) \cdots \Bigl(\sum_{m_r} u_r^{m_r} \begin{bmatrix} m_r+s \\ s \end{bmatrix}\Bigr),$$

soit, en utilisant une nouvelle fois l'identité (3.9),

$$\sum_{\mathbf{m}} A_{\mathbf{m}}(t,q) \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}}}{(t;q)_{1+m}} = \sum_{s\ge 0} \frac{t^s}{(\mathbf{u};q)_{s+1}}. \tag{7.8}$$

Remarque. — L'identité (6.11) peut se récrire, en utilisant le théorème q-binomial (Théorème 1.1) comme

$$\sum_{\mathbf{m}} A_{\mathbf{m}}(t=1,q) \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}}}{(q;q)_m} = \frac{1}{(u_1;q)_\infty \dots (u_r;q)_\infty}. \tag{7.9}$$

L'identité (7.8) apparaît comme une "t-extension" de cette identité. Analytiquement, on peut donc passer de (7.7) à (7.8) en posant $t=1$, en établissant un lemme adéquat sur les séries formelles. Le Verfahren de MacMahon permet de s'en dispenser.

8. Les polynômes Euler-Mahoniens

Partant de la définition combinatoire des polynômes $A_{\mathbf{m}}(t,q)$, donnée en (7.6), nous avons fait apparaître ces polynômes, dans la formule (7.7), comme les *numérateurs* d'une fraction rationnelle dont le développement en série de puissances de t a une forme explicite. Cette formule (7.7) n'est elle-même que la lecture de la (t,q)-fonction génératrice de ces polynômes obtenue en (7.8).

La question naturelle qui se pose est de savoir si, de l'une de ces deux formules, on peut obtenir une relation de récurrence sur ces polynômes, permettant, par exemple, leur calcul explicite. Notre propos est de montrer qu'un calcul *aux q-différences partielles* fournit la récurrence cherchée.

Pour chaque multi-indice $\mathbf{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_{r-1},m_r)$, il est commode de poser $|\mathbf{m}|:=m_1+m_2+\cdots+m_{r-1}+m_r$ (une quantité qui a aussi été notée précédemment m) et $\mathbf{m}+1_r:=(m_1,m_2,\ldots,m_{r-1},m_r+1)$. Notons

$$A(t,q;\mathbf{u})=A(t,q;u_1,\ldots,u_r):=\sum_{\mathbf{m}}A_{\mathbf{m}}(t,q)\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}}}{(t;q)_{1+|\mathbf{m}|}} \tag{8.1}$$

la (t,q)-fonction génératrice des polynômes $A_{\mathbf{m}}(t,q)$ et formons la *q-différence finie* appliquée à la seule variable u_r :

$$D_{u_r}:=A(t,q;u_1,\ldots,u_r)-A(t,q;u_1,\ldots,u_{r-1},u_rq).$$

Utilisant le *membre de gauche de* (7.8), on obtient :

$$\begin{aligned}D_{u_r}&=\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ m_r\ge 1}}A_{\mathbf{m}}(t,q)\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}}}{(t;q)_{1+|\mathbf{m}|}}-\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ m_r\ge 1}}A_{\mathbf{m}}(t,q)\frac{u_1^{m_1}\ldots u_{r-1}^{m_{r-1}}(u_rq)^{m_r}}{(t;q)_{1+|\mathbf{m}|}}\\ &=\sum_{\mathbf{m}}A_{\mathbf{m}+1_r}(t,q)\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}+1_r}}{(t;q)_{2+|\mathbf{m}|}}\\ &\qquad\qquad -\sum_{\mathbf{m}}A_{\mathbf{m}+1_r}(t,q)\frac{u_1^{m_1}\ldots u_{r-1}^{m_{r-1}}(u_rq)^{m_r+1}}{(t;q)_{2+|\mathbf{m}|}},\end{aligned}$$

soit

$$D_{u_r}=\sum_{\mathbf{m}}(1-q^{m_r+1})A_{\mathbf{m}+1_r}(t,q)\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}+1_r}}{(t;q)_{2+|\mathbf{m}|}}. \tag{8.2}$$

Utilisons maintenant le *membre de droite* de (7.8) :

$$D_{u_r}=\sum_{s\ge 0}\frac{t^s}{(u_1;q)_{s+1}\ldots(u_r;q)_{s+1}}-\sum_{s\ge 0}\frac{t^s}{(u_1;q)_{s+1}\ldots(u_rq;q)_{s+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s\ge 0} \frac{t^s}{(\mathbf{u};q)_{s+1}} \Bigl[1 - \frac{1-u_r}{1-u_r q^{s+1}}\Bigr]\\
&= u_r \sum_{s\ge 0} \frac{t^s}{(\mathbf{u};q)_{s+1}} \Bigl[1 - q^{s+1}\frac{1-u_r}{1-u_r q^{s+1}}\Bigr]\\
&= u_r\bigl(A(t,q;u_1,\ldots,u_r) - qA(tq,q;u_1,\ldots,u_{r-1},u_r q)\bigr).
\end{aligned}
$$

D'où la relation :

$$
\begin{aligned}
(8.3)\quad A(t,q;u_1,\ldots,u_r) &- A(t,q;u_1,\ldots,u_{r-1},u_r q)\\
&= u_r\bigl(A(t,q;u_1,\ldots,u_r) - qA(tq,q;u_1,\ldots,u_{r-1},u_r q)\bigr).
\end{aligned}
$$

Récrivons chacun des termes du second membre de cette dernière relation à l'aide des polynômes $A_{\mathbf{m}}(t,q)$. Il vient

$$
\begin{aligned}
u_r\, A(t,q;\mathbf{u}) &= \sum_{\mathbf{m}} A_{\mathbf{m}}(t,q)\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}+1_r}}{(t;q)_{1+|\mathbf{m}|}}\\
(8.4)\qquad &= \sum_{\mathbf{m}} (1-tq^{1+|\mathbf{m}|})A_{\mathbf{m}}(t,q)\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}+1_r}}{(t;q)_{2+|\mathbf{m}|}}.
\end{aligned}
$$

De même,

$$
\begin{aligned}
u_r q\, A(tq,q;u_1,\ldots,u_r q) &= \sum_{\mathbf{m}} A_{\mathbf{m}}(tq,q)\frac{u_1^{m_1}\ldots u_{r-1}^{m_{r-1}}(u_r q)^{m_r+1}}{(tq;q)_{1+|\mathbf{m}|}}\\
(8.5)\qquad &= \sum_{\mathbf{m}} q^{m_r+1}(1-t)A_{\mathbf{m}}(tq,q)\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}+1_r}}{(t;q)_{2+|\mathbf{m}|}}.
\end{aligned}
$$

Tenant compte de (8.2)—(8.5), on en tire la relation de récurrence :

$$
\begin{aligned}
(8.6)\quad (1-q^{m_r+1})&A_{\mathbf{m}+1_r}(t,q)\\
&= (1-tq^{1+|\mathbf{m}|})A_{\mathbf{m}}(t,q) - q^{m_r+1}(1-t)A_{\mathbf{m}}(tq,q).
\end{aligned}
$$

Écrivons $A_{\mathbf{m}}(t,q) = \sum\limits_{s\ge 0} t^s A_{\mathbf{m},s}(q)$, de sorte que $A_{\mathbf{m},s}(q)$ est la fonction génératrice des mots $w \in R(\mathbf{m})$ tels que $\operatorname{des} w = s$ par l'indice majeur et calculons le coefficient de t^s dans (8.6). On trouve :

$$
\begin{aligned}
&(1-q^{m_r+1})A_{\mathbf{m}+1_r,s}(q)\\
&= A_{\mathbf{m},s}(q) - q^{1+|\mathbf{m}|}A_{\mathbf{m},s-1}(q) - q^{m_r+1+s}A_{\mathbf{m},s}(q) + q^{m_r+1+(s-1)}A_{\mathbf{m},s-1}(q),
\end{aligned}
$$

soit en divisant par $(1-q)$ et en utilisant la notation $[0]_q = 0$ et $[m]_q = 1+q+\cdots+q^{m-1}$ $(m\ge 1)$,

$$
\begin{aligned}
(8.7)\quad [m_r+1]_q\, &A_{\mathbf{m}+1_r,s}(q)\\
&= [m_r+1+s]_q\, A_{\mathbf{m},s}(q) + q^{s+m_r}[1+|\mathbf{m}|-s-m_r]_q\, A_{\mathbf{m},s-1}(q).
\end{aligned}
$$

Les relations ((8.6) et (8.7) permettent un calcul aisé des tables des premières valeurs des polynômes $A_{\mathbf{m}}(t,q)$.

Table des polynômes $A_{\mathbf{m}}(t,q)$:

$A_{(1)}=1$; $A_{(1,1)}=1+tq$; $A_{(2)}=1$; $A_{(1,1,1)}=1+t(2q+2q^2)+t^2q^3$);
$A_{(2,1)}=1+t(q+q^2)$; $A_{(3)}=1$;
$A_{(1,1,1,1)}=1+t(3q+5q^2+3q^3)+t^2(3q^3+5q^4+3q^3)+t^3q^6$;
$A_{(2,1,1)}=1+t(2q+3q^2+2q^3)+t^2(q^2+2q^4+q^5)$;
$A_{(2,2)}=1+t(q+2q^2+q^3)+t^2q^4$; $A_{(3,1)}=1+t(q+q^2+q^3)$; $A_{(4)}=1$.

Définition. — Une suite $(A_{\mathbf{m}}(t,q))$ de polynômes de deux variables t et q, indicée par un multi-indice $\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)$ $(r\ge 1)$ est dite *Euler-Mahonienne*, si l'une des quatre conditions suivantes *équivalentes* est satisfaite :

(1) Pour tout $\mathbf{m}$ on a (voir formule (7.7)) :

$$\frac{1}{(t;q)_{m+1}}\,A_{\mathbf{m}}(t,q)=\sum_{s\ge 0}t^s\begin{bmatrix}m_1+s\\ s\end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix}m_r+s\\ s\end{bmatrix}.$$

(2) Pour $r\ge 1$ fixé, la (t,q)-fonction génératrice des polynômes $A_{\mathbf{m}}(t,q)$, indicés par le multi-indice $\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)$, est donnée par (voir formule (7.8)) :

$$\sum_{\mathbf{m}}A_{\mathbf{m}}(t,q)\,\frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}}}{(t;q)_{1+|\mathbf{m}|}}=\sum_{s\ge 0}\frac{t^s}{(\mathbf{u};q)_{s+1}}.$$

(3) Elle satisfait les relations de récurrence (voir formule (8.6)) :

$$\begin{aligned}(1-q^{m_r+1})&A_{\mathbf{m}+1_r}(t,q)\\ &=(1-tq^{1+|\mathbf{m}|})A_{\mathbf{m}}(t,q)-q^{m_r+1}(1-t)A_{\mathbf{m}}(tq,q).\end{aligned}$$

(4) En posant $A_{\mathbf{m}}(t,q)=\sum_{s\ge 0}t^sA_{\mathbf{m},s}(q)$, ses coefficients $A_{\mathbf{m},s}(q)$ satisfont la récurrence (voir formule (8.7)) :

$$\begin{aligned}[m_r+1]_q\,&A_{\mathbf{m}+1_r,s}(q)\\ &=[m_r+1+s]_q\,A_{\mathbf{m},s}(q)+q^{s+m_r}[1+|\mathbf{m}|-s-m_r]_q\,A_{\mathbf{m},s-1}(q).\end{aligned}$$

Remarque. — Avec la condition initiale $A_0(t,q)=1$, la relation de récurrence (3) détermine, de façon unique, la suite Euler-Mahonienne.

Elle ne fournit pas pour autant l'expression analytique de la (t,q)-fonction génératrice donnée en (2). Nous nous proposons de décrire une méthode qui, partant de la récurrence (3), donne explicitement l'identité (2).

Une méthode de q-calcul. — Tout d'abord, la récurrence (3), c'est-à-dire la relation (8.6), n'est que la relecture de l'équation aux q-différences (8.3). En fait, cette équation peut être récrite pour chaque variable u_i $(i=1,\ldots,r)$:

$$\text{(8.8)}\quad A(t,q;\mathbf{u})-A(t,q;u_1,\ldots,u_iq\ldots,u_r)\\ = u_i\,A(t,q;\mathbf{u})-u_iq\,A(tq,q;u_1,\ldots,u_iq,\ldots,u_r).$$

Posons : $A(t,q;\mathbf{u})=\sum\limits_{s\ge 0} t^sG_s(\mathbf{u},q)$. On en tire :

$$\sum_{s\ge 0} t^s(1-u_i)G_s(\mathbf{u},q)=\sum_{s\ge 0} t^s(1-u_iq^{s+1})G_s(u_1,\ldots,u_iq,\ldots,u_r,q).$$

En prenant le coefficient de t^s dans chaque membre, on obtient :

$$\text{(8.9)}\qquad G_s(\mathbf{u},q)=\frac{1-u_iq^{s+1}}{1-u_i}G_s(u_1,\ldots,u_iq,\ldots,u_r,,q),$$

pour $i=1,\ldots,r$. Posons alors $F_s(\mathbf{u},q)=G_s(\mathbf{u},q)(\mathbf{u};q)_{s+1}$. De (8.9), on déduit pour $i=1,\ldots,r$, l'équation

$$\text{(8.10)}\qquad F_s(\mathbf{u},q)=F_s(u_1,\ldots,u_iq,\ldots,u_r,q).$$

Or on peut écrire $F_s(\mathbf{u},q)=\sum_{\mathbf{m}}\mathbf{u}^{\mathbf{m}}F_{s,\mathbf{m}}(q)$, où $F_{s,\mathbf{m}}(q)$ est une série de puissances positives de q. Fixons-nous le multi-indice $\mathbf{m}$ et soit m_i une composante non-nulle de $\mathbf{m}$. La relation (8.10) implique alors : $F_{s,\mathbf{m}}(q)=q^{m_i}F_{s,\mathbf{m}}(q)$. D'où $F_{s,\mathbf{m}}(q)=0$ et $F_s(\mathbf{u},q)=F_{s,0}(q)$, une quantité qui reste à évaluer. Or, par définition de $F_s(u,q)$, on a :

$$F_{s,0}(q)=F_s(\mathbf{u},q)\,\Big|_{\mathbf{u}=0}=G_s(\mathbf{u},q)(\mathbf{u};q)_{s+1}\,\Big|_{\mathbf{u}=0}=G_s(0,q)=1,$$

puisque $\sum\limits_{s\ge 0} t^sG_s(0,q)=A(t,q;0)=\dfrac{1}{(t;q)_1}=\sum\limits_{s\ge 0} t^s$. Ainsi $G_s(\mathbf{u},q)=\dfrac{1}{(\mathbf{u};q)_{s+1}}$. $\square$

9. Les deux formes des polynômes q-Eulériens

Étudions les polynômes Euler-mahoniens $A_{\mathbf{m}}(t,q)$, introduits au paragraphe précédent, lorsque le multi-indice $\mathbf{m}$ est de la forme $(1^r)=$

$(1,1,\ldots,1)$. On parle alors de *polynômes q-maj-Eulériens* ou simplement *q-Eulériens* et on adopte la notation

$$^{\mathrm{maj}}A_r(t,q) := A_{(1^r)}(t,q).$$

En reprenant terme à terme la définition des polynômes Euler-Mahoniens du paragraphe précédent, on constate que la condition (2) ne peut se particulariser, mais qu'en revanche, on peut prendre la fonction génératrice exponentielle des polynômes $\dfrac{1}{(t;q)_{r+1}}\,{}^{\mathrm{maj}}A_r(t,q)$ et obtenir une formule close intéressante. Nous incluons cette formule comme condition (2). Pour les conditions (3) et (4), on prend $\mathbf{m}=(1^{r-1})$, d'où $m_r=0$.

Définition. — Une suite $({}^{\mathrm{maj}}A_r(t,q))$ de polynômes de deux variables t et q, indicée par les entiers $r\geq 0$, est dite *q-maj-Eulérienne*, si l'une des quatre conditions suivantes *équivalentes* est satisfaite :

(1) Pour tout entier $r\geq 0$, on a :

$$\frac{1}{(t;q)_{r+1}}\,{}^{\mathrm{maj}}A_r(t,q)=\sum_{s\geq 0} t^s\,\bigl([s+1]_q\bigr)^r. \tag{9.1}$$

(2) La fonction génératrice exponentielle des polynômes ${}^{\mathrm{maj}}A_r(t,q)/(t;q)_{r+1}$ est donnée par :

$$\sum_{r\geq 0}\frac{u^r}{r!}\,\frac{{}^{\mathrm{maj}}A_r(t,q)}{(t;q)_{r+1}}=\sum_{s\geq 0} t^s\,\exp(u\,[s+1]_q). \tag{9.2}$$

(3) Elle satisfait la relation de récurrence

$$(1-q)\,{}^{\mathrm{maj}}A_r(t,q)=(1-tq^r)\,{}^{\mathrm{maj}}A_{r-1}(t,q)-q(1-t)\,{}^{\mathrm{maj}}A_{r-1}(tq,q). \tag{9.3}$$

(4) En posant ${}^{\mathrm{maj}}A_r(t,q)=\sum\limits_{s\geq 0} t^s\,{}^{\mathrm{maj}}A_{r,s}(q)$, ses coefficients ${}^{\mathrm{maj}}A_{r,s}(q)$ satisfont la récurrence :

$${}^{\mathrm{maj}}A_{r,s}(q)=[s+1]_q\,{}^{\mathrm{maj}}A_{r-1,s}(q)+q^s[r-s]_q\,{}^{\mathrm{maj}}A_{r-1,s-1}(q). \tag{9.4}$$

9.1. *Retour aux polynômes Eulériens.* — Ceux-ci, notés $A_r(t)$, ont été introduits au chap. 1, § 16, comme polynômes générateurs du groupe des permutations $\mathfrak{S}_r$ par nombre d'excédances "exc", d'une part, et par nombre de descentes "des", d'autre part. Leur fonction génératrice exponentielle (obtenue, par exemple, dans les Exercices 33 et 34 du chap. 1) est donnée par :

$$\sum_{r\geq 0}\frac{u^r}{r!}\,A_r(t)=\frac{1-t}{-t+\exp(u(t-1))}. \tag{9.5}$$

Posons, par ailleurs, $A_r(t) := \sum_s A_{r,s} t^s$, de sorte que $A_{r,s}$ (le *nombre Eulérien*) est le nombre de permutations σ d'ordre r ayant s descentes. On voit immédiatement qu'en insérant l'entier r dans chacun des r emplacements possibles d'une permutation d'ordre $(r-1)$, on est conduit à la relation de récurrence bien connue sur les nombres Eulériens :

$$A_{r,s} = (s+1)\, A_{r-1,s} + (r-s)\, A_{r-1,s-1}. \tag{9.6}$$

Les techniques du maj-codage, telles qu'elles ont été exposées en § 2.2, montrent, en outre, que l'on a :

$$A_{r,s}(q) = (1+q+\cdots+q^s)\, A_{r-1,s}(q) + (q^s+\cdots+q^{r-1})\, A_{r-1,s-1}(q), \tag{9.7}$$

puisque l'insertion de r à la fin d'une permutation σ ayant s descentes, ainsi que dans les s descentes de celle-ci, fournit le premier terme du second membre. Le second terme est obtenu en considérant les permutations ayant $(s-1)$ descentes et en insérant r dans les $(r-(s-1)+1)$ emplacements qui ne sont pas des descentes et non situés à l'extrémité de la permutation. Or (9.7) n'est qu'une récriture de (9.4).

On voit qu'en posant $q=1$ dans (9.2), puis en remplaçant u par $u/(1-t)$, on passe de la fonction génératrice (9.2) à la fonction génératrice (9.5). En posant, de même, $q=1$, on passe de la formule de récurrence (9.4) à (9.6). On dit que (9.2) et (9.4) sont *des q-analogues* de (9.5) et (9.6).

Il y a d'autres manières d'imaginer un q-analogue pour les polynômes Eulériens. On peut partir de la fonction génératrice (9.5) et au second membre remplacer la série exponentielle, par l'une quelconque des q-exponentielles $e_q(u)$, $E_q(u)$, telles qu'elles ont été définies en (1.16) et (1.17). Nous choisissons la seconde pour des raisons de commodité ; le calcul avec la première conduit simplement à l'étude de la statistique $\binom{n}{2} - \mathrm{inv}$, au lieu de la statistique “inv”.

Dans le second membre de (9.5) faisons la substitution $\exp(u) \leftarrow E_q(u)$, on obtient, puisque $E_q(u)e_q(-u)=1$,

$$\begin{aligned}\frac{1-t}{-t+E_q(u(t-1))} &= \frac{1-t}{1-t\, e_q((1-t)u)}\\ &= \Bigl(1 - t\sum_{n\ge 1}(1-t)^{n-1}\frac{u^n}{(q;q)_n}\Bigr)^{-1},\end{aligned}$$

une série que l'on note :

$$\frac{1-t}{-t+E_q(u(t-1))} = \sum_{n\ge 0} {}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)\frac{u^n}{(q;q)_n}. \tag{9.8}$$

Que sont ces coefficients ${}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)$? L'identité

$$\Bigl(1 - t\sum_{n\ge 1}(1-t)^{n-1}\frac{u^n}{(q;q)_n}\Bigr)\cdot \sum_{n\ge 0}{}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)\frac{u^n}{(q;q)_n} = 1$$

fournit la relation de récurrence : ${}^{\mathrm{inv}}A_0(t,q) = 1$ et

$$(9.9)\qquad {}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q) = \sum_{0\le k\le n-1} \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} {}^{\mathrm{inv}}A_k(t,q)\, t\,(1-t)^{n-1-k}\quad (n\ge 1),$$

qui, à son tour, montre que les coefficients ${}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)$ sont des *polynômes* en deux variables t et q et *à coefficients entiers positifs*. En laissant q tendre vers 1 dans (9.9) et en posant $t\,A_n(t) := {}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)\,\big|_{q\,=\,1}$, on trouve la formule

$$t\,A_n(t) = \sum_{0\le k\le n-1}\binom{n}{k}\, t\,A_k(t)\, t\,(1-t)^{n-1-k}\quad (n\ge 1),$$

qui, à son tour, est équivalente à l'identité

$$1 + \sum_{n\ge 1} t\,A_n(t)\frac{u^n}{n!} = \frac{1-t}{1-t\,\exp(u(1-t))},$$

établie dans l'Exercice 34, chap. 1. Cette identité dit que, pour $n\ge 1$, le polynôme $t\,A_n(t)$ est le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par la statistique $1+\mathrm{des}$. Il s'agit donc d'associer une statistique à cette dernière pour que le polynôme générateur formé satisfasse (9.9). Une telle statistique nous est fournie par le *nombre d'inversions* "inv", comme prouvé dans la proposition suivante.

Proposition 9.1. — *Pour chaque $n\ge 0$, notons désormais ${}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)$ le polynôme générateur du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ par la bi-statistique $(1+\mathrm{des},\mathrm{inv})$, i.e.,*

$$(9.10)\qquad {}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t^{1+\mathrm{des}\,\sigma}q^{\mathrm{inv}\,\sigma}.$$

Alors la suite $\bigl({}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)\bigr)$ satisfait la récurrence (9.9) *et la q-fonction génératrice de ces polynômes satisfait l'identité* (9.8).

Pour $k = 0,1,\ldots,(n-1)$, posons $u_k := \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} {}^{\mathrm{inv}}A_k(t,q)\,t$; puis, par itération sur $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$, définissons :

$$(9.11)\qquad G_{-1} := 0;\qquad G_k := u_k + (1-t)G_{k-1}.$$

On voit que pour démontrer la Proposition 9.1 il suffit de démontrer que l'on a :

$$\text{(9.12)} \qquad {}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q) = G_{n-1}.$$

Ce résultat découle immédiatement de la proposition suivante.

Lemme 9.2. — *Pour chaque $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, le polynôme G_k défini par la récurrence* (9.11) *est le polynôme générateur, par la bi-statistique* $(1 + \mathrm{des}, \mathrm{inv})$*, de l'ensemble des permutations d'ordre n, dont le plus long facteur droit croissant est au moins de longueur $(n-k)$, ou encore des permutations $\sigma = \sigma(1)\ldots\sigma(n)$ telles que l'on ait $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \cdots < \sigma(n)$.*

Démonstration. — D'après la Proposition 4.3, on a :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{(A,B)} q^{\mathrm{inv}(\gamma(A)\gamma(B))},$$

où la somme est sur toutes les partitions ordonnées (A, B) de $[\,n\,]$ en deux blocs tels que $|A| = k$ et $|B| = n - k$; rappelons que les symboles $\gamma(A)$ et $\gamma(B)$ désignent les mots *croissants* formés par les éléments de A et de B, respectivement. En notant $\mathfrak{S}_A$ le groupe des permutations de l'ensemble A, on a, en prenant (9.10) comme définition des polynômes ${}^{\mathrm{inv}}A_n(t,q)$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} {}^{\mathrm{inv}}A_k(t,q) &= \sum_{(A,B)} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} q^{\mathrm{inv}(\gamma(A)\gamma(B)) + \mathrm{inv}\,\tau} t^{1+\mathrm{des}\,\tau} \\ &= \sum_{(A,B)} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_A} q^{\mathrm{inv}(\gamma(A)\gamma(B)) + \mathrm{inv}\,\tau} t^{1+\mathrm{des}\,\tau},\end{aligned}$$

puisque A est de cardinal k. Comme les $(n-k)$ termes de $\gamma(B)$ vont en croissant, l'application $(\gamma(A)\gamma(B), \tau) \mapsto \sigma$ définie par $\sigma := \tau\gamma(B)$ est une bijection sur l'ensemble des permutations σ dont le plus long facteur droit croissant est au moins de longueur $(n-k)$. De plus, $\mathrm{inv}\,\sigma = \mathrm{inv}\,\sigma_1\sigma_2 + \mathrm{inv}\,\tau$ et $\mathrm{des}\,\sigma = \mathrm{des}\,\tau + \chi(\sigma(k) > \sigma(k+1))$. Notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ l'ensemble des permutations dont le plus long facteur droit croissant est *exactement* de longueur $(n-k)$ et F_k le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_{n,k}$ par la bi-statistique $(1 + \mathrm{des}, \mathrm{inv})$. Alors

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} {}^{\mathrm{inv}}A_k(t,q) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n,0} \cup \cdots \cup \mathfrak{S}_{n,k}} q^{\mathrm{inv}\,\sigma} t^{1+\mathrm{des}\,\sigma - \chi(\sigma(k) > \sigma(k+1))} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n,0} \cup \cdots \cup \mathfrak{S}_{n,k-1}} q^{\mathrm{inv}\,\sigma} t^{1+\mathrm{des}\,\sigma} + t^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n,k}} q^{\mathrm{inv}\,\sigma} t^{1+\mathrm{des}\,\sigma} \\ &= F_0 + \cdots + F_{k-1} + t^{-1} F_k.\end{aligned}$$

D'où, en posant : $G_k := F_0 + \cdots + F_k$ et en multipliant l'identité par t,

$$u_k = tG_{k-1} + (G_k - G_{k-1}) = G_k + (t-1)G_{k-1}$$

et donc

$$G_k = u_k + (1-t)G_{k-1},$$

qui est bien la récurrence (9.11). $\square$

10. Correspondance entre indice majeur et nombre d'inversions

Notons encore $R(\mathbf{m})$ la classe de tous les réarrangements du mot $1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}$. On a démontré, dans les théorèmes 6.1 et 6.3, que le polynôme générateur de $R(\mathbf{m})$ par le nombre d'inversions "inv", d'une part, et par l'indice majeur "maj", d'autre part, était égal au coefficient q-multinomial $\begin{bmatrix} m \\ m_1, m_2, \ldots, m_r \end{bmatrix}$, où $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$. En écrivant ces deux polynômes générateurs sous la forme

$$\sum_{k\geq 0} q^k \,|\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{inv} w = k\}| \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 0} q^k \,|\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{maj} w = k\}|,$$

on voit que, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$|\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{inv} w = k\}| = |\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{maj} w = k\}|. \tag{10.1}$$

Par conséquent, pour tout $k \geq 0$, il existe une bijection de l'ensemble $\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{inv} w = k\}$ sur l'ensemble $\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{maj} w = k\}$; ce qui équivaut encore à dire qu'il *existe* une bijection Φ de $R(\mathbf{m})$ sur $R(\mathbf{m})$ satisfaisant

$$\operatorname{maj} w = \operatorname{inv} \Phi(w), \tag{10.2}$$

pour tout $w \in R(\mathbf{m})$. Comment *construire* une telle bijection, c'est-à-dire comment inventer un algorithme explicite qui transforme biunivoquement un mot $w \in R(\mathbf{m})$ en un mot $w' \in R(\mathbf{m})$ tel que $\operatorname{maj} w = \operatorname{inv} w'$?

Les démonstrations des Théorèmes 6.1 et 6.3 étaient de nature tellement différente qu'elles ne fournissent pas, a priori, d'indication de construction. En revanche, en dressant les tables des valeurs de l'indice majeur et du nombre d'inversions pour de petites classes $R(\mathbf{m})$, on *observe* une propriété *plus fine* que la propriété (10.1) ci-dessus. Notons $L(w)$ ("L" pour "last" (dernière)) la *dernière* lettre du mot w. On observe, en fait, la propriété que pour tout $k \geq 0$ et tout $x \in X = \{1, 2, \ldots, r\}$, on a :

$$\begin{aligned} |\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{inv} w = k,\ L(w) = x\}| \\ = |\{w \in R(\mathbf{m}) : \operatorname{maj} w = k,\ L(w) = x\}|. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Dans la Table 3, on a calculé la valeur de ces deux statistiques pour les mots de la classe $R(2,1,1)$, c'est-à-dire les réarrangements du mot $1, 1, 2, 3$.

w	maj	inv
$1,2,3,1$	3	2
$1,3,2,1$	5	3
$2,1,3,1$	4	3
$2,3,1,1$	2	4
$3,1,2,1$	4	4
$3,2,1,1$	3	5

w	maj	inv
$1,1,3,2$	3	1
$1,3,1,2$	2	2
$3,1,1,2$	1	3

w	maj	inv
$1,1,2,3$	0	0
$1,2,1,3$	2	1
$2,1,1,3$	1	2

Table 3

Dans le premier, deuxième, troisième tableau se trouvent les mots finissant par 1, 2, 3, respectivement. On observe bien que la distribution de “maj” et de “inv” dans chacun des tableaux est la même.

Pour toute lettre $x \in X$ et tout mot w dont les lettres appartiennent à X, notons $b_x(w)$ (resp. $h_x(w)$) (“b” pour “bas” et “h” pour “haut”) le nombre de lettres du mot w qui sont inférieures ou égales (resp. strictement supérieures) à la lettre x. En particulier

$$b_x(w) + h_x(w) = |w| \quad \text{(longueur du mot } w\text{)}. \tag{10.4}$$

Notons encore $R(\mathbf{m})x$ l'ensemble de tous les mots de la forme wx où $w \in R(\mathbf{m})$, autrement dit des mots de $R(\mathbf{m})$ auxquels on a juxtaposé la lettre x à la fin. Notons que, si w' est un réarrangement *quelconque* de w, on a les propriétés :

$$\operatorname{inv} wx = \operatorname{inv} w + h_x(w); \tag{10.6}$$

$$\operatorname{maj} wx = \begin{cases} \operatorname{maj} w, & \text{si } L(w) \le x\,; \\ \operatorname{maj} w + b_x(w) + h_x(w), & \text{si } L(w) > x. \end{cases} \tag{10.7}$$

Supposons que la propriété (10.3) soit vraie pour toute classe $R(\mathbf{m})$. Alors il existe une bijection $w \mapsto w'$ de $R(\mathbf{m})$ sur elle-même telle que $\operatorname{maj} w = \operatorname{inv} w'$ *et* $L(w) = L(w')$. De même, x étant une lettre donnée, il existe aussi une bijection $w \mapsto w''$ telle que $\operatorname{maj} wx = \operatorname{inv} w''x$.

Si $L(w) \le x$, on a donc :

$$\begin{aligned} L(w') &= L(w); \\ \operatorname{inv} w' &= \operatorname{maj} w \\ &= \operatorname{maj} wx && \text{[d'après (10.7)]} \\ &= \operatorname{inv} w''x \\ &= \operatorname{inv} w'' + h_x(w') && \text{[d'après (10.6)].} \end{aligned}$$

Si $L(w) > x$, on a aussi

$$\begin{aligned} L(w') &= L(w); \\ \operatorname{inv} w' &= \operatorname{maj} w \\ &= \operatorname{maj} wx - b_x(w) - h_x(w) \qquad && \text{[d'après (10.7)]} \\ &= \operatorname{inv} w''x - b_x(w) - h_x(w) \\ &= \operatorname{inv} w'' - b_x(w') && \text{[d'après (10.6)].} \end{aligned}$$

Par conséquent, si la propriété (10.3) est vraie, il existe une bijection γ_x de la classe $R(\mathbf{m})$ sur elle-même, à savoir $w' \mapsto w''$, ayant la propriété

$$\operatorname{inv} \gamma_x(w') = \begin{cases} \operatorname{inv} w' - h_x(w'), & \text{si } L(w') \le x\,; \\ \operatorname{inv} w' + b_x(w'), & \text{si } L(w') > x. \end{cases} \tag{10.8}$$

Réciproquement, s'il existe une bijection $\gamma_x : w' \mapsto w''$ satisfaisant (10.8), on peut définir une bijection Φ de chaque classe de réarrangements de mots sur elle-même en posant

$$\Phi(w) := w, \tag{10.9}$$

si le mot w est de longueur 1, et pour tout mot non vide w et toute lettre x en posant, par récurrence sur la longueur des mots,

$$\Phi(wx) := \gamma_x(\Phi(w))x. \tag{10.10}$$

Ainsi, par récurrence, on détermine l'image $\Phi(w)$ de w, puis on applique à $\Phi(w)$ la bijection γ_x, enfin on juxtapose la lettre x à la fin du mot obtenu.

Théorème 10.1. — *Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(a) *La propriété* (10.3) *est satisfaite pour toute classe.*

(b) *Pour toute lettre x il existe une bijection $\gamma_x : w' \mapsto w''$ telle que la propriété* (10.8) *soit vérifiée ; de plus, la bijection Φ définie par* (10.9) *et* (10.10) *a les propriétés :*

$$\operatorname{maj} w = \operatorname{inv} \Phi(w) \quad \text{et} \quad L(w) = L(\Phi(w)). \tag{10.11}$$

Démonstration. — L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) est banale. Pour démontrer l'implication réciproque, il nous reste seulement à vérifier (10.11). D'abord, $L(w) = L(\Phi(w))$ par définition-même de Φ donnée en (10.10). Ensuite, pour w non vide et chaque lettre x, on a, si $L(w) \le x$, les relations :

$$\begin{aligned} \operatorname{inv} \Phi(wx) &= \operatorname{inv} \gamma_x(\Phi(w))x \\ &= \operatorname{inv} \gamma_x(\Phi(w)) + h_x(w) && \text{[d'après (10.6)]} \\ &= (\operatorname{inv} \Phi(w) - h_x(\Phi(w))) + h_x(w) && \text{[d'après (10.8)]} \\ &= \operatorname{maj} w \\ &= \operatorname{maj} wx. \end{aligned}$$

Si enfin $L(w) > x$, on a, d'après les mêmes propriétés,

$$\begin{aligned}\operatorname{inv}\Phi(wx) &= \operatorname{inv}\gamma_x(\Phi(w)) + h_x(w)\\ &= (\operatorname{inv}\Phi(w) + b_x(w)) + h_x(w)\\ &= \operatorname{maj} w + |w|\\ &= \operatorname{maj} wx. \quad \square\end{aligned}$$

La construction d'une bijection Φ se réduit donc à la construction de bijections γ_x ayant la propriété (10.8). Une classe *naturelle* de ces bijections est donnée par la construction suivante.

Soient $x \in X$ et w un mot. Si la dernière lettre $L(w)$ de w est inférieure ou égale à (resp. plus grande que) x, le mot w admet la factorisation unique :

$$(v_1y_1, v_2y_2, \ldots, v_py_p),$$

qu'on appellera *x-factorisation* de w ayant les propriétés suivantes :

(i) chaque y_i $(1 \le i \le p)$ est une lettre satisfaisant $y_i \le x$ (resp. $y_i > x$) ;

(ii) chaque facteur v_i $(1 \le i \le p)$ est un mot qui est ou vide, ou qui a toutes ses lettres plus grandes que (resp. plus petites que ou égales à) x. On pose alors :

$$\gamma_x(w) = y_1v_1y_2v_2\ldots y_pv_p. \tag{10.12}$$

Naturellement, γ_x est une bijection de chaque classe $R(\mathbf{m})$ sur elle-même, puisqu'elle envoie toute x-factorisation $(v_1y_1, v_2y_2, \ldots, v_py_p)$, définie en coupant le mot *après* chaque lettre inférieure ou égale à (resp. plus grande que) x sur une factorisation $(y_1v_1, y_2v_2, \ldots, y_pv_p)$ définie en coupant le mot *avant* chaque lettre inférieure ou égale à (resp. plus grande que) x.

Dans ce qui suit, on note Φ la bijection de $R(\mathbf{m})$ sur elle-même, définie par (10.9) et (10.10), lorsqu'on prend pour bijections γ_x les bijections définies par (10.12). On peut aussi donner la description de cette transformation Φ sous la forme algorithmique suivante.

Algorithme pour Φ. — *Soit $w = x_1x_2\ldots x_m$;*

1. *Poser $i = 1$, $w'_i = x_1$;*
2. *Si $i = m$, soit $\Phi(w) = w'_i$ et stop ; sinon continuer ;*
3. *Si la dernière lettre de w'_i est inférieure ou égale à (resp. plus grande que) x_{i+1}, couper w'_i après chaque lettre inférieure ou égale (resp. plus grande que) x_{i+1} ;*
4. *Dans chaque compartiment de w'_i déterminé par ces coupures, déplacer la dernière lettre du compartiment au début de celui-ci ; soit v'*

le mot obtenu après avoir fait ces déplacements ; poser $w'_{i+1} = v'x_{i+1}$ *; remplacer* i *par* $i+1$ *et aller en* 2.

Par exemple, l'image du mot $w = 435113423$ par Φ est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned}
w'_1 &= 4 \mid \\
w'_2 &= 4 \mid 3 \mid \\
w'_3 &= 4 \mid 3 \mid 5 \mid \\
w'_4 &= 4\,3\,5\,1 \mid \\
w'_5 &= 1 \mid 4\,3 \mid 5\,1 \mid \\
w'_6 &= 1 \mid 3 \mid 4 \mid 1 \mid 5\,3 \mid \\
w'_7 &= 1\,3 \mid 4 \mid 1\,3 \mid 5 \mid 4 \mid \\
w'_8 &= 3 \mid 1 \mid 4\,3 \mid 1 \mid 5\,4\,2 \mid \\
\Phi(w) = w'_9 &= 3\,1\,3\,4\,1\,2\,5\,4\,3.
\end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent, où $w = 4\,3\,5\,1\,1\,3\,4\,2\,3$, les descentes sont en position 1, 3 et 7, de sorte que $\operatorname{maj} w = 11$. Or, $\Phi(w) = 3\,1\,3\,4\,1\,2\,5\,4\,3$ comporte exactement $\operatorname{inv} \Phi(w) = 11$ inversions. Également les deux mots w et $\Phi(w)$ se terminent par la même lettre, à savoir 3.

Les deux mots ont encore une propriété supplémentaire. Dans chacun d'eux, il y a un 2 *à la droite* de l'occurrence la plus à droite de 1 ; il y a un 3 *à la droite* de l'occurrence la plus à droite de 2. En revanche, il n'y a pas de 4 *à la droite* de l'occurrence la plus à droite de 3 et pas de 5 *à la droite* de l'occurrence la plus à droite de 4. On dit alors que la *ligne inverse de route* de w est le sous-ensemble $\{3, 4\}$.

Définition. — Soit w un réarrangement du mot $i_1^{n_1} i_2^{n_2} \ldots i_s^{n_s}$ où $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le r$ et $n_1 \ge 1$, $n_2 \ge 1$, ... , $n_s \ge 1$. On dit que la lettre i_j $(1 \le j \le s-1)$ appartient à la *ligne inverse de route*, notée $\operatorname{Iligne} w$, de w si l'on peut écrire w sous la forme $v i_{j+1} v' i_j v''$, où v' et v'' ne contiennent aucune lettre égale à i_j, i_{j+1}.

Autrement dit, l'inverse de route de w est l'ensemble des lettres i_j telles que l'occurrence la plus à droite de i_{j+1} se trouve *à gauche* de l'occurrence la plus à droite de i_j.

On note que dans la précédente définition, on a considéré seulement les lettres de l'alphabet $X = \{1, 2, \ldots, r\}$ qui apparaissent *effectivement* dans le mot. La notion de ligne inverse de route se réfère aux occurrences des différentes paires de lettres *consécutives* i_j, i_{j+1}.

Dans la définition de Φ donnée en (10.9) et (10.10), supposons que le mot wx appartient à la classe $R(\mathbf{m})$ où $m_1 \ge 1$, $m_2 \ge 1$, ... , $m_r \ge 1$, de sorte qu'avec les notations de la précédente définition, on a : $s = r$,

$(i_1,\ldots,i_s)=(1,\ldots,r)$ et $n_j=m_j$ pour $j=1,\ldots,r$. D'autre part, par définition de Φ, si $1\le x\le r-1$, on a : $x\in \mathrm{Iligne}\, wx$, $x\in \mathrm{Iligne}\,\Phi(wx)$; si $2\le x\le r-1$, on a également : $(x-1)\notin \mathrm{Iligne}\, wx$, $(x-1)\notin \mathrm{Iligne}\,\Phi(wx)$.

Considérons alors la x-factorisation $(v_1y_1, v_2y_2,\ldots,v_py_p)$ de $\Phi(w)$. Lorsque $L(w)\le x$, les facteurs v_i n'ont que des lettres supérieures à x et les y_i sont des lettres inférieures ou égales à x. Considérons, par ailleurs, $z\in X\setminus\{x-1,x,r\}$. Si $x<z<z+1$, les occurrences de z et $(z+1)$ se produisent dans les facteurs v_i. Lorsqu'on applique γ_x au mot $\Phi(w)$, la position *mutuelle* de ces occurrences de lettres n'est pas modifiée. De même, si $z<z+1\le(x-1)$, les occurrences de z et $(z+1)$ se produisent dans les lettres y_i et encore une fois, leur position mutuelle n'est pas modifiée par application de γ_x.

Lorsque $L(w)>x$, la x-factorisation de $\Phi(w)$ est telle que les v_i ont des lettres inférieures ou égales à x et les lettres y_i sont supérieures à x. Si $x<z<z+1$, les occurrences de z et $(z+1)$ se produisent cette fois dans les lettres y_i et lorsque $z<z+1\le(x-1)$, dans les facteurs v_i. Encore une fois les positions mutuelles de ces occurrences ne sont pas modifiées. Il en résulte que z est dans $\mathrm{Iligne}\, wx$ si et seulement si $z\in\mathrm{Iligne}\,\Phi(wx)$. Rassemblons toutes les propriétés de la bijection Φ dans l'énoncé suivant.

Théorème 10.2. — *La bijection Φ de la classe $R(\mathbf{m})$ sur elle-même, définie en* (10.9), (10.10) *et à l'aide des bijections γ_x introduites en* (10.12), *a, pour tout mot $w\in R(\mathbf{m})$, les trois propriétés suivantes :*

(a) $\mathrm{maj}\, w=\mathrm{inv}\,\Phi(w)$;
(b) $L(w)=L(\Phi(w))$;
(c) $\mathrm{Iligne}\, w=\mathrm{Iligne}\,\Phi(w)$.

La propriété (c) du précédent théorème a une application intéressante lorsqu'on se restreint aux classes $R(\mathbf{m})$ de mots sans répétitions (lorsque tous les m_i sont égaux à 1), c'est-à-dire aux permutations. La *ligne inverse de route* d'une permutation $w=x_1x_2\ldots x_r$ est alors l'ensemble de tous les entiers j tels que $1\le j\le r-1$ et tels que $(j+1)$ soit *à la gauche de* j dans le mot $x_1x_2\ldots x_r$.

Si l'on définit la *ligne de route* de w comme l'ensemble, noté $\mathrm{Ligne}\, w$, des entiers j tels que $x_j>x_{j+1}$, on peut vérifier que l'on a :

$$\mathrm{Iligne}\, w=\mathrm{Ligne}\, w^{-1}, \tag{10.13}$$

où w^{-1} désigne l'inverse de la permutation w.

Définissons alors l'*indice inverse majeur* $\mathrm{imaj}\, w$ de w par :

$$\mathrm{imaj}\, w=\sum_j j\quad(j\in\mathrm{Iligne}\, w),$$

alors que

$$\operatorname{maj} w = \sum_j j \quad (j \in \operatorname{Ligne} w).$$

et notons $\mathbf{i}(w)$ l'inverse w^{-1} de la permutation w. La chaîne

$$w \overset{\mathbf{i}}{\mapsto} w_1 \overset{\Phi}{\mapsto} w_2 \overset{\mathbf{i}}{\mapsto} w_3$$

a, d'après le précédent Théorème (c), les propriétés :

$$\operatorname{Ligne} w = \operatorname{Iligne} w_1 = \operatorname{Iligne} w_2 = \operatorname{Ligne} w_3;$$

et d'après (a), puisque $\operatorname{inv} w_2 = \operatorname{inv} w_2^{-1} = \operatorname{inv} w_3$, aussi les propriétés :

$$\operatorname{imaj} w = \operatorname{maj} w_1 = \operatorname{inv} w_2 = \operatorname{inv} w_3.$$

On en tire :

$$(\operatorname{imaj}, \operatorname{maj})(w) = (\operatorname{maj}, \operatorname{imaj})(w_1) = (\operatorname{inv}, \operatorname{imaj})(w_2) = (\operatorname{inv}, \operatorname{maj})(w_3).$$

Le résultat suivant est donc démontré.

Corollaire 10.3.

(1) *Les deux statistiques* imaj *et* inv *ont même distribution sur tout ensemble de permutations ayant une ligne inverse de route donnée.*

(2) *Les paires de statistiques* $(\operatorname{imaj}, \operatorname{maj})$, $(\operatorname{inv}, \operatorname{imaj})$ *et* $(\operatorname{inv}, \operatorname{maj})$ *ont même distribution sur tout groupe de permutations* $\mathfrak{S}_r$.

11. Indices majeur et majeur inverse

Pour tout $n \geq 0$ soit $A_n(q_1, q_2)$ le polynôme générateur du groupe $\mathfrak{S}_n$ par le couple $(\operatorname{maj}, \operatorname{imaj})$, soit

$$A_n(q_1, q_2) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q_1^{\operatorname{maj} \sigma} q_2^{\operatorname{imaj} \sigma}. \tag{11.1}$$

Le Corollaire 10.3 permet de dire qu'on a aussi

$$A_n(q_1, q_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q_1^{\operatorname{maj} \sigma} q_2^{\operatorname{inv} \sigma} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q_1^{\operatorname{imaj} \sigma} q_2^{\operatorname{inv} \sigma}. \tag{11.2}$$

Pour des raisons de commodité dans le calcul qui suit, introduisons la notion de *co-indice majeur* "comaj". Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ posons, en effet,

$$\operatorname{comaj} \sigma := \sum_{1 \leq i \leq n-1} (n-i)\, \chi\big(\sigma(i) > \sigma(i+1)\big). \tag{11.3}$$

En écrivant la permutation σ comme un mot linéaire $\sigma = \sigma(1) \ldots \sigma(n)$, on peut former le mot $y = y_1 \ldots y_n$, où la lettre y_i est définie comme étant égale au nombre d'indices j tels que $1 \le j \le i-1$ et $\sigma(j) > \sigma(j+1)$ $(1 \le i \le n)$. On vérifie que l'on a

$$\text{comaj}\,\sigma = \text{tot}\,y. \tag{11.4}$$

D'autre part, on peut établir (*cf.* Exercice ?) qu'on a aussi :

$$A_n(q_1, q_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q_1^{\text{comaj}\,\sigma} q_2^{\text{comaj}\,\sigma^{-1}}. \tag{11.5}$$

Comment maintenant utiliser l'une de ces interprétations des polynômes $A_n(q_1, q_2)$ pour trouver leur fonction génératrice ? La simplicité de la q-fonction génératrice des polynômes $A_n(q_1, q_2)$ $(n \ge 0)$ lorsque $q_1 = q$ et $q_2 = 1$ trouvée en (2.5) nous amène à considérer encore des séries basiques, mais cette fois à deux bases q_1, q_2. Par analogie avec les q-factorielles montantes à une base, introduisons les expressions suivantes :

$$(u; q_1, q_2)_{r,s} := \begin{cases} 1, & \text{si } r \text{ ou } s \text{ est nul}; \\ \displaystyle\prod_{0 \le i \le r-1} \prod_{0 \le j \le s-1} (1 - u q_1^i q_2^j), & \text{si } r, s \ge 1, \end{cases}$$

$$(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty} := \lim\nolimits_{r,s} (u; q_1, q_2)_{r,s} = \prod_{i \ge 0} \prod_{j \ge 0} (1 - u q_1^i q_2^j). \tag{11.6}$$

Nous nous proposons d'établir l'identité suivante :

$$\sum_{n \ge 0} A_n(q_1, q_2) \frac{u^n}{(q_1; q_1)_n \, (q_2; q_2)_n} = \frac{1}{(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty}}. \tag{11.7}$$

L'expression $(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty}$ a bien un sens dans l'algèbre des séries formelles en les trois variables u, q_1, q_2, puisque la famille des séries formelles $(1 - u q_1^i q_2^j)$ $(i, j \ge 0)$ (ainsi que la famille des inverses de ces séries) est naturellement multipliable. Il s'agit donc de démontrer que lorsqu'on développe la famille produit $1/(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty}$ en faisant apparaître la normalisation $1/((q_1; q_1)_n \, (q_2; q_2)_n)$ le coefficient correspondant est bien le polynôme $A_n(q_1, q_2)$ défini en (11.1).

Maintenant, chaque inverse $1/(1 - u q_1^i \, q_2^j)$ se développe comme une série géométrique de la forme $\sum_{a_{ij} \ge 0} (u q_1^i \, q_2^j)^{a_{ij}}$. Le produit de telles séries géométriques peut s'écrire

$$\sum_A \prod_{i,j} (u q_1^i \, q_2^j)^{a_{ij}} = \sum_A u^{\Sigma a_{ij}} q_1^{\Sigma i \, a_{ij}} \, q_2^{\Sigma j \, a_{ij}}, \tag{11.8}$$

où A varie dans l'ensemble de toutes les matrices de la forme $A = (a_{ij})$ $(i \ge 0,\ j \ge 0)$, dont les coefficients a_{ij} sont des entiers qui sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. A partir d'un certain rang, toutes les lignes et les colonnes de ces matrices n'ont que des coefficients nuls. En dehors de la matrice identiquement nulle, on peut exprimer chacune d'entre elles comme une matrice bornée ayant au moins un coefficient non nul dans sa colonne de droite et sa ligne la plus basse.

Par exemple

$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

est une telle matrice.

La prochaine étape est d'associer bijectivement à une telle matrice une matrice à deux lignes ou *bimot* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \dots b_n \\ c_1 \dots c_n \end{pmatrix}$, à coefficients entiers, telle que

$$(11.9) \qquad \sum_{i,j} a_{ij} = n, \ \sum_{i,j} i\, a_{ij} = b_1 + \cdots + b_n, \ \sum_{i,j} j\, a_{ij} = c_1 + \cdots + c_n.$$

La somme (11.8) sera donc remplacée par :

$$(11.10) \qquad \frac{1}{(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty}} = \sum_{\mathbf{b}} u^n\, q_1^{\operatorname{tot} b}\, q_2^{\operatorname{tot} c}.$$

Pour satisfaire les relations (11.9) on part de la matrice A, on lit ses lignes de gauche à droite et de haut en bas en écrivant, pour chaque coefficient a_{ij} *strictement positif* rencontré, exactement a_{ij} bilettres $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ à la suite. Le nombre de bilettres que l'on écrit de la sorte est donc égal à $\sum_{i,j} a_{ij}$. De plus, sur la ligne du haut (resp. du bas) de $\mathbf{b}$ chaque nombre i (resp. j) est répété a_{ij} fois et, par conséquent, les deux dernières conditions de (11.9) sont réalisées.

Enfin, la manière utilisée pour écrire successivement ces bilettres $\begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix}$ fait que celles-ci sont *en ordre lexicographique croissant* lorsqu'on lit le bimot $\mathbf{b}$ de la gauche vers la droite. On dit ainsi que le bimot $\mathbf{b}$ est *croissant*. Réciproquement, si l'on part d'un bimot croissant, il est clair qu'on peut reconstruire la matrice A de façon unique.

Par exemple, à la matrice A ci-dessus correspond le mot croissant

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,3\,3\,3\,3\,3 \\ 2\,4\,4\,0\,3\,3\,3\,1\,2\,2\,4\,4 \end{pmatrix},$$

un bimot qui est de longueur $n = 12$ et tel que $\operatorname{tot} b = 19$, $\operatorname{tot} c = 32$.

La prochaine étape est d'associer, de façon bijective, à tout bimot croissant $\mathbf{b} = \binom{b}{c}$ un triplet (σ, b', c'), où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et où b', c' sont des mots croissants de longueur n tels que

$$\operatorname{tot} b = \operatorname{comaj} \sigma + \operatorname{tot} b', \quad \operatorname{tot} c = \operatorname{comaj} \sigma^{-1} + \operatorname{tot} c'. \tag{11.11}$$

Il en résultera qu'on aura

$$\sum_{\mathbf{b}} u^n\, q_1^{\operatorname{tot} b}\, q_2^{\operatorname{tot} c} = \sum_{n \ge 0} u^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ b', c' SC(n)}} q_1^{\operatorname{comaj} \sigma + \operatorname{tot} b'} q_2^{\operatorname{comaj} \sigma^{-1} + \operatorname{tot} c'};$$

et donc, d'après (4.4) et (11.5),

$$\sum_{\mathbf{b}} u^n\, q_1^{\operatorname{tot} b}\, q_2^{\operatorname{tot} c} = \sum_{n \ge 0} u^n \frac{1}{(q_1; q_1)_n\, (q_2; q_2)_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q_1^{\operatorname{comaj} \sigma} q_2^{\operatorname{comaj} \sigma^{-1}}$$
$$= \sum_{n \ge 0} \frac{u^n}{(q_1; q_1)_n\, (q_2; q_2)_n} A_n(q_1, q_2).$$

L'identité (11.7) sera donc prouvée.

Construction de la bijection $\mathbf{b} \mapsto (\sigma, b', c')$. — C'est encore une variation du Verfahren de MacMahon qui nous fournira cette bijection. Partons du bimot croissant $\mathbf{b} = \binom{b}{c}$. Du fait que les bilettres $\binom{b_i}{c_i}$ vont en croissant pour l'ordre lexicographique, on a la propriété

$$c_i > c_{i+1} \Rightarrow b_i < b_{i+1}. \tag{11.12}$$

Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, on pose

$$\sigma(i) = |\{j : 1 \le j \le n,\ c_j < c_i\}| + |\{j : 1 \le j \le i,\ c_j = c_i\}|. \tag{11.13}$$

Autrement dit, $\sigma(i)$ est égal au nombre de lettres dans c qui sont inférieures à c_i, plus le nombre de lettres qui sont égales à c_i, mais qui se trouvent à la gauche de c_i, y compris c_i. On définit bien là une permutation d'ordre n.

Par construction, $c_i > c_{i+1}$ si et seulement si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Pour $1 \le i \le n$ notons y_i le nombre d'indices j tels que $1 \le j \le i - 1$ et $\sigma(j) > \sigma(j+1)$, c'est-à-dire aussi le nombre d'indices j tels que $1 \le j \le i - 1$ et $c_j > c_{j+1}$. Le mot $y = y_1 \ldots y_n$ est croissant. De plus, d'après (11.12),

$$y_i < y_{i+1} \Leftrightarrow \sigma(i) > \sigma(i+1) \Leftrightarrow c_i > c_{i+1} \Rightarrow b_i < b_{i+1}. \tag{11.14}$$

Comme $y_1 = 0$, les relations (11.14) entraînent que l'on a toujours

$$y_i \le b_i \quad (1 \le i \le n). \tag{11.15}$$

On définit donc un mot *croissant* $b' = b'_1 \dots b'_n$ par

$$b'_i := b_i - y_i \quad (1 \le i \le n). \tag{11.16}$$

Enfin, la première relation (11.11) est par construction satisfaite.

Reprenons l'exemple précédent. Au-dessous du bimot croissant $\binom{b}{c}$, on a représenté les valeurs de σ, de y et du mot croissant $b' = b - y$.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
b = & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
c = & 2 & 4 & 4 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\
\sigma = & 3 & 9 & 10 & 1 & 6 & 7 & 8 & 2 & 4 & 5 & 11 & 12 \\
y = & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
b' = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

On peut également partir du bimot $\binom{c}{b}$ (et non $\mathbf{b} = \binom{b}{c}$) et réarranger ses bilettres $\binom{c_i}{b_i}$ en ordre lexicographique croissant. On obtient un bimot $\widetilde{\mathbf{b}}$ dont la ligne du haut est le réarrangement croissant du mot c.

Dans l'exemple que nous traitons, on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,4\,4\,4 \\ 1\,3\,0\,3\,3\,1\,1\,1\,0\,0\,3\,3 \end{pmatrix}.$$

Revenons au cas général. Par définition de σ donnée en (11.13), il y a exactement $\sigma(i)$ bilettres $\binom{b_j}{c_j}$ telles que $1 \le j \le n$ et $c_j < c_i$ ou telles que $1 \le j \le i$ et $c_j = c_i$. Comme dans le bimot $\widetilde{\mathbf{b}}$ on a rangé les bilettres $\binom{c_j}{b_j}$ en ordre lexicographique croissant, on retrouvera dans $\widetilde{\mathbf{b}}$ la bilettre $\binom{c_i}{b_i}$ en $\sigma(i)^{\text{ième}}$ position. D'où $\widetilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} c_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & c_{\sigma^{-1}(n)} \\ b_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & b_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$. Soit τ la permutation définie comme dans (11.13) lorsqu'on applique cette fois le comptage au mot croissant $\widetilde{\mathbf{b}}$. Soit donc

$$\begin{aligned}\tau(i) = {}&|\{j : 1 \le j \le n,\, b_{\sigma^{-1}(j)} < b_{\sigma^{-1}(i)}\}| \\ &+ |\{j : 1 \le j \le i,\, b_{\sigma^{-1}(j)} = b_{\sigma^{-1}(i)}\}|.\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\tau\sigma(i) = |\{j : 1 \le j \le n,\, b_j < b_i\}| + |\{j : 1 \le j \le \sigma(i),\, b_{\sigma^{-1}(j)} = b_i\}|.$$

Or, par définition de σ, si $b_k = b_l$, on a $\sigma(k) < \sigma(l) \Leftrightarrow k < l$, d'où si $b_{\sigma^{-1}(j)} = b_i$, on a $j < \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(j) < i$. Puisque b est croissant, on en tire :

$$\begin{aligned}\tau\sigma(i) &= |\{j : 1 \le j \le n,\, b_j < b_i\}| + |\{j : 1 \le \sigma^{-1}(j) \le i,\, b_{\sigma^{-1}(j)} = b_i\}|\\ &= |\{j : 1 \le j \le i,\, b_j < b_i\}| + |\{j : 1 \le j \le i,\, b_j = b_i\}|\\ &= i.\end{aligned}$$

D'où $\tau = \sigma^{-1}$.

Suivant le même procédé que précédemment, au bimot croissant $\widetilde{\mathbf{b}}$ correspond biunivoquement un couple (τ, c'), où $\tau = \sigma^{-1}$ et où c' est un mot croissant satisfaisant la seconde relation de (11.11). L'identité (11.7) est donc démontrée. $\square$

Reprenons l'exemple courant en appliquant la construction au bimot croissant $\widetilde{\mathbf{b}}$. Le calcul de σ^{-1} et de c' donne :

$$\begin{array}{rl}\tilde{c} = & 0\ 1\ 2\ 2\ \ 2\ \ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ \ 4\ \ 4\\ \tilde{b} = & 1\ 3\ 0\ 3\ \ 3\ \ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ 3\ \ 3\\ \sigma^{-1} = & 4\ 8\ 1\ 9\ 10\ 5\ 6\ 7\ 2\ 3\ 11\ 12\\ z = & 0\ 1\ 2\ 2\ \ 2\ \ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ \ 4\ \ 4\\ c' = & 0\ 0\ 1\ 1\ \ 1\ \ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ \ 3\ \ 3\end{array}$$

Un raffinement de la précédente construction. — Si on examine la bijection inverse $(\sigma, b', c') \mapsto \mathbf{b}$, on voit que le mot croissant y défini juste avant (11.14), tel que $\operatorname{tot} y = \operatorname{comaj} \sigma$, satisfait encore la propriété :

$$y_n = \operatorname{des} \sigma. \tag{11.17}$$

Considérons maintenant le produit *fini*

$$\frac{1}{(u; q_1, q_2)_{r+1,s+1}} = \prod_{0 \le i \le r} \prod_{0 \le j \le s} \frac{1}{1 - u q_1^i q_2^j}.$$

Il se développe encore comme une série

$$\sum_A \prod_{i,j} (u q_1^i\, q_2^j)^{a_{ij}} = \sum_A u^{\Sigma a_{ij}} q_1^{\Sigma i\, a_{ij}}\ q_2^{\Sigma j\, a_{ij}},$$

mais cette fois toutes les matrices A sont des matrices $(r+1) \times (s+1)$. Le bimot croissant $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \ldots b_n \\ c_1 \ldots c_n \end{pmatrix}$ qui correspond à une telle matrice a donc la propriété supplémentaire suivante :

$$\max b_i = b_n \le r \quad \text{et} \quad \max c_i \le s.$$

Les propriétés (11.15) - (11.17) entraînent que l'on a : $b'_n = b_n - y_n \le r - \operatorname{des}\sigma$. On a une propriété analogue pour les c'_i, à savoir $c'_n \le s - \operatorname{des}\sigma^{-1}$.

Considérons alors un quintuplet (σ, r', s', b', c'), où

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad r', s' \ge 0, \quad b' \in SC(n, r'), \quad c' \in SC(n, s'). \tag{11.18}$$

Par la bijection inverse $(\sigma, b', c') \mapsto \mathbf{b}$ décrite ci-dessus, il correspond à ce quintuplet un unique triplet $(r, s, \mathbf{b})$ tel que $r = r' + \operatorname{des}\sigma$, $s = s' + \operatorname{des}\sigma^{-1}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ avec $b \in SC(n, r)$ et $\tilde{c}$ (le réarrangement croissant de c) dans $SC(n, s)$. On peut donc écrire :

$$\sum_{r,s\ge 0} \frac{t_1^r\, t_2^s}{(u; q_1, q_2)_{r+1,s+1}} = \sum_{r,s\ge 0} t_1^r\, t_2^s \sum_{n\ge 0} u^n \sum_{\substack{b\in SC(n,r),\\ c\in SC(n,s)}} q_1^{\operatorname{tot} b} q_2^{\operatorname{tot} c}$$

$$= \sum_{r,s\ge 0} \sum_{n\ge 0} u^n \sum_{(\sigma, r', s', b', c')} t_1^{r' + \operatorname{des}\sigma} t_2^{s' + \operatorname{des}\sigma^{-1}} q_1^{\operatorname{comaj}\sigma + \operatorname{tot} b'} q_2^{\operatorname{comaj}\sigma^{-1} + \operatorname{tot} c'},$$

où le quintuplet (σ, r', s', b', c') satisfait les relations (11.18), ainsi que $r = r' + \operatorname{des}\sigma$ et $s = s' + \operatorname{des}\sigma^{-1}$. Posons

$$A_n(t_1, t_2, q_1, q_2) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t_1^{\operatorname{des}\sigma} t_2^{\operatorname{des}\sigma^{-1}} q_1^{\operatorname{comaj}\sigma} q_2^{\operatorname{comaj}\sigma^{-1}}. \tag{11.19}$$

On en déduit :

$$\sum_{r,s\ge 0} \frac{t_1^r\, t_2^s}{(u; q_1, q_2)_{r+1,s+1}} = \sum_{n\ge 0} u^n A_n(t_1, t_2, q_1, q_2) \sum_{\substack{r'\ge 0\\ b'\in SC(n,r')}} t_1^{r'} q_1^{\operatorname{tot} b'} \sum_{\substack{s'\ge 0\\ c'\in SC(n,s')}} t_2^{s'} q_2^{\operatorname{tot} c'}$$

$$= \sum_{n\ge 0} u^n A_n(t_1, t_2, q_1, q_2) \frac{1}{(t_1; q_1)_{n+1}\, (t_2; q_2)_{n+1}}, \tag{11.20}$$

d'après (3.9) et (3.15).

L'identité (11.20) fournit ainsi une fonction génératrice pour les polynômes $A_n(t_1, t_2, q_1, q_2)$. On notera la nature des dénominateurs qui sont des q_1- et q_2-factorielles montantes. Il reste à voir qu'on a aussi

$$A_n(t_1, t_2, q_1, q_2) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t_1^{\operatorname{des}\sigma} t_2^{\operatorname{des}\sigma^{-1}} q_1^{\operatorname{maj}\sigma} q_2^{\operatorname{maj}\sigma^{-1}}, \tag{11.21}$$

où les "co" ont disparu dans les deux exposants. Ceci peut être démontré à l'aide de la bijection **rc** qui envoie la permutation σ sur la permutation $\mathbf{rc}\,\sigma$ définie par

$$\mathbf{rc}\,\sigma(i) := n + 1 - \sigma(n + 1 - i) \quad (1 \le i \le n).$$

Une vérification banale permet de voir, en effet, que l'on a :

$$\operatorname{comaj}\mathbf{rc}\,\sigma = \operatorname{maj}\sigma, \quad \operatorname{des}\mathbf{rc}\,\sigma = \operatorname{des}\sigma.$$

12. Les q-fonctions trigonométriques

Les deux exponentielles $e_q(u)$ et $E_q(u)$ introduites en (1.21) et (1.22) servent à définir les q-fonctions trigonométriques q-sinus, q-cosinus et q-tangentes. L'anneau sous-jacent Ω étant le corps des complexes, on pose :

$$\sin_q(u) := \frac{e_q(iu) - e_q(-iu)}{2i} = \sum_{n\ge 0}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}}\,;$$

$$\cos_q(u) := \frac{e_q(iu) + e_q(-iu)}{2} = \sum_{n\ge 0}(-1)^n \frac{u^{2n}}{(q;q)_{2n}}\,;$$

$$\operatorname{Sin}_q(u) := \frac{E_q(iu) - E_q(-iu)}{2i} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Cos}_q(u) := \frac{E_q(iu) + E_q(-iu)}{2}.$$

On définit de même

$$\operatorname{tg}_q(u) := \frac{\sin_q(u)}{\cos_q(u)} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Tg}_q(u) := \frac{\operatorname{Sin}_q(u)}{\operatorname{Cos}_q(u)}.$$

On peut vérifier directement l'identité :

$$\sin_q(u)\operatorname{Cos}_q(u) - \operatorname{Sin}_q(u)\cos_q(u) = 0,$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}_q(u) = \frac{\sin_q(u)}{\cos_q(u)} &= \frac{\sin_q(u)\operatorname{Cos}_q(u)}{\cos_q(u)\operatorname{Cos}_q(u)}\\ &= \frac{\operatorname{Sin}_q(u)\cos_q(u)}{\cos_q(u)\operatorname{Cos}_q(u)} = \frac{\operatorname{Sin}_q(u)}{\operatorname{Cos}_q(u)} = \operatorname{Tg}_q(u).\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'*une seule fonction* q-tangente.

Notre propos est de trouver une interprétation combinatoire pour les coefficients de la fonction q-tangente lorsqu'on développe celle-ci comme une q-série. On fait de même pour la q-*sécante* définie par $\sec_q(u) := 1/\cos_q(u)$.

La fonction q-tangente est par définition le rapport de deux q-séries. Son développement en q-série est noté :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}_q(u) = \frac{\sin_q(u)}{\cos_q(u)} &= \sum_{n\ge 0}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}} \Big/ \sum_{n\ge 0}(-1)^n \frac{u^{2n}}{(q;q)_{2n}}\\ &= \sum_{n\ge 0} D_{2n+1}(q)\frac{u^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}}.\end{aligned} \tag{12.1}$$

De même, on pose pour la q-sécante $\sec_q(u) = 1/\cos_q(u)$:

$$\sec_q(u) = \frac{1}{\cos_q(u)} = 1 \Big/ \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(q;q)_{2n}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} D_{2n}(q) \frac{u^{2n}}{(q;q)_{2n}}. \tag{12.2}$$

Il s'agit d'étudier les coefficients $D_n(q)$.

Pour obtenir des relations de récurrence sur les $D_n(q)$, il est plus commode de prendre dans les expressions de $\operatorname{tg}_q(u)$ et de $\sec_q(u)$ les q-exponentielles $e_q(iu)$ et $e_q(-iu)$ comme des produits infinis (*cf.* (1.21)). On obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}_q(u) &= \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{(iu;q)_\infty} - \frac{1}{(-iu;q)_\infty}\Big) \Big/ \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(iu;q)_\infty} + \frac{1}{(-iu;q)_\infty}\Big)\\ &= \frac{1}{i}\frac{(-iu;q)_\infty - (iu;q)_\infty}{(-iu;q)_\infty + (iu;q)_\infty}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sec_q(u) &= 2 \Big/ \Big(\frac{1}{(iu;q)_\infty} + \frac{1}{(-iu;q)_\infty}\Big)\\ &= 2\frac{(-iu;q)_\infty\,(iu;q)_\infty}{(-iu;q)_\infty + (iu;q)_\infty}.\end{aligned}$$

Evaluons $\operatorname{tg}_q(u) - \operatorname{tg}_q(qu)$, en posant $a = (-iuq;q)_\infty$ et $b = (iuq;q)_\infty$. On obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}_q(u) - \operatorname{tg}_q(qu) &= (-i)\Big[\frac{(1+iu)a - (1-iu)b}{(1+iu)a + (1-iu)b} - \frac{a-b}{a+b}\Big]\\ &= \frac{4abu}{(1+iu)a^2 + 2ab + (1-iu)b^2}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}_q(u)\ \operatorname{tg}_q(qu) &= -\frac{(1+iu)a - (1-iu)b}{(1+iu)a + (1-iu)b}\frac{a-b}{a+b}\\ &= -\frac{(1+iu)a^2 - 2ab + (1-iu)b^2}{(1+iu)a^2 + 2ab + (1-iu)b^2}\end{aligned}$$

Notant D le dernier dénominateur, on en tire :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}_q(u)\operatorname{tg}_q(qu) &= -1 + \frac{4ab}{D}\,;\\ u\operatorname{tg}_q(u)\operatorname{tg}_q(qu) &= -u + \frac{4abu}{D} = -u + \operatorname{tg}_q(u) - \operatorname{tg}_q(qu).\end{aligned}$$

D'où la relation :

$$\text{(12.3)}\qquad \mathrm{tg}_q(u) - \mathrm{tg}_q(qu) = u + u\,\mathrm{tg}_q(u)\,\mathrm{tg}_q(qu).$$

De la même façon, utilisant les mêmes notations, il vient :

$$\begin{aligned}\sec_q(u) - \sec_q(qu) &= 2\frac{(1+iu)a(1-iu)b}{(1+iu)a+(1-iu)b} - \frac{2ab}{a+b}\\ &= \frac{2uab}{D}(ua+ub-ia+ib)\,;\end{aligned}$$

tandis que :

$$\begin{aligned}\sec_q(u)\,\mathrm{tg}_q(u) &= \frac{2ab}{a+b}\,\frac{1}{i}\,\frac{(1+iu)a-(1-iu)b}{(1+iu)a+(1-iu)b}\\ &= \frac{2ab}{D}(-ia+ib+ua+ub).\end{aligned}$$

D'où la relation :

$$\text{(12.4)}\qquad \sec_q(u) - \sec_q(qu) = u\,\sec_q(qu)\,\mathrm{tg}_q(u).$$

Le développement en q-série de l'identité (12.3) donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} D_{2n+1}(q)\frac{(1-q^{2n+1})u^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}} &= u\sum_{n\geq 0} D_{2n+1}(q)\frac{u^{2n}}{(q;q)_{2n}}\\ &= u + u\Bigl(\sum_{k\geq 0} D_{2k+1}(q)\frac{q^{2k+1}u^{2k+1}}{(q;q)_{2k+1}}\Bigr)\Bigl(\sum_{j\geq 0} D_{2j+1}(q)\frac{u^{2j+1}}{(q;q)_{2j+1}}\Bigr).\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de u^{2n+1} dans les membres extrêmes de la dernière relation, on trouve, pour $n \geq 1$,

$$\text{(12.5)}\qquad D_{2n+1}(q) = \sum_{0\leq k\leq n-1} \begin{bmatrix}2n\\ 2k+1\end{bmatrix} q^{2k+1} D_{2k+1}(q)\,D_{2n-2k-1}(q),$$

où $\left[{N \atop M}\right]$ désigne le *polynôme gaussien* introduit au paragraphe 3.
De la même façon, on peut récrire (12.4) comme :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} D_{2n}(q)\frac{(1-q^{2n})u^{2n}}{(q;q)_{2n}} &= u\sum_{n\geq 1} D_{2n}(q)\frac{u^{2n-1}}{(q;q)_{2n-1}}\\ &= u\Bigl(\sum_{k\geq 0} D_{2k}(q)\frac{q^{2k}u^{2k}}{(q;q)_{2k}}\Bigr)\Bigl(\sum_{j\geq 0} D_{2j+1}(q)\frac{u^{2j+1}}{(q;q)_{2j+1}}\Bigr).\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de u^{2n} dans les membres extrêmes, on trouve, pour $n \geq 1$:

$$\text{(12.6)}\qquad D_{2n}(q) = \sum_{0\leq k\leq n-1} \begin{bmatrix}2n-1\\ 2k\end{bmatrix} q^{2k} D_{2k}(q)\,D_{2n-2k-1}(q).$$

On peut rassembler les deux formules (12.5) et (12.6) en une seule formule en écrivant pour tout $n \ge 1$:

$$D_n(q) = \sum_{0\le k\le \lfloor n/2\rfloor -1} \begin{bmatrix} n-1 \\ 2k+1 \end{bmatrix} q^{n-2k-2} D_{2k+1}(q)\, D_{n-2k-2}(q). \tag{12.7}$$

Comme $D_0(q) = D_1(q) = 1$, la formule (12.7) permet de déterminer tous les $D_n(q)$. Les premières valeurs sont données par :
$D_0(q) = D_1(q) = D_2(q) = 1$, $D_3(q) = q(1+q)$, $D_4(q) = q(q+1)^2 + q^4$,
$D_5(q) = q^2(1+q)^2(1+q^2)^2$,
$D_6(q) = q^2(q+1)^2(1+q^2+q^4)(1+q+q^2+2q^3) + q^{12}$.

Comme les polynômes gaussiens $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ sont des *polynômes* en q à coefficients entiers positifs, la relation (12.7) implique que les coefficients $D_n(q)$ sont eux aussi des polynômes, à coefficients entiers positifs. Quelles sont donc les structures finies qui les admettent comme polynômes générateurs par une certaine statistique ?

Nous avons vu, dans la Proposition 4.2, que le polynôme gaussien $\begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix}$ était le polynôme générateur de l'ensemble $MB(N,n)$ des mots contenant N fois 1 et n fois 0 par le nombre d'inversions. Si $w = x_1x_2\ldots x_{N+n}$ est un tel mot, notons $(i_1,\ldots,i_n)$ et $(j_1,\ldots,j_N)$ les suites strictement croissantes d'entiers telles que l'on ait : $x_{i_1} = \cdots = x_{i_n} = 0$ et $x_{j_1} = \cdots = x_{j_N} = 1$. Faisons alors correspondre au mot w la permutation

$$\sigma := i_1 \ldots i_n\, j_1 \ldots j_N,$$

qui débute donc par un facteur croissant de longueur n, suivi par un autre facteur croissant de longueur N. Les seules inversions de la permutation σ sont de la forme $i_k > j_l$ qui correspondent biunivoquement aux inversions $x_{j_l} = 1 > 0 = x_{i_k}$ dans le mot w. Nous avons donc prouvé le résultat suivant.

Proposition 12.1. — *Le polynôme gaussien* $\begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix}$ *est le polynôme générateur de l'ensemble des permutations* $\sigma \in \mathfrak{S}_{N+n}$ *dont les deux facteurs* $\sigma(1)\ldots\sigma(n)$ *et* $\sigma(n+1)\ldots\sigma(n+N)$ *sont croissants, par le nombre d'inversions.*

Définition. — On appelle permutation *alternante montante* (resp. *alternante descendante*) une permutation $\sigma = \sigma(1)\ldots\sigma(n)$ satisfaisant les inégalités :

$$\sigma(1) < \sigma(2),\ \sigma(2) > \sigma(3),\ \sigma(3) < \sigma(4), \text{ etc. en alternant}$$
$$(\text{resp. } \sigma(1) > \sigma(2),\ \sigma(2) < \sigma(3),\ \sigma(3) > \sigma(4), \text{ etc. en alternant}).$$

On note $\mathcal{DM}_n$ (resp. $\mathcal{D}_n$) l'ensemble des permutations alternantes montantes (resp. alternantes descendantes) d'ordre n.

Une des conséquences du théorème suivant est que le nombre des permutations alternantes montantes (resp. alternantes descendantes) d'ordre n est égal à $D_n(1)$. Se reportant à la table des polynômes $D_n(q)$ donnée précédemment, on voit que l'on a : $D_0(1) = D_1(1) = D_2(1) = 1$, $D_3(1) = 2$, $D_4(1) = 5$, $D_5(1) = 16$, $D_6(1) = 61$. Les nombres $D_{2n}(1)$ (resp. $D_{2n+1}(1)$) sont appelés *nombres tangents* (resp. *nombres sécants*) et feront l'objet d'une étude combinatoire approfondie dans le chapitre 3. Les polynômes $D_n(q)$ qui sont étudiés ici apparaissent comme les q-analogues de ces nombres.

Écrivons la table des permutations alternantes montantes pour $n = 1, 2, 3, 4$. On a successivement 1; $1, 2$; $1, 3, 2$; $2, 3, 1$; $1, 3, 2, 4$; $1, 4, 2, 3$; $2, 3, 1, 4$; $2, 4, 1, 3$; $3, 4, 1, 2$.

THÉORÈME 12.2. — *Pour tout $n \geq 0$, le polynôme $D_n(q)$ est la fonction génératrice des permutations alternantes montantes de longueur n par le nombre d'inversions. En d'autres termes,*

$$D_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{DM}_n} q^{\operatorname{inv} \sigma}.$$

Si n est impair, on a encore :

$$D_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} q^{\operatorname{inv} \sigma}.$$

Démonstration. — Le résultat est banal pour $n = 0$, 1 ou 2. Pour $n \geq 3$ considérons l'ensemble $S_{n,2k+2}$ des permutations alternantes montantes σ d'ordre n telles que n soit en $(2k+2)^{\text{ième}}$ position (i.e., $\sigma(2k+2) = n$). Une telle permutation est caractérisée par les deux sous-permutations alternantes montantes $\sigma' = \sigma(1) \ldots \sigma(2k+1)$ et $\sigma'' = \sigma(2k+3) \ldots \sigma(n)$, ne contenant pas n. Les inversions de σ se rangent en quatre catégories :

(a) celles qui correspondent à des couples de lettres dont la première est dans σ' et la seconde dans σ'' ; d'après la précédente proposition, leur polynôme générateur vaut $\left[{n-1 \atop 2k+1}\right]$;

(b) les $n - 2k - 2$ inversions formées par n et chacune des lettres de σ'' ;

(c) celles qui sont à l'intérieur de σ' ; par récurrence, leur polynôme générateur vaut $D_{2k+1}(q)$;

(d) celles qui sont à l'intérieur de σ'' ; leur polynôme générateur vaut $D_{n-2k-2}(q)$.

Le polynôme générateur de $S_{n,2k+2}$ est donc égal à

$$\sum_{\sigma \in S_{n,2k+2}} q^{\operatorname{inv} \sigma} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 2k+1 \end{bmatrix} q^{n-2k-2}\, D_{2k+1}(q)\, D_{n-2k-2}(q).$$

D'où l'on tire :

$$D_n(q) = \sum_{0\le k\le \lfloor n/2\rfloor -1} \begin{bmatrix} n-1 \\ 2k+1 \end{bmatrix} q^{n-2k-2}\, D_{2k+1}(q)\, D_{n-2k-2}(q),$$

qui est exactement la formule de récurrence (12.7).

Lorsque n est impair, la transformation **rc**, déjà utilisée, qui envoie la permutation σ sur la permutation $\mathbf{rc}\,\sigma$ définie par

$$\mathbf{rc}\,\sigma(i) := n+1-\sigma(n+1-i) \quad (1\le i\le n),$$

envoie bijectivement $\mathcal{DM}_n$ sur $\mathcal{D}_n$. De plus, elle *préserve* le nombre d'inversions "inv," ce qui démontre la seconde partie du Théorème. $\square$

Au paragraphe 5, par application du Théorème 10.2, nous avons vu que le produit de composition $\mathbf{i}\Phi\mathbf{i} : w \mapsto w_3$ avait la propriété : $\operatorname{Ligne} w = \operatorname{Ligne} w_3$ et $\operatorname{imaj} w = \operatorname{inv} w_3$. Or, dire qu'une permutation σ est alternante montante (resp. alternante descendante) équivaut à dire que l'on a $\operatorname{Ligne}\sigma = \{2,4,6,\dots\}$ (resp. $\operatorname{Ligne}\sigma = \{1,3,5,\dots\}$). Il s'ensuit que l'application $\mathbf{i}\Phi\mathbf{i}$ envoie la classe $\mathcal{DM}_n$ (resp. la classe $\mathcal{D}_n$) sur elle-même. On a donc prouvé le résultat suivant.

Proposition 12.3. — *Pour tout $n\ge 1$, on a :*

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{DM}_n} q^{\operatorname{inv}\sigma} = \sum_{\sigma\in\mathcal{DM}_n} q^{\operatorname{imaj}\sigma} \quad \textit{et} \quad \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} q^{\operatorname{inv}\sigma} = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} q^{\operatorname{imaj}\sigma}.$$

Exercices et compléments

1. *Polynômes de Rogers-Szegö.* — L'expression $\exp(xu)\exp(u)$ est la fonction génératrice exponentielle de polynômes $H_n(x)$. Donner leur expression.

De même, le produit des deux premières q-exponentielles $e_q(xu)\,e_q(u)$ est la q-fonction génératrice de polynômes $H_n(x,q)$. Lesquels ? Ces polynômes sont appelés polynômes de Rogers-Szegö.

On a $H_{2n+1}(-1,q)=0$ et $H_{2n}(-1;q)=(q;q^2)_n$, puis $H_n(q^{1/2},q)=(-q^{1/2};q^{1/2})_n$ et enfin la formule de récurrence :

$$H_{n+1}(x,q)=(1+x)H_n(x,q)-(1-q^n)x\,H_{n-1}(x,q).$$

2. *La somme de Ramanujan.* — Cette somme s'écrit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}u^n=\frac{(au;q)_\infty\,(qa^{-1}u^{-1};q)_\infty\,(q;q)_\infty\,(ba^{-1};q)_\infty}{(u;q)_\infty\,(ba^{-1}u^{-1};q)_\infty\,(b;q)_\infty\,(qa^{-1};q)_\infty}.$$

Notons que la somme de gauche est la donnée pour tout $n\in\mathbb{Z}$ d'une série formelle en la variable q. On ne peut considérer d'*algèbre* de séries formelles qui auraient une infinité de coefficients non nuls à la fois pour les puissances de u positives et négatives. On ne pourrait, en effet, définir de multiplication. On voit dans la démonstration de cette identité qu'il n'y a aucune ambiguïté dans la définition du second membre. On considère d'abord la somme

$$h(b)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(bq^n;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}u^n=\frac{(b;q)_\infty}{(a;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}u^n.$$

En utilisant l'identité banale $(bq^n;q)_\infty=(1-bq^n)(bq^{n+1};q)_\infty$ on établit la q-récurrence

$$h(b)=(1-ba^{-1})\,h(bq)+ba^{-1}u^{-1}\,h(b),$$

et par itération

$$h(b)=h(bq^n)\frac{(ba^{-1};q)_n}{(ba^{-1}u^{-1};q)_n}$$

pour tout $n\ge 0$. Dès que $n\ge j+1$ cette dernière identité implique que le coefficient de $u^i q^j$ dans

$$h(bq^n)\frac{(ba^{-1};q)_n}{(ba^{-1}u^{-1};q)_n} \quad \text{et dans} \quad h(0)\frac{(ba^{-1};q)_\infty}{(ba^{-1}u^{-1};q)_\infty}$$

sont identiques. On a donc $h(b) = h(0)(ba^{-1};q)_\infty/(ba^{-1}u^{-1};q)_\infty$ et aussi $h(q) = h(0)(qa^{-1};q)_\infty/(qa^{-1}u^{-1};q)_\infty$. Par ailleurs, se reportant à la définition initiale de $h(b)$ initiale et en utilisant le théàrème q-binomial on obtient

$$h(q) = \frac{(q;q)_\infty\,(au;q)_\infty}{(a;q)_\infty\,(u;q)_\infty}.$$

En combinant ces trois dernières formules de façon évidente, on obtient bien la somme de Ramanujan.

3. — Ecrire les trois programmes `InvCod, MajCod, DenCod` qui permettent d'associer à toute permutation σ son inv-codage, son maj-codage, son den-codage, respectivement. Donner aussi les programmes des *inverses* de ces trois transformations qu'on note `CodInv, CodMaj, CodDen`.

4. — Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le inv-codage d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Posant $x_{n+1} = \sigma(n+1) = 0$ on définit une suite $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ par $y_i := x_i - x_{i+1} + i\,\chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors ta suite y est sous-excédante, l'application $x \mapsto y$ est bijective, puis $\operatorname{tot} y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ est égal à $\operatorname{maj} \sigma$. Soit σ' la permutation dont le inv-codage est y. Alors $\sigma \mapsto \sigma'$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même satisfaisant $\operatorname{maj} \sigma = \operatorname{inv} \sigma'$.

5. — Calculer le inv-codage et le maj-codage de $\sigma = 259478361$. En déduire le nombre d'inversions et l'indice majeur de σ.

6. — Trouver les permutations ayant respectivement pour inv-codage et maj-codage la suite sous-excédante $x = 001304645$.

7. — Soit $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ une permutation. Posant $\sigma(n+1) = +\infty$, on définit une suite $z = z_1 z_2 \cdots z_n$ par

$$z_i := \#\{1 \le j < i \mid \sigma(j) \in \rrbracket\sigma(i), \sigma(i+1)\rrbracket\}.$$

(a) Montrer que z est une suite sous-excédante.

(b) Calculer la suite z correspondant à $\sigma = 259478361$.

(c) Montrer que cette transformation $\sigma \mapsto z$ est inversible. Trouver l'inverse de $z = 001304645$.

(d) Soient $x = x_1x_2\cdots x_n$ le inv-codage de σ et $x_{n+1} = 0$. Établir l'identité suivante :

$$z_i = x_i - x_{i+1} + i\chi(\sigma_i > \sigma_{i+1}).$$

(e) Montrer que $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \operatorname{maj}\sigma$. La transformation $\sigma \mapsto y$ définit ainsi un autre maj-codage.

8. — Pour une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$. On définit une suite $y = y_1y_2\cdots y_n$ par $y_i = (i-1)\chi(\sigma(i-1) > \sigma(i))$. Montrer que cette transformation $\sigma \mapsto y$ ne définit pas un maj-codage.

9. — Considérons q comme la puissance d'un nombre premier et notons $\mathbb{F}_q$ le corps ayant q éléments. Le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension n de l'espace vectoriel ${\mathbb{F}_q}^{N+n}$ est égal à $\left[{N+n \atop n}\right]$. On vérifie d'abord que le nombre d'ensembles $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de n vecteurs v_1, v_2, … , v_n de ${\mathbb{F}_q}^{N+n}$ qui sont linéairement indépendants est égal à $q^{(N+n)(N+n-1)/2}(q^{N+n}-1)(q^{N+n-1}-1)\cdots(q^{N+1}-1)$, ensuite que le nombre de tels ensembles qui engendrent un sous-espace vectoriel donné de dimension n dans ${\mathbb{F}_q}^{N+n}$ vaut $q^{n(n-1)/2}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)$.

10. — Établir (3.9) et (3.10) en utilisant les formules du triangle (3.5) et (3.6).

11. — Établir (3.15) en utilisant une formules du triangle (3.5) ou (3.6).

12. — Établir (3.17) en utilisant une formule du triangle (3.5) ou (3.6).

13. — L'interprétation des coefficients q-binomiaux en termes des partitions d'entiers (*cf.* (3.14)) permet d'établir les identités suivantes.

(a) En classant les partitions en au plus n parts toutes au plus égales à N, suivant la taille de la $n^{\text{ième}}$ plus petite part (éventuellement 0), on obtient l'identité :

$$\sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} N-j+n-1 \\ N-j \end{bmatrix} q^{jn} = \begin{bmatrix} N+n \\ N \end{bmatrix}.$$

(b) On a aussi l'identité :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m-1+N-j \\ N-j \end{bmatrix} q^{jm} &= \begin{bmatrix} m+n+N \\ N \end{bmatrix} \\ &= (-1)^N q^{N(n+m)+N(N+1)/2} \begin{bmatrix} -m-n-1 \\ N \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

14. *Les nombres eulériens* . — Les *nombres eulériens*, notés $A_{n,k}$, sont définis par la relation de récurrence :

$$(14.1)\quad A_{n,k} = (k+1)A_{n-1,k} + (n-k)A_{n-1,k-1} \quad (1 \le k \le n-1)\,;$$
$$A_{n,0} = 1 \quad (n \ge 0)\,; \qquad A_{n,k} = 0 \quad (k \ge n).$$

Les premières valeurs sont données dans le tableau suivant :

k=	0	1	2	3	4	5	6
n=1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

(a) Pour tout $n \ge 0$ on a $\sum_{k\ge 0} A_{n,k} = n!$ et

$$(14.2)\qquad A_{n,k} = A_{n,n-1-k}.$$

(b) Le nombre de descentes, $\operatorname{des}\sigma$, d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\ldots\sigma(n)$ est défini (*cf.* § 15.3, chap. 1) comme le nombre d'indices j tels que $1 \le j \le n-1$ et $\sigma(j) > \sigma(j+1)$. Pour tout $k, n \ge 0$ le nombre $A_{n,k}$ est égal au nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k descentes.

(c) Le polynôme eulérien $A_n(t)$ introduit dans § 15.3, chap. 1, est de la forme $A_n(t) = \sum_{0\le k\le n-1} A_{n,k}t^k$.

15. *Polynômes eulériens, version analytique* . — On considère la suite $(A_n(t))$ $(n \ge 0)$ des séries formelles en la variable t (elle s'avèreront être des *polynômes*, et en fait les polynômes eulériens) définie par

$$(15.1)\qquad \frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} := \sum_{j\ge 0} t^j\,(j+1)^n.$$

(a) Si D désigne l'opérateur-dérivée des séries formelles, on a l'identité :

$$(15.2)\qquad A_n(t) = (1+(n-1)t)A_{n-1}(t) + t(1-t).DA_{n-1}(t) \quad (n \ge 1).$$

(b) Pour $n \ge 0$, on pose $A_n(t) = \sum_{k\ge 0} A_{n,k}t^k$. Alors pour tout $n \ge 0$ on a $A_{n,0} = 1$, puis $A_{0,k} = 0$ pour tout $k \ge 1$, enfin pour $k, n \ge 1$ la relation de récurrence : $A_{n,k} = (k+1)A_{n-1,k} + (n-k)A_{n-1,k-1}$. Ainsi la formule (15.1) constitue une autre *définition* des polynômes eulériens.

(c) La définition $A_n(t) = \sum_{k\ge 0} A_{n,k}t^k$ et l'identité (15.1) impliquent la formule :

$$A_{n,k} = \sum_{0\le i\le k} (-1)^i (k-i+1)^n \binom{n+1}{i}. \tag{15.3}$$

(d) L'"inverse" de (15.3) est la formule dite *de Worpitzky* donnée par :

$$x^n = \sum_{0\le k\le n-1} \binom{x+k}{n} A_{n,k}. \tag{15.4}$$

[Partir du développement de $A_n(t)(1-t)^{-(n+1)}$, puis utiliser (14.2) et (15.4) pour retrouver (15.1).]

(e) La fonction génératrice exponentielle (*cf.* exercices 33 et 34 du chap. 1) des polynômes eulériens, à savoir

$$\sum_{n\ge 0} A_n(t)\frac{u^n}{n!} = \frac{(1-t)}{\exp(u(t-1))-t}, \tag{15.5}$$

se déduit immédiatement de l'identité (15.1).

16. *Coefficients q-eulériens.* — En (2.3) on a défini le q-analogue d'un entier n comme étant le polynôme $[n]_q := 1+q+\cdots+q^{n-1}$ et dans (2.4) la q-factorielle de n comme étant $[n]!_q := [n]_q\,[n-1]_q \cdots [1]_q$. On définit alors le *$q$-analogue* des nombres eulériens $A_{n,k}$, introduits en (14.1) dans l'exercice 14, comme étant les polynômes $A_{n,k}(q)$ définis par la récurrence :

$$A_{n,k}(q) = [k+1]_q\, A^{n-1}_{n-1,k}(q) + q^k\,[n-k]_q\, A_{n-1,k-1}(q), \tag{16.1}$$

pour $1 \le k \le r-1$ avec les conditions initiales $A_{r,0}(q) = 1$ pour tout $n \ge 0$ et $A_{n,k}(q) = 0$ for $k \ge n$. Les premières valeurs de ces polynômes $A_{n,k}(q)$ peuvent être lues dans la Table 3.

$k=$	0	1	2	3
$n=0$	1			
1	1			
2	1	q		
3	1	$2q+2q^2$	q^3	
4	1	$3q+5q^2+3q^3$	$3q^3+5q^4+3q^5$	q^6

Table 3

Le polynôme $A_n(t,q) = \sum\limits_{k\ge 0} A_{n,k} t^k$ en les deux variables t, q est appelé *polynôme q-eulérien* ou *polynôme euler-mahonien.*

Soit $E = (E_n)$ $(n \ge 0)$ une famille d'ensembles finis telle que card $E_n = n!$ pour tout $n \ge 0$. Toute famille $(f,g) = (f_n, g_n)$ $(n \ge 0)$ est dite *euler-mahonienne* sur E, si $f_0 = g_0 = 0$, $f_1 = g_1 = 1$ et si pour tout $n \ge 2$ à la fois f_n et g_n sont définis sur E_n, à valeurs entières et s'il existe une bijection $\psi_n : (w', j) \mapsto w$ de $E_{n-1} \times [0, n-1]$ sur E_n ayant les propriétés :

$$g_n(w) = g_{n-1}(w') + j;$$
$$f_n(w) = \begin{cases} f_{n-1}(w'), & \text{if } 0 \le j \le f_{n-1}(w')\,; \\ f_{n-1}(w') + 1, & \text{if } f_{n-1}(w) + 1 \le j \le n-1. \end{cases} \tag{$*$}$$

Chaque couple (f_n, g_n) est dite statistique *euler-mahonienne* sur E_n.

(a) Soit (f,g) une famille euler-mahonienne sur E et pour tout triplet (n,k,l) soit $A_{n,k,l}$ le nombre d'éléments $w \in E_n$ tels que $f_n(w) = l$ et $g_n(w) = k$. Posons $A_{n,k}(q) = \sum_l A_{n,k,l}\, q^l$. Alors $(A_{n,k}(q))$ satisfait la récurrence (16.1).

(b) Sur l'ensemble SE_n des suites sous-excédantes (voir § 2), en plus de la statistique "tot", on définit la *valeur eulérienne* "$\mathrm{eul}\, x$" d'une suite $x = (x_1, \ldots, x_n) \in SE_n$ par $\mathrm{eul}\, x = 0$ si x est de longueur 1 et pour $n \ge 2$

$$\mathrm{eul}\, x := \begin{cases} \mathrm{eul}(x_1, \ldots, x_{n-1}), & \text{si } x_n \le \mathrm{eul}(x_1, \ldots, x_{n-1})\,; \\ \mathrm{eul}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 1, & \text{si } x_n \ge \mathrm{eul}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 1. \end{cases}$$

Alors le couple $(\mathrm{tot}, \mathrm{eul})$ est une statistique euler-mahonienne sur SE_n pour tout $n \ge 0$.

(c) En utilisant le maj-codage, tel qu'il a été défini dans § 2.2, on montre que le couple $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$ est une statistique euler-mahonienne sur chaque groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$.

(d) Soit $n \ge 2$ et soit $\sigma' = \sigma'(1) \ldots \sigma'(n-1)$ une permutation ayant k excédances (voir § 15.3 du chap. 1). Soit $(x_{i_1} > \cdots > x_{i_k})$ la suite *décroissante* des valeurs d'excédances $\sigma'(l) > l$ et soit $(x_{i_{k+1}} < \cdots < x_{i_{n-1}})$ la suite *croissante* des valeurs de non-excédance $\sigma'(l) \le l$. Par convention, $x_{i_0} := n$.

Définissons $\psi_n(w, 0) = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} n$. Si $1 \le j \le k$ (resp. $k+1 \le j \le n-1$), on remplace chaque lettre x_{i_m} dans σ' telle que $1 \le m \le j$ (resp. telle que $1 \le m \le k$) par $x_{i_{m-1}}$, on laisse les autres lettres invariantes et on insère x_{i_j} (resp. x_{i_k}) à la ${i_j}^{\text{ième}}$ place dans σ'. Soit $\sigma = \psi_n(\sigma', j)$ la permutation ainsi obtenue.

Par exemple, $\sigma' = 3\,2\,5\,4\,1$ a $k = 2$ excédances $x_3 = 5 > 3$, $x_1 = 3 > 1$ (en ordre décroissant) et trois non-excédances $x_5 = 1 \le 5$, $x_2 = 2 \le 2$, $x_4 = 4 \le 4$ (en ordre croissant), de sorte que $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (3, 1, 5, 2, 4)$. Avec $j = 1$ on a $i_j = 3$ et $x_3 = 5$. Pour obtenir $\psi_6(\sigma', 1)$ on remplace $x_{i_1} = 5$ par $x_{i_0} = 6$, on laisse les autres lettres invariantes et on insère $x_{i_1} = 5$ à la ${i_1}^{\text{ième}}$=$3^{\text{ième}}$ place. Ainsi $\psi_6(\sigma', 1) = 3\,2\,5\,6\,4\,1$. Pour $j = 3$ on a $i_j = 5$ et $x_5 = 1$. Comme $j = 3 > k = 2$, on remplace $x_{i_1} = x_3$ par $x_{i_0} = 6$, puis $x_{i_2} = x_1 = 3$ par $x_{i_1} = 5$, on laisse les autres lettres invariantes et on insère $x_{i_k} = x_{i_2} = x_1 = 3$ à la ${i_3}^{\text{ième}}$=$5^{\text{ième}}$ place pour obtenir $\psi_6(\sigma', 3) = 5\,2\,6\,4\,3\,1$.

Avec $(f, g) = (\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ (voir § 2) ψ_n a les propriétés $(*)$, de sorte que $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ est une statistique euler-mahonienne sur chaque groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$.

(e) Soit (f, g) une famille euler-mahonienne sur $E = (E_n)$. Pour chaque $w \in E_n$ $(n \ge 2)$ soit $\psi_n^{-1}(w) = (w', j_r)$, $\psi_{r-1}^{-1}(w') = (w'', j_{r-1})$, … , $\psi_2^{-1}(w^{(r-2)}) = (w^{(r-1)}, j_2)$ et $j_1 = 0$; la suite $\Psi(w) := (j_1, j_2, \dots, j_{r-1}, j_r)$ est sous-excédante et Ψ est une bijection de E_n sur SE_n telle que $f(w) = \mathrm{tot}\,\Psi(w)$ et $g(w) = \mathrm{eul}\,\Psi(w)$. La bijection Ψ est dite un (f, g)-*codage* E_r.

Soit $\Psi_{(\mathrm{des},\mathrm{maj})}$ (resp. $\Psi_{(\mathrm{exc},\mathrm{den})}$) le $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$-codage (voir question (c))) (resp. le $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$-codage (voir question (d)) de $\mathfrak{S}_n$. Alors $\Theta = \Psi^{-1}_{(\mathrm{des},\mathrm{maj})} \circ \Psi_{(\mathrm{exc},\mathrm{den})}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même satisfaisant $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})\, w = (\mathrm{des}, \mathrm{maj})\, \Theta(w)$.

17. — On note toujours $MB(N, n)$ l'ensemble des mots de longueur $(N + n)$ contenant exactement N fois 1 et n fois 0. Si $x = x_1 x_2 \dots x_{N+n}$ est un tel mot, on définit

$$\mathrm{des}'\, x := \sum_{1 \le i \le N+n-1} \chi(x_i < x_{i+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{maj}'\, x := \sum_{1 \le i \le N+n-1} i\, \chi(x_i < x_{i+1}).$$

On pose ensuite $\mathrm{DES}\, x := \mathrm{des}\, x + \mathrm{des}'\, x$ et $\mathrm{MAJ}\, x := \mathrm{maj}\, x + \mathrm{maj}'\, x$.

(a) Pour chacun des dix mots de la classe $MB(2, 3)$ écrire dans un tableau la valeur des six statistiques “des”, “maj”, “des′”, “maj”, “DES”, “MAJ”.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{x \in MB(N,n)} q^{\mathrm{maj}'\, x} = \begin{bmatrix} N + n \\ n \end{bmatrix}$.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{x \in MB(N,n)} t^{\mathrm{des}'\, x} q^{\mathrm{maj}'\, x} = \sum_{x \in MB(N,n)} t^{\mathrm{des}\, x} q^{\mathrm{maj}\, x}$.

(d) Soit $x \in MB(N, n)$. On pose $x' := x_1 x_2 \cdots x_{N+n-1}$. Montrer que

$$\begin{cases} \mathrm{maj}\, x = \mathrm{maj}'\, x + N = \mathrm{maj}'\, x' + N, & \text{si } x_{N+n} = 1\,; \\ \mathrm{maj}'\, x = \mathrm{maj}\, x + n = \mathrm{maj}\, x' + n, & \text{si } x_{N+n} = 0. \end{cases}$$

(e) Établir l'identité suivante :

$$\sum_{x\in MB(N,n)} q^{\mathrm{MAJ}\,x} = \begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix}_{q^2} \frac{q^N+q^n}{1+q^{N+n}}.$$

18. — Cet exercice est consacré à l'étude d'une nouvelle statistique sur les mots, appelée la Z-statistique. Le but de l'exercice est de démontrer qu'elle est aussi mahonienne. Dans la construction proposée ci-après, on distingue deux transformations essentielles, le *cyclage global* pour la manipulation de l'indice majeur et le *cyclage local* pour le traitement de la Z-statistique

(a) Soient $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ une multiciplicité et $R(\mathbf{m})$ la classe de tous les réarrangements du mot $1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}$. On note $\mathbf{n}$ un réarrangement de $\mathbf{m}$ vu comme un mot. Construire une bijection $\theta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, définie sur $R(\mathbf{m})$, à valeurs dans $R(\mathbf{n})$, conservant la statistique "maj". [Il suffit de donner cette construction lorsque $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ ne diffèrent que par deux lettres *consécutives*, disons x et $y = x+1$, autrement dit la construction d'une bijection θ de $R(m_1, \ldots, m_x, m_y, \ldots, m_r)$ sur $R(m_1, \ldots, m_y, m_x, \ldots, m_r)$.]

(b) La Z-statistique est définie, pour tout mot $w = x_1x_2\ldots x_m$, par

$$Z(w) := \sum_{i<j} \operatorname{maj} w_{ij},$$

où w_{ij} est le sous-mot de w composé de toutes les lettres i et j. Par exemple, pour le mot $w = 2412131242$, il faut considérer les mots $w_{12} = 2121122$, $w_{13} = 1131$, … , calculer leurs indices majeurs et en faire la somme. Calculer $Z(2412131242)$.

(c) Pour tout mot $w = x_1x_2\cdots x_m$ de la classe $R(\mathbf{m})$ et toute lettre $x = 1, 2\ldots, r$, le *cyclage global* $\mathrm{gcyc}_x(w) = y_1y_2\cdots y_m$ et le *cyclage local* $\mathrm{lcyc}_x(w) = z_1z_2\cdots z_m$ sont définis par :

$$y_i := \begin{cases} x_i - x, & \text{si } x_i > x\,; \\ x_i - x + r, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad z_i := \begin{cases} x_i, & \text{si } x_i < x\,; \\ x_i - 1, & \text{si } x_i > x\,; \\ r, & \text{si } x_i = x. \end{cases}$$

On note $\mathbf{m}^x$ la multiplicité de $\mathrm{gcyc}_x(w)$ et $\mathbf{m}_x$ celle de $\mathrm{lcyc}_x(w)$. Caractériser ces deux multiplicités, c'est-à-dire exprimer $\mathbf{m}^x$ et $\mathbf{m}_x$ comme des réarrangements bien définis de la suite $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$.

(d) Pour le mot $w = 2412131242$, calculer les différences $\operatorname{maj} w - \operatorname{maj} \mathrm{gcyc}_2(w)$ et $Z(w) - Z(\mathrm{lcyc}_2(w))$.

(e) Si $x = x_m$ est la dernière lettre du mot w, montrer que

$$\operatorname{maj} w - \operatorname{maj}(\operatorname{gcyc}_x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r.$$

(f) Si $x = x_m$ est la dernière lettre du mot w, montrer que

$$Z(w) - Z(\operatorname{lcyc}_x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r.$$

(g) Construire une bijection de $R(\mathbf{m})$ sur elle-même ayant la propriété :

$$\operatorname{maj} w = Z(\Phi(w)),$$

prouvant ainsi que la Z-statistique est mahonienne.

19. (*Le lemme $t = 1$*). — Soit (b_r) $(r \geq 0)$ une suite de séries formelles appartenant à une algèbre $\mathfrak{A}$ de séries formelles à une ou plusieurs variables. On peut toujours former la série $b(t) := \sum_{r\geq 0} b_r t^r$ appartenant à l'algèbre $\mathfrak{A}[[t]]$, où t est une nouvelle variable. “Faire $t = 1$” dans $b(t)$ n'a pas toujours de sens. En revanche, si la série $\sum_r b_r$ est convergente pour la topologie des séries formelles dans $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathfrak{A}$ telle que $o((b_0 + b_1 + \cdots + b_r) - a)$ tend vers $+\infty$ avec r, on *définit* “faire $t = 1$ dans $b(t)$” et donc $b(1)$ par : $b(1) := a = \sum\limits_{r\geq 0} b_r$.

(a) Soit (a_r) $r \geq 0)$ une suite de séries formelles dans $\mathfrak{A}$ telle que $\lim_r a_r = a$, c'est-à-dire telle que $o(a - a_r)$ tend vers l'infini avec r. On définit : $b(t) := (1-t) \cdot \sum\limits_{r\geq 0} a_r\, t^r$. Alors $b(1) = a$.

(b) Déduire (4.22) de (4.23).

(c) Déduire (6.7) de (6.20).

20. — Sur le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations d'ordre n on définit trois transformations $\mathbf{i}$, $\mathbf{r}$ et $\mathbf{c}$ de la façon suivante. D'abord $\mathbf{i}$ est la bijection qui envoie toute permutation σ sur son *inverse* σ^{-1}. Notons σ comme le mot linéaire $\sigma = \sigma(1)\ldots\sigma(n)$. On pose alors

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c}\,\sigma := (n+1-\sigma(1))(n+1-\sigma(2))\ldots(n+1-\sigma(n);\\
&\mathbf{r}\,\sigma := \sigma(n)\ \ldots\ \sigma(2)\sigma(1).
\end{aligned}$$

On dit que $\mathbf{c}$ est le *complément à* $(n+1)$ et $\mathbf{r}$ le *retournement*.

(a) On a la propriété $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,\mathbf{c}\,\mathbf{i}$.

(b) Le groupe des transformations sur $\mathfrak{S}_n$ engendré par $\{\mathbf{i}, \mathbf{c}\}$ est isomorphe au groupe diédral D_4 d'ordre 8 des rotations du carré.

(c) On a les relations : $\mathbf{r}\,\mathbf{c} = \mathbf{c}\,\mathbf{r}$, $\mathbf{i}\,\mathbf{r} = \mathbf{c}\,\mathbf{i}$ et $\mathbf{i}\,\mathbf{r}\,\mathbf{c} = \mathbf{r}\,\mathbf{c}\,\mathbf{i}$.

(d) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a les relations : $\operatorname{Ligne} \mathbf{c}\,\sigma = [n-1] \setminus \operatorname{Ligne} \sigma$ et $\operatorname{Ligne} \mathbf{r}\,\mathbf{c}\,\sigma = n - \operatorname{Ligne} \sigma = \{n - i : i \in \operatorname{Ligne} \sigma\}$.

21. — Dans cet exercice, il s'agit d'étudier la divisibilité des polynômes $D_{2n+1}(q)$ $(n \geq 0)$, les coefficients de la q-tangente. Tout nombre entier positif $n \geq 1$ peut s'écrire $n = m2^l$, où m est impair et $l \geq 0$. On pose $Ev_n(q) := \prod_{0 \leq j \leq l} (1 + q^{m2^j})$ et on définit :

$$F_n(q) := \begin{cases} \prod_{1 \leq i \leq n} Ev_i(q), & \text{si } n \text{ est impair}\,; \\ (1+q^2) \prod_{1 \leq i \leq n} Ev_i(q), & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

De façon équivalente, soit $Ev_0(q) = F_0(q) := 1$, $F_1(q) := 1 + q$, $F_2(q) := (1+q)^2(1+q^2)^2$ et $F_n(q) := F_{n-2}(q)\, Ev_{n-1}(q)\, Ev_n(q)$ pour $n \geq 3$. On pose : $F_n(q) := \prod_{1 \leq i \leq n} (1+q)^{a(n,i)}$.

(a) Dresser la table des coefficients $a(n,i)$ $(1 \leq i \leq n)$ pour $1 \leq n \leq 8$.

(b) Pour $i \geq 1$ soit $\phi_i(q)$ le $i^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique avec $\phi_1(q) = 1 - q$, de sorte que l'on a : $1 - q^i = \prod_{d \,|\, i} \phi_d(q)$. Pour $n = m2^l$ (m impair, $l \geq 0$) et $j = 0, 1, \ldots, l$ on pose

$$A_j := \{d : d \,|\, m2^{j+1},\ d \nmid m2^j\}, \quad B := \{d : d \,|\, m2^{l+1},\ d \text{ pair}\}.$$

Montrer que : $1 + q^{m2^j} = \prod_{d \in A_j} \phi_d(q) \quad (0 \leq j \leq l)$.

(c) Montrer que : $Ev_n(q) = \prod_d \phi_d(q) \quad (d \,|\, 2n,\ d \text{ even})$.

(d) Pour chaque $n \geq 1$ on pose : $Od_n(q) := \prod_d \phi_d(q) \quad (d \,|\, 2n,\ d \text{ impair})$.

Montrer que $\begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix} \dfrac{Ev_0(q)\, Ev_1(q)\, \ldots\, Ev_k(q)}{Ev_{n-k}(q)\, Ev_{n-k+1}(q)\, \ldots\, Ev_n(q)}$ est un polynôme en q.

(e) Montrer que $F_n(q)$ divise $D_{2n+1}(q)$.

22. — Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide d'un argument combinatoire, qu'on a la congruence

$$D_{2n}(q) \equiv q^{2n(n-1)} \bmod (q+1)^2.$$

(a) Soit $1 \leq i \leq 2n-1$. On dit qu'une permutation alternante montante $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ est *i-balancée* si ce mot σ contient le facteur $i\,(i+1)$, ou si $(i+1)$ se trouve à la gauche de i dans σ. Par exemple, la permutation $\sigma = 2\,6\,3\,4\,1\,5$ est i-balancée seulement pour $i = 1, 3, 5$.

Si σ est i-balancée pour chaque $i = 1, 2, \ldots, (2n-1)$, on dit simplement qu'elle est *balancée*.

La permutation $(2n-1)\,2n\,(2n-3)\,(2n-2)\ldots 3\,4\,1\,2$ est la seule permutation alternante montante balancée.

(b) Soit σ une permutation alternante montante non-balancée. On désigne par i le plus grand entier pour lequel σ n'est pas i-balancée. Alors σ est nécessairement de la forme $\sigma = w\,i\,w'\,(i+1)w''$, où w' est un facteur non-vide. L'application Φ définie par $\Phi(\sigma) := w\,(i+1)\,w'\,i\,w''$ est encore alternante montante et a une inversion de plus que σ.

(c) Le polynôme $D_{2n}(q)$ est unitaire de degré $2n(n-1)$.

(d) Pour $n \ge 2$ notons A_{2n} (resp. B_{2n}) l'ensemble de toutes les permutations alternantes montantes de longueur $2n$ débutant par le facteur $(2n-1)\,2n$ (resp. finissant par $1\,2$). Par récurrence sur n on a :

$$\sum_{\sigma\in A_{2n}\cup B_{2n}} q^{\operatorname{inv}\sigma} \equiv q^{2n(n-1)} \bmod (q+1)^2.$$

(e) Soit E_{2n} le complémentaire de $A_{2n}\cup B_{2n}$. Alors

$$\sum_{\sigma\in E_{2n}} q^{\operatorname{inv}\sigma} \equiv 0 \bmod (q+1)^2.$$

23. — Établir les deux identités :

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \begin{bmatrix}\alpha-j+\beta-1\\ \alpha-j\end{bmatrix} q^{j\beta} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha\end{bmatrix};$$

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \begin{bmatrix}\beta+j\\ j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma-1+\alpha-j\\ \alpha-j\end{bmatrix} q^{j\gamma} = \begin{bmatrix}\gamma+\beta+\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$$
$$= (-1)^{\alpha} q^{\alpha(\beta+\gamma)+\alpha(\alpha+1)/2}\begin{bmatrix}-\gamma-\beta-1\\ \alpha\end{bmatrix}.$$

combinatoirement, se rappelant que$\left[{m+n \atop n}\right]$ est la fonction génératrice des partitions en au plus m parts toutes au plus égales à n. Représenter les partitions sous-jacentes par leurs diagrammes de Ferrers contenus dans un rectangle de dimensions m et n,

24. — (a) Démontrer les identités suivantes :

$$\begin{aligned}(aq^{-n};q)_n &= (-a)^n q^{\binom{n+1}{2}}(q/a;q)_n;\\ (a;q)_{n+k} &= (a;q)_n(aq^n;q)_k;\\ (a;q)_{2n} &= (a;q^2)_n(aq;q^2)_n;\\ (a^2;q^2)_n &= (a;q)_n(-a;q)_n.\end{aligned}$$

(b) Trouver un q-analogue de la formule

$$(1-z)^{-a}(1-z)^{-b} = (1-z)^{-a-b}.$$

(c) Démontrer la formule du triple produit de Jacobi

$$(zq^{1/2};q)_\infty(z^{-1}q^{1/2};q)_\infty(q;q)_\infty = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}(-1)^\alpha q^{\alpha^2/2}z^\alpha$$

en utilisant la formule de Heine III :

$${}_2\phi_1\Big(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};q;c/ab\Big) = \frac{(c/a;q)_\infty(c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty(c/ab;q)_\infty}.$$

25. *Pfaffiens.* — Soit n un entier pair. On note S_n l'ensemble des permutations d'ordre n et C_n le sous-ensemble des *parfaits couplages*, à savoir les permutations $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ telles que $\sigma_1 < \sigma_2, \ldots , \sigma_{n-1} < \sigma_n$ et $\sigma_1 < \sigma_3 < \cdots < \sigma_{n-1}$. Soit $A = ((a_{i,j})_{1\le i,j\le n})$ une matrice. On définit le *pfaffien* de A comme étant la quantité :

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\sigma\in C_n}\epsilon(\sigma)a_{\sigma_1,\sigma_2}a_{\sigma_3,\sigma_4}\cdots a_{\sigma_{n-1},\sigma_n}.$$

(a) Le cardinal de C_n est égal à $\#C_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-3)(n-1)$.

(b) Si tous les coefficients $a_{i,j}$ sont égaux à 1, alors la valeur du Pfaffien est 1.

(c) Soit $A = ((a_{i,j})_{1\le i,j\le n})$ une matrice anti-symétrique, i.e., $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout couple (i,j). On pose $\mathrm{NE}(\sigma) = \#\{i \mid 1\le i\le n, \sigma_i < i\}$ et $b_{i,j} = a_{\min(i,j),\max(i,j)}$. Montrer que l'on a

$$a_{1,\sigma_1}a_{2,\sigma_2}\cdots a_{n,\sigma_n} = (-1)^{\mathrm{NE}(\sigma)}b_{1,\sigma_1}b_{2,\sigma_2}\cdots b_{n,\sigma_n}$$

et établir l'identité : $\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2$.

26. *q-intégration et q-dérivation.* — On suppose que q est un nombre en module inférieur à 1. La *q-intégrale* d'une fonction réelle f entre 0 et a est définie comme la somme

$$\int_0^a f(x)d(q,x) := \sum_{i=0}^{\infty} f(aq^i)(aq^i - aq^{i+1}) = a(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} f(aq^i)q^i$$

et la *q-dérivée* de f comme

$$D_q f(x) := \frac{f(x)-f(xq)}{x-xq}.$$

Enfin l'opérateur T_q est défini par $T_q f(x) := f(qx)$.

(a) Montrer que la q-intégrale de f sur $[0,a]$ tend vers l'intégrale de f ordinaire, lorsque q tend vers 1.

(b) Montrer que l'on a $D_q \int\limits_0^x f(t)d(q,t) = f(x)$. En posant

$$\int_a^b D_q f(x)d(q,x) := \int_0^b D_q f(x)d(q,x) - \int_0^a D_q f(x)d(q,x),$$

on obtient

$$\int_a^b D_q f(x)d(q,x) = f(b) - f(a).$$

(c) Établir l'identité $D_q T_q = q T_q D_q$, puis la formule de la dérivée d'un produit

$$D_q(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot D_q g(x) + D_q f(x)\cdot T_q g(x)$$

et la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)\cdot D_q g(x)d(q,x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b D_q f(x)\cdot T_q g(x)d(q,x).$$

Solutions des exercices du chapitre 2

1. Puisque $\exp(xu)\exp(u) = \exp((1+x)u)$, cette expression est la fonction génératrice exponentielle des polynômes $H_n(x) = (1+x)^n = \sum\limits_{0\le n\le n} \binom{n}{j} x^j$. Dans le cas des q-séries, on est obligé de faire le calcul explicitement : $e_q(xu)\,e_q(u) = \sum\limits_{n\ge0}\sum\limits_{0\le j\le n} \frac{(xu)^j}{(q;q)_j}\frac{u^{n-j}}{(q;q)_{n-j}} = \sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}\sum\limits_{0\le j\le n}\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}x^j = \sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}H_n(x,q)$. En posant $x=-1$ dans cette dernière identité, on trouve : $\sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}H_n(-1,q) = \frac{1}{(-u;q)_\infty\,(u;q)_\infty} = \frac{1}{(-u^2;q^2)_\infty} = \sum\limits_{n\ge0}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(q^2;q^2)_n}$, d'où $H_{2n+1}(-1,q)=0$ et $H_{2n}(-1,q) = (q;q)_{2n}/(q^2;q^2)_n = (q;q^2)_n$. En posant maintenant $x=q^{1/2}$, on trouve : $\sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}H_n(q^{1/2},q) = \frac{1}{(uq^{1/2};q)_\infty\,(u;q)_\infty} = \frac{1}{(u;q^{1/2})_\infty} = \sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q^{1/2};q^{1/2})_n}$, d'où $H_n(q^{1/2};q) = \frac{(q;q)_n}{(q^{1/2};q^{1/2})_n} = \frac{(q;q)_n\,(-q^{1/2};q^{1/2})_n}{(q^{1/2};q^{1/2})_n\,(-q^{1/2};q^{1/2})_n} = (q^{-1/2};q^{1/2})_n$. Partons de $f(x,u) = \sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}H_n(x,q)$. On en tire : $f(x,u)-f(x,qu) = x\sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}H_{n+1}(x,q)$. Par ailleurs, $f(x,u) - f(x,qu) = \frac{1}{(u;q)_\infty}\frac{1}{(xu;q)_\infty}(1-(1-u)(1-xu)) = f(x,u)u(1+x-xu)$. D'où $\sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}H_{n+1}(x,q) = (1+x)\sum\limits_{n\ge0}\frac{u^n}{(q;q)_n}H_n(x,q) - \sum\limits_{n\ge0}\frac{u^{n+1}}{(q;q)_n}xH_n(x,q)$. La récurrence en découle pour $n\ge0$ avec $H_{-1}(x,q)=0$.

2. Les commentaires dans le texte doivent suffire.

3. Les programmes concernant `Inv` sont simples à écrire, les autres programmes nécessitent plus d'attention.

---

4. Par définition de y on a : $y_i = i - \sum_{1\le j\le i} \chi(\sigma(i) > \sigma(j) > \sigma(i+1))$ ou $\sum_{1\le j\le i-1} \chi(\sigma(i+1) > \sigma(j) > \sigma(i))$, suivant que l'on a $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ ou $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. La suite y est donc sous-excédante. Maintenant, une suite sous-excédante y étant donnée, on peut reconstruire la permutation σ de façon unique, en commeçant à déterminer $\sigma(n)$ à partir de $y_n = n - \sum_{1\le j\le n} \chi(\sigma(n) > \sigma(j))$. L'application $y \mapsto \sigma \mapsto x$ est alors bijective. Enfin, $\operatorname{tot} y = \sum_{1\le i\le n} (x_i - x_{i+1}) + i\chi(\sigma(i) > \sigma(i{+}1)) = \sum_{1\le i\le n} i\chi(\sigma(i) > \sigma(i{+}1)) = \operatorname{maj}\sigma$, puisque $x_0 = x_{n+1} = 0$.

5. On a $\operatorname{invcodage}(\sigma) = (0,0,0,2,1,1,5,3,8)$, $\operatorname{inv}\sigma = 20$; puis $\operatorname{majcodage}(\sigma) = (0,1,1,3,4,1,2,2,3)$, $\operatorname{maj}\sigma = 17$.

6. $\operatorname{invcodage}(687293154) = x$ et $\operatorname{majcodage}(938164275) = x$.

7. (a) $z_i \le \#\{1 \le j < i\} = i$; (b) $z = 001102238$; (c) $\sigma = 756312984$;
(d) On distigue deux cas. Si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$, les composantes de ce nouveau maj-codage satisfont les relations :

$$\begin{aligned}
x_i - x_{i+1} + i\chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))&\\
&= \{j < i \mid \sigma(j) > \sigma(i)\} - \{j < i+1 \mid \sigma(j) > \sigma(i+1)\} + i\\
&= \{j < i \mid \sigma(j) > \sigma(i)\} + \{j < i+1 \mid \sigma(j) \le \sigma(i+1)\}\\
&= \{j < i \mid \sigma(j) > \sigma(i)\} + \{j < i \mid \sigma(j) \le \sigma(i+1)\}\\
&= \#\{1 \le j < i \mid \sigma(j) \in \rrbracket\sigma(i), \sigma(i+1)\rrbracket\} = z_i.
\end{aligned}$$

Si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, on a :

$$\begin{aligned}
x_i - x_{i+1} + i\chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))&\\
&= \{j < i \mid \sigma(j) > \sigma(i)\} - \{j < i+1 \mid \sigma(j) > \sigma(i+1)\}\\
&= \{j < i \mid \sigma(j) > \sigma(i)\} - \{j < i \mid \sigma(j) > \sigma(i+1)\}\\
&= \#\{1 \le j < i \mid \sigma(j) \in \rrbracket\sigma(i), \sigma(i+1)\rrbracket\} = z_i.
\end{aligned}$$

8. La suite y est sous-excédante et $y_1 + y_2 + \ldots y_n = \operatorname{maj}\sigma$. Cependant cette transformation $\sigma \mapsto y$ n'est pas bijective. Les deux permutations 213 et 312 donnent la même suite 010.

9. Un ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est composé de vecteurs linéairement indépendants, si tout d'abord v_1 n'est pas nul (il y a donc $(q^{N+n} - 1)$ choix possibles), ensuite si v_2 n'est pas proportionnel à v_1 (il y a

donc $(q^{N+n}-q)$ choix possibles), ensuite si pour tout $i=2,\ldots,n$ le vecteur v_i n'appartient pas au sous-espace vectoriel de dimension $(i-1)$ engendré par $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ (il y a alors $(q^{N+n}-q^i)$ choix possibles). Le nombre de tels ensembles $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ est donc égal à $(q^{N+n}-1)(q^{N+n}-q)\cdots(q^{N+n}-q^{n-1})$. Le second comptage s'obtient par le même raisonnement. Enfin, le nombre d'ensembles $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ composés de vecteurs linéairement indépendants est égal au nombre de sous-espaces vectoriels de dimension n, multiplié par le nombre de tels ensembles qui engendrent un sous-espace vectoriel donné de dimension n.

10. Les deux formules sont banales pour $N=0$. Pour établir (3.9), on utilise (3.6) avec les substitutions $n \leftarrow N+n$, $i \leftarrow n$ dans le calcul : $(1-uq^N)\sum\limits_{n\ge 0}{N+n \brack n}u^n = \sum\limits_{n\ge 0}\left({N+n \brack n} - q^N{N+n-1 \brack n-1}\right)u^n = \sum\limits_{n\ge 0}{N+n-1 \brack n}u^n = (u;q)_N^{-1}$ (par récurrence sur N). D'où $\sum\limits_{n\ge 0}{N+n \brack n}u^n = (u;q)_N^{-1}(1-uq^N)^{-1} = (u;q)_{N+1}^{-1}$. Pour (3.10), on utilise (3.5) avec les substitutions $n \leftarrow N+1$, $i \leftarrow n$ dans le calcul : $(-u;q)_{N+1} = \left(\sum\limits_{0\le n\le N} q^{n(n-1)/2}{N \brack n}u^n\right).(1+uq^N) = 1 + \sum\limits_{1\le n\le N}\left({N \brack n}q^{n(n-1)/2} + {N \brack n-1}q^{(n-1)(n-2)/2+N}\right)u^n + q^{(N+1)N/2}u^{N+1} = 1 + \sum\limits_{1\le n\le N}\left({N \brack n} + q^{(N+1)-n}{N \brack n-1}\right)q^{n(n-1)/2}u^n + q^{(N+1)N/2}u^{N+1} = \sum\limits_{0\le n\le N+1}{N+1 \brack n}q^{n(n-1)/2}u^n$.

11. On procède par récurrence sur $N+n$. Posons $SC(N,n;q) := \sum\limits_{b\in SC(N,n)} q^{\operatorname{tot} b}$. Alors $SC(N,n;q) = \sum\limits_{b_1=0} q^{\operatorname{tot} b} + \sum\limits_{b_1\ge 1} q^{\operatorname{tot} b}$. Posons $a_i := b_i - 1$ $(i=1,\ldots,N)$ dans la seconde sommation. Alors, en convenant que $SC(N,n;q)$ vaut 1 lorsque $N=0$,

$$\begin{aligned} SC(N,n;q) &= \sum_{0\le b_2\le\cdots\le b_N\le n} q^{\|b\|} + \sum_{0\le a_1\le\cdots\le a_N\le n-1} q^{N+\|a\|} \\ &= SC(N-1,n;q) + q^N\, SC(N,n-1;q) \\ &= {N+n-1 \brack n} + q^N {N+n-1 \brack n-1} = {N+n \brack n}. \end{aligned}$$

12. On procède par récurrence sur $N+n$. Posons $MB(N,n;q) := \sum\limits_{x\in MB(N,n)} q^{\operatorname{inv} x}$. Alors $MB(N,n;q) = \sum\limits_{x_1=0} q^{\operatorname{inv} x} + \sum\limits_{x_1=1} q^{\operatorname{inv} x}$. Posons $y_i := x_{i+1}$ $(i=1,\ldots,N-1)$ dans chacune des sommations et

appelons y le mot $y_1y_2\dots y_{N-1}$. Dans la première (resp. la seconde) on a : $\operatorname{inv} x = \operatorname{inv} y$ et $y \in MB(N, n-1)$ (resp. $\operatorname{inv} x = n + \operatorname{inv} y$ et $y \in MB(N-1, n)$). Alors, en convenant que $MB(N, n; q)$ vaut 1 lorsque $N = 0$,

$$\begin{aligned} MB(N,n;q) &= \sum_{y\in MB(N,n-1)} q^{\operatorname{inv} y} + \sum_{y\in MB(N-1,n)} q^{n+\operatorname{inv} y} \\ &= MB(N,n-1;q) + q^n\, MB(N-1,n;q) \\ &= \begin{bmatrix} N+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + q^n \begin{bmatrix} N+n-1 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

13. (a) Comme le montre la Figure 1, pour chaque partition π en au plus n parts, chacune au plus égale à N, on note j la taille de la $n^{\text{ième}}$ part de π (la plus petite, éventuellement 0). En retirant j de toutes les parts de π, il reste une partition en au plus $(n-1)$ parts, chacune au plus égale à $(N-j)$. Ces dernières partitions ont pour fonction génératrice précisément $\begin{bmatrix} N-j+n-1 \\ N-j \end{bmatrix}$.

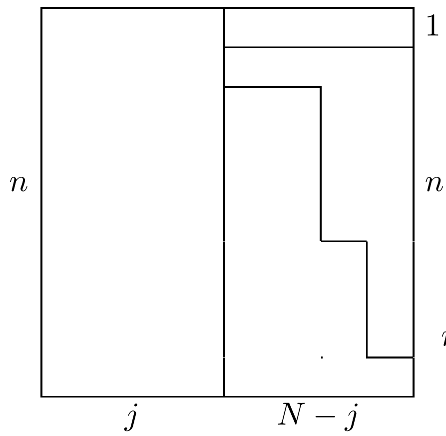


Fig. 1

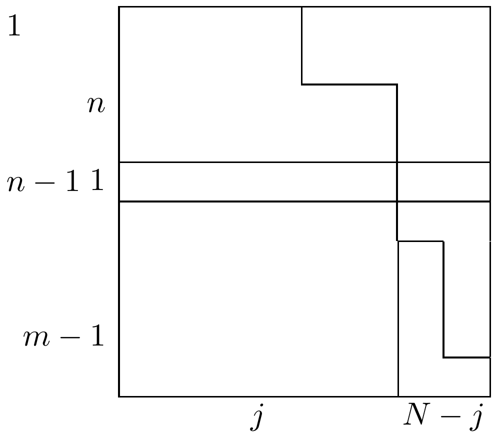


Fig. 2

(b) On se reporte ici à la Figure 2. Pour chaque partition π en au plus $(n+m)$ parts, chacune au plus égale à N, on note cette fois j la taille de la $(n+1)^{\text{ième}}$ plus petite part. Alors à cette partition π, on peut faire correspondre biunivoquement une partition π' en au plus n parts, chacune au plus égale à j et une partition π'' en au plus $(m-1)$ parts, chacune au plus égale à $(N-j)$.
Les deux coefficients q-binomiaux apparaissant dans le membre de gauche de l'identité sont précisément les fonctions génératrices des partitions π' et π'', respectivement. L'identité résulte du fait que le poids de π est égal à la somme des poids de π' et de π'', augmentée du nombre de carrés jm contenus dans le rectangle de dimensions j, m.

14. (a) Banal par récurrence.

(b) Si n est inséré au début d'une permutation $\sigma' = \sigma'(1)\ldots\sigma'(n-1)$ ou entre deux lettres $\sigma(i)$, $\sigma(i+1)$ telles que $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, la permutation résultante a une descente de plus. Dans le cas contraire, le nombre de descentes reste invariant. Pour obtenir donc l'ensemble $S_{n,k}$ de toutes les permutations d'ordre n ayant k descentes, il suffit

ou bien de considérer l'ensemble de toutes les permutations appartenant à $S_{n-1,k-1}$ et y insérer n dans les $(n-1)-(k-1)$ positions qui créent une nouvelle descente ; on obtient ainsi $(n-k)A_{n_1,k-1}$ permutations d'ordre n ;

ou bien de considérer l'ensemble $S_{n-1,k}$ et d'insérer dans chaque permutation appartenant à cet ensemble l'entier n dans les $(k+1)$ positions ne créant pas de nouvelles descentes ; on obtient, de cette façon, $(k+1)A_{n-1,k}$ permutations d'ordre n ayant k descentes.

(c) Le contenu du § 15.3, chap. 1 et la précédente question (b) constituent une démonstration *combinatoire* du résultat. Une démonstration *analytique* est donnée dans l'exercice suivant.

15. (a) Le membre de droite de l'identité à prouver vaut : $(1-t)^n \sum\limits_{n\geq 0} t^j(j+1)^{n-1}(1+(n-1)t-nt+(1-t)j) = (1-t)^n \sum\limits_{n\geq 0} t^j(j+1)^{n-1}(1-t)(j+1) = (1-t)^{n+1} \sum\limits_{n\geq 0} t^j(j+1)^n = A_n(t)$.

(b) D'abord $A_0(t) = (1-t)/(1-t) = 1$, d'après (15.1) et le coefficient constant de chaque série $A_n(t)$ est $A_{n,0} = 1$. En prenant le coefficient de t^k $(k \geq 1)$ dans les deux membres de l'identité (15.2), on obtient : $A_{n,k} = A_{n-1,k} + (n-1)A_{n-1,k-1} + kA_{n-1,k} - (k-1)A_{n-1,k-1}$, soit la récurrence demandée. Enfin, cette récurrence implique bien que l'on a $A_{n,k} = 0$ pour $k \geq n \geq 1$. On retrouve la récurrence des polynômes eulériens.

(c) Il suffit de calculer le coefficient de t^k dans $(1-t)^{n+1} \sum\limits_{n\geq 0} t^n(j+1)^n$.

(d) $A_n(t)(1-t)^{-(n+1)} = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{n+k}{n} t^k \sum\limits_{0\leq l\leq n-1} A_{n,l}t^l = \sum\limits_{j\geq 0} t^j \sum\limits_{0\leq l\leq \min(j,n-1)} A_{n,l}\binom{n+j-l}{n} = \sum\limits_{j\geq 0} t^j \sum\limits_{0\leq l\leq n-1} A_{n,n-1-l}\binom{(j+1)+(n-l-1)}{n} = \sum\limits_{j\geq 0} t^j(j+1)^n$, en utilisant le fait que $\binom{n+j-l}{n} = 0$ lorsque $j \leq n-2$ et $l = j+1,\ldots,n-1$, puis (14.2) et pour la dernière étape, en faisant usage de la formule de Worpitzky.

(e) De (15.1) : $\sum\limits_{n\geq 0} A_n(t)(1-t)^{-(n+1)}u^n/n! = \sum\limits_{n\geq 0} u^n/n! \sum\limits_{j\geq 0} t^j(j+1)^n = \sum\limits_{j\geq 0} t^j \sum\limits_{n\geq 0} (u(j+1))^n/n! = e^u \sum\limits_{j\geq 0} (te^u)^j = e^u/(1-te^u)$. En posant

$u = v(1-t)$, on déduit : $\sum_{n\geq 0} A_n(t)v^n/n! = (1-t)\exp(v(1-t))/(1-t\exp(v(1-t)))$, et donc (15.5).

16. Il faut rédiger la solution.

17. (a) On a le tableau :

	des	maj	des′	maj′	DES	MAJ
11000	1	2	0	0	1	2
10100	2	4	1	2	3	6
10010	2	5	1	3	3	8
01100	1	3	1	1	2	4
01010	2	6	2	4	4	10
00110	1	4	1	2	2	6
10001	1	1	1	4	2	5
01001	1	2	2	5	3	7
00101	1	3	2	6	3	9
00011	0	0	1	3	1	3

(b) On définit une bijection $x \mapsto y$ de $MB(N,n)$ sur $MB(n,N)$. Pour tout $1 \leq i \leq N+n$, on pose $y_i = 1-x_i$. Il est clair que $\mathrm{maj}'\,x = \mathrm{maj}\,y$. D'où $\displaystyle\sum_{x\in MB(N,n)} q^{\mathrm{maj}'\,x} = \sum_{y\in MB(n,N)} q^{\mathrm{maj}\,y} = \begin{bmatrix} N+n \\ n \end{bmatrix}$.

(c) On construit une bijection $x \mapsto z$ de $MB(N,n)$ sur elle-même. Pour tout $x \in MB(N,n)$, on applique d'abord la bijection de l'exercice précédent pour obtenir $y \in MB(n,N)$. On factorise y d'une façon unique sous la forme $y = v_1 10 v_2 10 \cdots v_{k-1} 10 v_k$, où v_i est un mot binaire croissant de forme $0^a 1^b$; de plus la longueur $l(v_i)$ de v_i satisfait $l(v_i) \geq 1$ pour $2 \leq i \leq k-1$ et $l(v_1) \geq 0$, $l(v_k) \geq 0$. Pour tout mot croissant $v_i = 0^a 1^b$, on définit un autre mot croissant $u_i = 0^b 1^a$. Enfin, on pose $z = u_1 10 u_2 10 \cdots u_{k-1} 10 u_k$.
Par exemple, pour $x = 10110001011 \in MB(6,5)$, on a $y = 01001110100 \in MB(5,6)$. Factorisant $y = 0(10)011(10)(10)0$, on a $z = 1(10)001(10)(10)1 = 11000110101 \in MB(6,5)$. On vérifie que $\mathrm{maj}'\,x = \mathrm{maj}\,y = \mathrm{maj}\,z$ et $\mathrm{des}'\,x = \mathrm{des}\,y = \mathrm{des}\,z$.

(d) Chercher la différence entre maj′ et maj. Noter que les deux types de descentes sont alternantes.

(e)

$$\begin{aligned}\sum_{x\in MB(n,N)} q^{\mathrm{MAJ}\,x} &= \sum_{x\in MB(n,N),x_{n+N}=0} q^{\mathrm{MAJ}\,x} + \sum_{x\in MB(n,N),x_{n+N}=1} q^{\mathrm{MAJ}\,x}\\ &= \sum_{x\in MB(n-1,N)} q^{2\,\mathrm{maj}'\,x+N} + \sum_{x\in MB(n,N-1)} q^{2\,\mathrm{maj}\,x+n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^N \begin{bmatrix} n+N-1 \\ n-1, N \end{bmatrix}_{q^2} + q^n \begin{bmatrix} n+N-1 \\ n, N-1 \end{bmatrix}_{q^2} \\
&= q^N \begin{bmatrix} n+N \\ n, N \end{bmatrix}_{q^2} \frac{1-q^{2n}}{1-q^{2N+2n}} + q^n \begin{bmatrix} n+N \\ n, N \end{bmatrix}_{q^2} \frac{1-q^{2N}}{1-q^{2N+2n}} \\
&= \begin{bmatrix} n+N \\ n, N \end{bmatrix}_{q^2} \frac{q^N(1-q^{2n}) + q^n(1-q^{2N})}{1-q^{2N+2N}} \\
&= \begin{bmatrix} n+N \\ n, N \end{bmatrix}_{q^2} \frac{q^n + q^N}{1+q^{n+N}}.
\end{aligned}$$

18. (a) Soit w un mot de la classe $R(\mathbf{m})$ et soit $1 \le x < y = x+1 \le r$. On remplace tous les facteurs yx de ce mot par une lettre spéciale "$\sim$". Dans le mot ainsi obtenu, les facteurs *maximaux* contenant les deux lettres x et y ont la forme $x^a y^b$ ($a \ge 0, b \ge 0$). On change alors ces facteurs en $x^b y^a$ et remplace chaque "$\sim$" par yx, pour obtenir le mot w' du second ensemble. Par exemple, pour $w = 122322233243213 \in R(2,7,5,1)$, $x = 2$ et $y = 3$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
w = {}& 122322233243213 \mapsto 122{\sim}223{\sim}4{\sim}13 \\
&\mapsto 133{\sim}233{\sim}4{\sim}12 \mapsto 133322333243212 = w' \in R(2,5,7,1).
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat que cette transformation est bijective et que l'on a : $\operatorname{maj} w = \operatorname{maj} w'$.

(b) $Z(w) = \operatorname{maj}(2121122) + \operatorname{maj}(1131) + \operatorname{maj}(41114) + \operatorname{maj}(22322) + \operatorname{maj}(242242) + \operatorname{maj}(434) = 4+3+1+3+7+1 = 19$.

(c) Les multiplicités de $\operatorname{gcyc}_x(w)$ et de $\operatorname{lcyc}_x(w)$ sont respectivement : $\mathbf{m}^x = (m_{x+1}, m_{x+2}, \cdots, m_r, m_1, m_2, \cdots, m_{x-1}, m_x)$ et $\mathbf{m}_x = (m_1, m_2, \cdots, m_{x-1}, m_{x+1}, m_{x+2}, \cdots, m_r, m_x)$.

(d) Les cyclages global et local valent : $\operatorname{gcyc}_2(w) = 4234313424$ et $\operatorname{lcyc}_2(w) = 4214121434$. Or $\operatorname{maj} \operatorname{gcyc}_2(w) = 18$ et $Z(\operatorname{lcyc}_2(w)) = 16$. Comme $\operatorname{maj} w = 21$ et $Z(w) = 19$, les deux différences sont égales à 3.

(e) On considère la factorisation unique $w = p_0 q_1 p_1 q_2 p_2 \dots q_s p_s$ du mot w, où les p_i sont des mots dont toutes lettres sont inférieures ou égales à x et où les q_i sont des mots dont toutes les lettres sont plus grandes que x, avec $|p_i| \ge 1$, $|q_i| \ge 1$ pour tout $i \ge 1$ et $|p_0| \ge 0$. Or la dernière lettre de chaque facteur p_i (resp. q_i) est inférieure (resp. supérieure) à la première lettre du facteur suivant q_{i+1} (resp. p_i). On dit qu'il y a une *montée* à la fin du facteur p_i et une *descente* à la fin du facteur q_i. Dans le mot $\operatorname{gcyc}_x(w)$, ces montées deviennent des descentes et les descentes des montées, les autres montées ou descentes restant invariantes. On a donc $\operatorname{maj} w - \operatorname{maj}(\operatorname{gcyc}_x(w)) = |q_1| + |q_2| + \cdots + |q_s| = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$.

(f) Soit $a = 1, 2 \ldots, r$ une lettre apparaissant dans le mot w, on note a' l'image de a par le cyclage local $u := \mathrm{lcyc}_x(w)$. Pour tout $i < j$, si $i \neq x$, les sous-mots w_{ij} et $u_{i'j'}$ sont identiques à la réduction près. D'autre part, pour tout $x < j$, on a, d'après (e), $\mathrm{maj}\, w_{xj} - \mathrm{maj}(\mathrm{gcyc}_x(w))_{x'j'} = m_j$. Comme les deux cyclages sont identiques à la réduction près pour les mots à deux lettres, on en déduit : $Z(w) - Z(u) = \sum_{x<j} \big(\mathrm{maj}(w_{xj}) - \mathrm{maj}(u_{x'j'})\big) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$.

(g) La bijection cherchée Φ est définie, pour tout mot $w \in R(\mathbf{m})$ et toute lettre x, par la composition suivante :

$$\Phi(wx) := \big(\mathrm{lcyc}_x^{-1} \circ \Phi \circ \theta_{\mathbf{m}^x, \mathbf{m}_x} \circ \mathrm{gcyc}_x(w)\big)x\ .$$

On vérifie bien que $\Phi(wx)$ est un réarrangement de wx et que la relation $\mathrm{maj}\, w = Z(\Phi(w))$ est satisfaite.

19. (a) Posons $b := \sum_{r \geq 0} b_r\, t^r$. Alors $b_0 = a_0$ et $b_r = a_r - a_{r-1}$ pour $r \geq 1$. Or $a - (b_0 + b_1 + \cdots + b_r) = a - (a_0 + a_1 - a_0 + \cdots + a_r - a_{r-1}) = a - a_r$ et par hypothèse l'ordre de cette différence tend vers l'infini avec r.

(b) Le membre de gauche de (4.22) est de la forme $\sum_s b_s\, t^s$, où $b_s = 1/(\mathbf{u}; q)_{s+1}$. Or $\lim_s b_s = 1/(\mathbf{u}; q)_\infty$. Soit alors $b(t) := (1-t) \cdot \sum_s b_s\, t^s$. On a alors $b(1) = 1/(\mathbf{u}; q)_\infty$. Or en multipliant le membre de gauche de (4.22) par $(1 - t)$ et en posant ensuite $t = 1$, on trouve $\sum_{\mathbf{m}} A_{\mathbf{m}}(t = 1, q)\mathbf{u}^{\mathbf{m}}/(q; q)_m$. On en déduit l'identité (4.23).

(c) Il faut ici appliquer (a) deux fois de suite. Le coefficient de t_1^r, à savoir $\sum_s t_2^s/(u; q_1, q_2)_{r+1,s+1}$, tend vers $\sum_s t_2^s/(u; q_1, q_2)_{\infty,s+1}$ (définition évidente) lorsque r tend vers l'infini. En multipliant donc le membre de gauche de (6.20) et en posant $t_1 = 1$, on obtient $\sum_s t_2^s/(u; q_1, q_2)_{\infty,s+1}$. Comme ensuite $1/(u; q_1, q_2)_{\infty,s+1}$ tend vers $1/(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty}$, lorsque s tend vers l'infini, en multipliant la précédente somme par $(1 - t_2)$ et en y posant $t_2 = 1$ on obtient : $1/(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty}$. En multipliant le membre de droite successivement par $(1 - t_1)$ et $(1 - t_2)$ et en posant $t_1 = 1$, puis $t_2 = 1$, on obtient $\sum_n A_n(q_1, q_2)\, u^n/((q_1; q_1)_n\, (q_2; q_2)_n)$.

20. (a) Si on a $\sigma(i) = j$, alors $\mathbf{i}\,\sigma(j) = i$, puis $\mathbf{c}\,\mathbf{i}\,\sigma(j) = (n + 1 - i)$. Donc $\mathbf{i}\,\mathbf{c}\,\mathbf{i}\,\sigma(n + 1 - i) = j$ et on a aussi $\mathbf{r}\,\sigma(n + 1 - i) = \sigma(i) = j$.

(b) Inscrivons les n points $(1, \sigma(1))$, $(2, \sigma(2))$, … , $(n, \sigma(n))$ dans un carré de côté n. Alors la rotation autour de l'axe horisontal de symétrie (resp. de l'axe vertical de symétrie, resp. de la diagonale) du carré transforme le graphe de σ en le graphe de la permutation $\mathbf{c}\,\sigma$ (resp. $\mathbf{r}\,\sigma$, resp. $\mathbf{i}\,\sigma$). Le résultat découle du fait que ces rotations engendrent le groupe diédral D_4 et qu'il y a une correspondance entre ces rotations et les opérations $\mathbf{i}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{r}$.

(c) Ces relations peuvent se vérifier par le calcul ou géométriquement.

(d) Posons $\mathbf{c}\,\sigma := \sigma'$ et $\mathbf{r}\,\mathbf{c}\,\sigma := \sigma''$. Alors $j \in \operatorname{Ligne}\sigma$ si et seulement si $j \in [n-1]$ et $\sigma(j) > \sigma(j+1)$, d'où $\sigma'(j) < \sigma'(j+1)$ et aussi $\sigma''(j'') < \sigma''(j'')$ en posant $j'' = n+1-j-1$. Par conséquent, $j \in \operatorname{Ligne}\sigma$ si et seulement si $j \in [n-1]$ et, de façon équivalente, $j \notin \operatorname{Ligne}\mathbf{r}\,\sigma$ ou $n-j \in \operatorname{Ligne}\mathbf{r}\,\mathbf{c}\,\sigma$.

21. (a) La table des premières valeurs des $a(n,i)$ est la suivante :

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 1$	1							
2	2	2						
3	2	1	1					
4	3	3	1	1				
5	3	2	1	1	1			
6	3	3	2	1	1	1		
7	3	2	2	1	1	1	1	
8	4	4	2	2	1	1	1	1

(b) Par définition $1-q^i = \prod\{\Phi_d(q) : d \mid i\}$ pour tout $i \geq 1$. Comme $(1-q^{2i}) = (1-q^i)(1+q^i)$, on a $1+q^i = \prod\{\Phi_d(q) : d \mid 2i,\, d \nmid i\}$. En particulier, si $0 \leq j \leq l$, alors $1+q^{m2^j} = \prod\{\Phi_d(q) : d \mid m2^{j+1}, d \nmid m2^j\} = \prod\{\Phi_d(q) : d \in A_j\}$.

(c) Comme les ensembles A_j sont deux à deux disjoints, il suffit de montrer que B est la réunion des A_j's. Or, si $d \mid m2^{j+1}$, $d \nmid m2^{j+1}$ pour un certain j tel que $0 \leq j \leq l$, alors $d \mid 2n$ (égal à $m2^{l+1}$) et d est pair. Donc d appartient à B. Réciproquement, supposons $d \mid 2n$ avec d pair. Alors $d = m'2^{j+1}$ avec m' impair, $m' \mid m$ et $0 \leq j \leq l$. Par conséquent, d appartient à A_j.

(d) Le produit est nul si $k \geq n$. Lorsque $0 \leq k \leq n-1$, le polynôme gaussien est le produit des deux facteurs
$$P = \frac{Od_n(q)(1-q^{2n-1})Od_{n-1}(q)\cdots(1-q^{2n-2k+1})Od_{n-k}(q)}{(1-q^{2k+1})Od_k(q)(1-q^{2k-1})\cdots Od_1(q)(1-q)}$$
et $Q = \dfrac{Ev_n(q)\,Ev_{n-1}(q)\,\ldots\,Ev_{n-k}(q)}{Ev_k(q)\,Ev_{k-1}(q)\,\ldots\,Ev_1(q)}$. Lorsque les numérateurs et les dénominateurs sont exprimés à l'aide des polynômes cyclotomiques, alors P et Q ne contiennent des polynômes cyclotomiques Φ_d tels que d est impair pour P et pair pour Q. Comme $\begin{bmatrix}2n\\2k+1\end{bmatrix}$ est un polynôme et que les polynômes cyclotomiques sont irréductibles, chacun des deux facteurs est un polynôme. Or P est précisément égal à l'expression sous considération.

(e) On récrit la récurrence

$$D_{2n+1}(q) = \sum_{0\le k\le n-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix} q^{2k+1} D_{2k+1}(q)\, D_{2n-2k-1}(q).$$

D'abord, $D_1(q) = 1$. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $0 \leq k \leq n-1$ le produit $\begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix} \dfrac{D_{2k+1}(q) D_{2n-2k-2}(q)}{Ev_1(q) \ldots Ev_n(q)}$ est polynomial car il peut être factorisé comme $\begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix} \dfrac{Ev_0(q) \cdots Ev_k(q)}{Ev_{n-k}(q) \cdots Ev_n(q)} \times \dfrac{D_{2k+1}(q)}{Ev_0(q) \cdots Ev_k(q)} \times \dfrac{D_{2n-2k-1}(q)}{Ev_1(q) \cdots Ev_{n-k-1}(q)}$. Le premier facteur est polynomial par (d), ainsi que les deux autres par récurrence. Lorsque n est impair, chaque terme dans la somme de la récurrence quadratique ci-dessus est divisible par $F_n(q) = Ev_1(q)Ev_2(q) \cdots Ev_n(q)$. Donc $F_n(q) \mid D_{2n+1}(q)$. Lorsque n est pair, on récrit la formule de récurrence en regroupant les termes deux à deux pour obtenir

$$D_{2n+1}(q) = \sum_{k} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix} q^{2k+1}(1+q^{2(n-2k-1)}) D_{2k+1}(q)\, D_{2n-2k-1}(q),$$

où cette fois k parcourt l'intervalle $[0, n/2-1]$. Comme n est pair, le binôme $1 + q^{2(n-2k-1)}$ est divisible par $1 + q^2$; et le produit $\left[\begin{smallmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{smallmatrix}\right] D_{2k+1}(q) D_{2n-2k-2}(q)$ est divisible par $Ev_1(q) \cdots Ev_n(q)$. Par conséquent, chaque terme de la somme est divisible par $F_n(q) = (1+q^2) Ev_1(q) \cdots Ev_n(q)$.

22. (a) Soit $\sigma = x_1 x_2 \ldots x_{2n}$ une permutation alternante montante balancée ($p.a.m.b.$) d'ordre $2n$. Comme $2n$ est est nécessairement un pic de σ, il est forcément le plus à gauche, i.e., $x_2 = 2n$. Si $x_1 = i$ avec $i \leq 2n-2$, alors $(i+1)$ apparaîtrait à la droite de i et σ ne serait pas balancée. Ainsi σ est de la forme $\sigma = (2n-1)(2n)x_3 \cdots x_{2n-1}x_{2n}$; elle est balancée si et seulement si le facteur droit $x_3 \cdots x_{2n-1}x_{2n}$ est i-balancé pour chaque $i = 1, 2, \ldots, 2n-3$. Par récurrence, $(2n-3)(2n-2) \cdots 3412$ est la seule $p.a.m.b.$ d'ordre $2n-2$, de sorte que l'unique $b.r.a.p.$ d'ordre $2n$ est $(2n-1)(2n)(2n-3)(2n-2) \cdots 3412$.

(b) Si σ contient le facteur $(i'+1)i'$, alors toutes les lettres plus grandes que $(i'+1)$ sont à la gauche de $(i'+1)$. Or, comme σ est alternante de longueur paire, la lettre i' est entre deux lettres plus grandes que i', une contradiction.

(c) La relation $\operatorname{inv} \Phi(\sigma) = \operatorname{inv} \sigma + 1$ implique qu'une permutation alternante montante ayant un nombre maximal d'inversions est nécessairement balancée. Comme il n'y a qu'une seule permutation dont le nombre d'inversions vaut $2n(n-1)$, la propriété est démontrée.

(d) Comme $\sum\{q^{\operatorname{inv}\sigma} : \sigma \in A_{2n}\} = \sum\{q^{\operatorname{inv}\sigma} : \sigma \in B_{2n}\} = q^{4(n-1)}E_{2n-2}(q)$ et $\sum\{q^{\operatorname{inv}\sigma} : \sigma \in A_{2n} \cap B_{2n}\} = q^{4(n-2)+4(n-1)}E_{2n-4}(q)$, la récurrence sur n implique $\sum\{q^{\operatorname{inv}\sigma} : \sigma \in A_{2n} \cup B_{2n}\} \equiv 2q^{4(n-1)}q^{2(n-1)(n-2)} - q^{4(n-2)+4(n-1)}q^{2(n-2)(n-3)} \equiv q^{2n(n-1)} \bmod (q+1)^2$.

(e) Soit C_{2n} le complément de $A_{2n} \cup B_{2n}$, c'est-à-dire l'ensemble des permutations alternantes montantes de longueur $2n$ ayant $(2n)$ et $(2n-1)$ parmi leurs pics et 1 et 2 parmi leurs creux. Il reste à montrer que l'on a : $\sum\{q^{\operatorname{inv}\sigma} : \sigma \in C_{2n}\} \equiv 0 \bmod (q+1)^2$. Soit τ, τ' les transpositions $(2n-1, 2n)$ et$(1,2)$, respectivement et G le groupe d'ordre 4 engendré par $\{\tau, \tau'\}$. Le groupe G agit sur C_{2n} et dans chaque orbite le polynôme générateur de ces quatre éléments par nombre d'inversions est divisible par $(q+1)^2$. De là le polynôme générateur de tous les éléments de C_{2n} est aussi divisible par $(q+1)^2$.

23. Comme le montre la figure 1, pour chaque partition π en au plus β parts, chacune au plus égale à α, on note j la taille de la β-ième part de π (la plus petite, éventuellement 0). En retirant j de toutes les parts de π, il reste une partition en au plus $(\beta-1)$ parts, chacune au plus égale à $(\alpha-j)$. Ces dernières partitions ont pour fonction génératrice précisément $\begin{bmatrix}\alpha-j+\beta-1\\ \alpha-j\end{bmatrix}$. $\square$

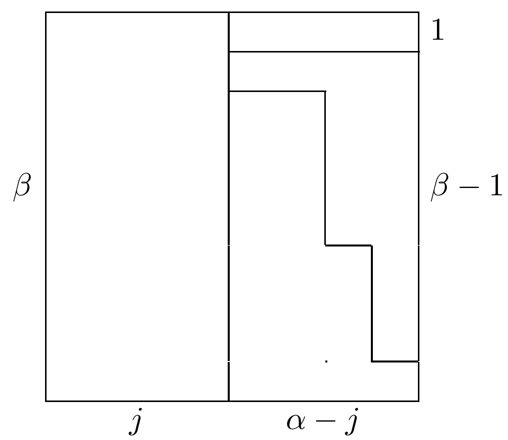


Fig. 1

Pour la seconde identité, on se reporte à la figure 2. Pour chaque partition π en au plus $(\beta+\gamma)$ parts, chacune au plus égale à α, on note cette fois j la taille de la $(\beta+1)$-ième plus petite part. Alors à cette partition π, on peut faire correspondre biunivoquement une partition π' en au plus β parts, chacune au plus égale à j et une partition π'' en au plus $(\gamma-1)$ parts, chacune au plus égale à $(\alpha-j)$. Les deux coefficients q-binomiaux apparaissant dans le membre de gauche de l'identité sont précisément les fonctions génératrices des partitions π' et π'', respectivement. L'identité résulte du fait que le poids de pi est égal à la somme des poids de π' et de π'', augmentée du nombre de carrés $j\gamma$ contenus dans le rectangle de dimensions j, γ. $\square$

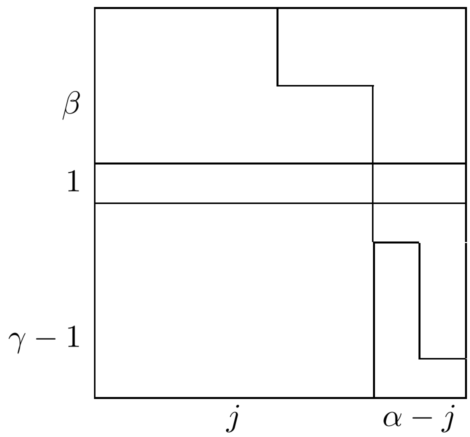


Fig. 2

TROISIÈME CHAPITRE

SÉRIES GÉNÉRATRICES DES SUITES DE NOMBRES CLASSIQUES

Sommaire

Ce chapitre débute par une étude des nombres de Bernoulli, nombres qui ne sont même pas entiers, donc qui en aucun cas ne peuvent être considérés comme cardinaux d'ensembles finis privilégiés. Ils sont cependant reliés à plusieurs suites de nombres entiers, qui eux ont des interprétations combinatoires intéressantes, comme les nombres de Genocchi, les nombres sécants, les nombres tangents, ... Il paraît ainsi intéressant de faire d'abord une étude purement arithmétique des nombres de Bernoulli et de donner ensuite le lien avec ces suites fondamentales d'entiers.

Il a été beaucoup écrit sur les nombres de Bernoulli, même des livres entiers ! La brève étude arithmétique de ces nombres que nous faisons ici, repose essentiellement sur la combinatoire des *nombres de Stirling.* En fait, on trouvera plus de résultats sur ces derniers nombres que sur les nombres de Bernoulli eux-mêmes. Nous nous sommes efforcés de dégager des algorithmes combinatoires, souvent originaux, pour les démonstrations des propriétés des nombres de Stirling. Après la démonstration du théorème de von Staudt-Clausen sur les nombres de Bernoulli, conduisant tout naturellement à l'étude des nombres de Genocchi, nous parlerons des nombres factoriels centraux, dont le calcul de la fonction génératrice est essentiel dans les paragraphes ultérieurs.

Les nombres de Genocchi sont des nombres entiers, qui, dans un sens qui sera expliqué dans le paragraphe 6, sont les entiers les plus proches des nombres de Bernoulli. Le calcul de leur génération au moyen des polynômes de Gandhi est donné dans les paragraphes 7 et 8. On doit à Dumont d'avoir fourni un modèle combinatoire efficace pour étudier leurs propriétés combinatoires, ce sont les *pistolets.* Pour permettre de transposer les propriétés de ces objets aux classes de permutations, nous avons été amenés, au paragraphe 10, à donner plusieurs codages de permutations en termes d'arbres ou de fonctions excédantes.

La matrice de Seidel des nombres de Genocchi fait apparaître une nouvelle suite de nombres, les nombres de Genocchi médiants, dont les propriétés combinatoires sont analogues à celles des nombres de Genocchi.

Les nombres tangents et sécants ont de riches propriétés combinatoires. Nous donnons plusieurs interprétations de ces nombres, notamment en termes de comptages d'orbites de groupe (*cf.* § 16). Les paragraphes 17-20 sont entièrement consacrés à une étude des fractions continues formelles, avec deux types d'applications à l'étude des partitions d'ensembles finis et des permutations.

1. Les nombres de Bernoulli

Ils sont notés B_{2n} $(n \geq 1)$ dans ce qui suit et peuvent être définis par leur fonction génératrice :

$$\frac{u}{e^u - 1} = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n+1} B_{2n}. \tag{1.1}$$

Les premières valeurs des nombres de Bernoulli sont données dans la table suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7
B_{2n}	1/6	1/30	1/42	1/30	5/66	691/2730	7/6

On notera que dans le développement en série (1.1), à l'exclusion du terme $-u/2$, il n'y a pas de terme de rang impair, ce qui est facile à vérifier (*cf.* Exercice 1). D'autre part, le facteur $(-1)^{n+1}$ dans la même formule et l'examen des premières valeurs des B_{2n} sous-entendent que ces nombres sont tous positifs. Ce qui est vrai (*cf.* exercices 2, 3 et 4).(*)

Posons $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1/2$ et $\beta_{2n} = (-1)^{n+1}B_{2n}$, $\beta_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$, puis récrivons (1.1) sous la forme :

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}\beta_n. \tag{1.2}$$

On en déduit l'identité

$$\Bigl(1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \cdots\Bigr)\Bigl(\beta_0 + \frac{u}{1!}\beta_1 + \frac{u^2}{2!}\beta_2 + \cdots\Bigr) = 1,$$

qui, de façon équivalente, peut s'exprimer par :

$$\beta_0 = 1, \qquad \beta_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\beta_r = \beta_n \quad (n \geq 2).$$

Dans la littérature classique, cette dernière identité était reproduite sous la forme symbolique

$$(\beta + 1)^n = \beta^n \qquad (n \geq 2),$$

avec la convention qu'il faut d'abord effectuer le développement par la formule du binôme, puis remplacer chaque puissance β^j par β_j.

Jacques Bernoulli avait introduit les nombres qui portent son nom notamment pour évaluer les sommes $\mathcal{P}_n(k)$ des puissances n-ièmes des k premiers entiers : $\mathcal{P}_n(k) = 1^n + 2^n + \cdots + k^n$. Il a obtenu la formule sommatoire suivante, appelée souvent *formule sommatoire d'Euler-MacLaurin*, où n, $k \geq 1$ (voir Exercice 3),

$$\mathcal{P}_n(k) = \frac{k^{n+1}}{n+1} + \frac{k^n}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{1\leq r\leq n/2} \binom{n+1}{2r} k^{n-2r+1}(-1)^{r+1}B_{2r}. \tag{1.3}$$

Un résultat célèbre, connu sous le nom de théorème de von Staudt-Clausen, affirme que l'expression

$$(-1)^n B_{2n} - \sum_p \frac{1}{p},$$

(*) Nous remercions John Brillhart de nous avoir aidés à retrouver les références de Mordell et de Carlitz.

où la sommation est faite sur tous les nombres premiers p tels que $(p-1) \mid 2n$, est un entier. On notera que $p = 2$ et $p = 3$ apparaissent toujours dans la sommation. Par exemple, on a :

$$\begin{array}{ll}
n=1 & -\dfrac{1}{6} - \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\Big) = -1 \\
n=2 & \dfrac{1}{30} - \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\Big) = -1 \\
n=3 & -\dfrac{1}{42} - \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7}\Big) = -1 \\
n=4 & \dfrac{1}{30} - \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\Big) = -1 \\
n=5 & -\dfrac{5}{66} - \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{11}\Big) = -1 \\
n=6 & \dfrac{691}{2730} - \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{13}\Big) = -1 \\
n=7 & -\dfrac{7}{6} - \Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\Big) = -2.
\end{array}$$

On peut encore écrire :

$$(1.4) \qquad (-1)^n B_{2n} = A_{2n} + \sum_{(p-1)\mid 2n} \frac{1}{p},$$

où A_{2n} est un entier. Le théorème de von Staudt-Clausen sera démontré dans la quatrième section. Donnons simplement quelques conséquences simples.

D'abord (1.4) implique que B_{2n} est un nombre rationnel a_n/b_n, dont le dénominateur b_n (lorsque a_n et b_n sont premiers entre eux) n'est pas divisible par un carré. On dit qu'il est *libre de carré* ("quadratfrei" ou "square free"). En fait, b_n est égal au produit de tous les nombres premiers p qui sont tels que $(p-1) \mid 2n$, comme on peut le voir immédiatement. On peut également démontrer que pour $n \geq 8$, on a : $B_{2n} > (2n+1)/3$.

2. Les nombres de Stirling

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $S(n,k)$ le nombre de *partitions* de l'intervalle $[\,n\,] = \{1, 2, \ldots, n\}$ en k blocs, c'est-à-dire en k sous-ensembles non vides de $[\,n\,]$, disjoints deux à deux, de réunion $[\,n\,]$. Par convention, on pose :

$$S(n,0) = S(0,k) = 0, \qquad \text{sauf pour } S(0,0) = 1.$$

La formule de récurrence

$$(2.1) \qquad S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k) \qquad (n,\, k \geq 1),$$

ne signifie rien d'autre que pour former une partition de $[\,n\,]$ en k blocs, on peut, ou bien considérer n'importe quelle partition de $[\,n-1\,]$ en $(k-1)$

blocs et y rajouter le singleton $\{n\}$, ou bien prendre une partition de $[\,n-1\,]$ en k blocs et placer l'élément n dans l'un des k blocs de ladite partition.

La relation de récurrence (2.1) permet de calculer les premières valeurs des nombres $S(n,k)$ $(1 \le k \le n)$. On les appelle *nombres de Stirling de seconde espèce*. Voir le tableau de la Fig. 1 pour les premières valeurs.

k=	1	2	3	4	5	6	7
n=1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Table des nombres de Stirling de seconde espèce
Fig. 1

Il existe, outre la définition (2.1), de nombreuses identités sur les nombres de Stirling de seconde espèce. Celles-ci sont reproduites dans le diagramme de la Fig. 2. Les équivalences entre les identités (matérialisées par des flèches "$\leftrightarrow$") sont établies directement, au moins pour les implications non immédiates.

D'autre part, si f est une *surjection* de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$, la *suite* des images réciproques $(f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(k))$ est une *partition ordonnée* de $[\,n\,]$ en k blocs non vides et forcément tous distincts. Deux surjections f et g de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$ sont dites *équivalentes* si la suite $(g^{-1}(1), g^{-1}(2), \ldots, g^{-1}(k))$ se déduit de la suite $(f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(k))$ par permutation des termes. Chaque classe d'équivalence contient donc exactement $k!$ éléments. On peut encore dire que les surjections f et g sont équivalentes si les deux *ensembles* $\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(k)\}$ et $\{g^{-1}(1), g^{-1}(2), \ldots, g^{-1}(k)\}$ sont identiques. Or un tel ensemble n'est autre qu'une *partition* (non ordonnée) de $[\,n\,]$ en k blocs. Il y a donc $S(n,k)$ classes d'équivalence et ainsi

le produit $k!\,S(n,k)$ est le nombre de surjections de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$.

Cet énoncé constitue une première équivalence, matérialisée par la double implication entre la seconde et la troisième identité en partant du haut.

Il est important de noter que, combinatoirement, les interprétations de ces identités en termes de partitions, d'une part, et en termes de surjections, d'autre part, vont conduire à des démonstrations de nature géométrique différente.

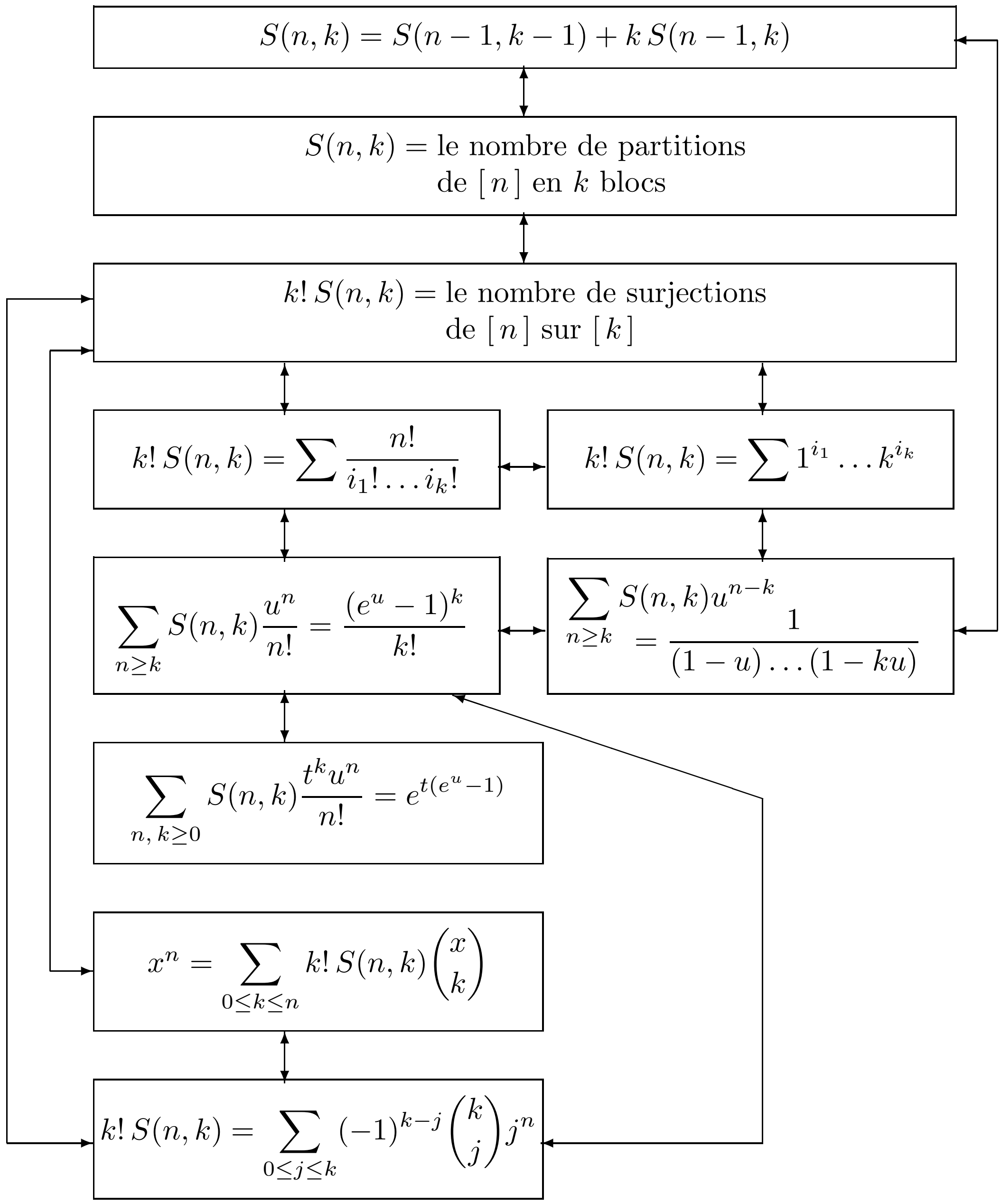


Fig. 2
Les identités sur les nombres de Stirling

2.1. *La relation avec les fonctions puissances.* — Elle s'écrit :

$$x^n=\sum_{0\le k\le n} k!\,S(n,k)\binom{x}{k}, \tag{2.2}$$

où x est une variable.

Pour prouver cette formule, il suffit de l'établir en supposant $x \geq 1$ entier. Considérons un sous-ensemble A, de cardinal k, de l'ensemble $[\,x\,]$. Comme on vient de le voir, l'ensemble de toutes les applications f telles que $f([\,n\,]) = A$ a pour cardinal $k!\,S(n,k)$. Lorsque A décrit toutes les parties de $[\,x\,]$ qui sont de cardinal k, on obtient $k!\,S(n,k)\binom{x}{k}$ fonctions. Pour décrire l'ensemble $[\,x\,]^{[\,n\,]}$ de *toutes les applications* f de $[\,n\,]$ dans $[\,x\,]$, il suffit alors de faire varier k de 0 à n. On obtient ainsi le second membre de (2.2). Le premier membre n'est autre que le nombre de *toutes* les applications de $[\,n\,]$ dans $[\,x\,]$. $\square$

2.2. *La formule inverse.* — L'identité

$$k!\,S(n,k) = \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n \tag{2.3}$$

n'est autre que l'*inverse* de la formule (2.2) au sens de l'inversion de Möbius. Nous en donnons trois démonstrations, dont une renvoyée aux exercices (*cf.* Exercice 5) ; celle-ci repose sur la formule d'inclusion-exclusion. Notons que le calcul fait dans la Remarque, chap. 1, § 13, constitue, en fait, une quatrième démonstration.

La *première démonstration* consiste à vérifier que chaque application de $[\,n\,]$ dans un sous-ensemble de $[\,k\,]$ apporte la même contribution dans les deux membres de l'identité. En effet, soit A un sous-ensemble, de cardinal j, de l'ensemble $[\,k\,]$. Notons F_A l'ensemble des applications de $[\,n\,]$ dans A. Comme F_A a pour cardinal j^n, le cardinal de la réunion $\sum_{|A|=j} F_A$ est égal à $\binom{k}{j} j^n$. On peut donc récrire (2.3) comme

$$\sum_f \chi\{f \text{ surjection}\} = \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^{k-j} \sum_{|A|=j} \chi\{f \in F_A\}, \tag{2.4}$$

en utilisant la notation $\chi\{E\} = 1$, ou 0, suivant que l'énoncé "E" est vrai ou non.

Étudions la contribution de chaque application f de $[\,n\,]$ dans $[\,k\,]$ dans chacun des membres. Si f est une surjection, sa contribution est 1 à gauche, et 1 à droite (facteur $j = k$). Maintenant, si le cardinal de $f([\,n\,])$ est $i \leq k-1$ et si $i \leq j$, sa contribution à la somme $\sum_{|A|=j} \chi\{f \in F_A\}$ est égale à $\binom{k-i}{j-i}$, qui est le nombre de tous les sous-ensembles A, de cardinal j, qui contiennent $f([\,n\,])$. La contribution de f au membre de droite est donc :

$$\sum_{0\leq j\leq k} (-1)^{k-j}\binom{k-i}{j-i} = \sum_{0\leq l\leq k-i} (-1)^{k-l-i}\binom{k-i}{l} = 0.$$

Elle est aussi nulle au membre de gauche. La relation (2.4) est donc démontrée.

La *seconde démonstration* est plus intéressante, car elle fait usage d'un principe d'*involution* avec changement de signe. Notons $F_{n,k,j}$ l'ensemble de toutes les applications de $[\,n\,]$ dans un sous-ensemble de $[\,k\,]$ qui soit de cardinal j (mêmes notations que ci-dessus). L'identité (2.3) se récrit

$$k!\,S(n,k) = \sum_{0\le j\le k} (-1)^{k-j}\,|F_{n,k,j}|\,.$$

Pour prouver cette identité, on attache un signe $\operatorname{sgn} f$ à chaque fonction f de l'ensemble $F = \sum_j F_{n,k,j}\quad (0\le j\le k)$, puis on construit une *involution* $f\mapsto g$ qui renverse son signe, i.e., $\operatorname{sgn} g = -\operatorname{sgn} f$, lorsque f n'est pas surjective. Dans le diagramme de la Fig. 3, les lignes *grasses* représentent le sous-ensemble $A(f)$ de $[\,k\,]$ dans lequel l'application f envoie l'ensemble $[\,n\,]$. A gauche, on a : $A(f) = \{1,2,3,4,5,6,8,10,11\}$; à droite, il faut retirer la ligne 6 de cet ensemble. Il faut noter que $A(f)$ n'est pas nécessairement identique à l'ensemble des valeurs prises par f.

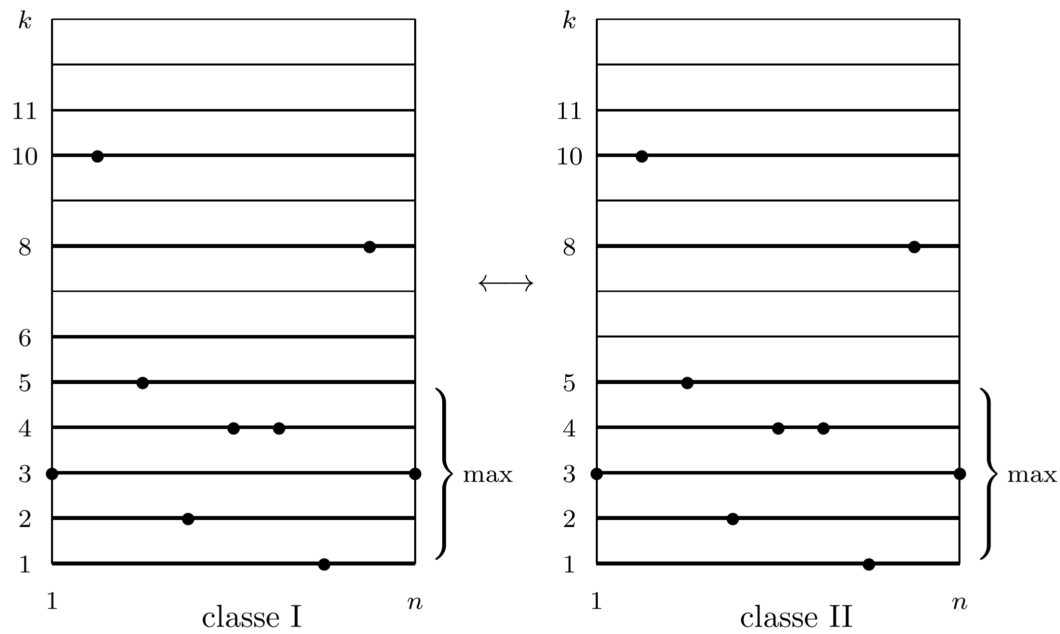


Fig. 3

Si f prend les valeurs 1, 2, … , l, mais non $(l+1)$, on pose $\max f = l$. Si $l = k$, l'application est une surjection de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$. Dans les autres cas, on a $\max f \le k-1$. On dit que f est de classe I ou de classe II, suivant que $\max f + 1$ appartient à $A(f)$ ou non.

On pose $\operatorname{sgn} f = (-1)^{k-|A(f)|}$. L'involution $f\mapsto g$ est définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x\in[\,n\,]$ et par

$$A(g) := \begin{cases} A(f), & \text{si } f \text{ est une surjection}\,;\\ A(f)\setminus\{\max f+1\}, & \text{si } f \text{ est de classe I}\,;\\ A(f)\cup\{\max f+1\}, & \text{si } f \text{ est de classe II.}\end{cases}$$

Il est clair qu'on définit bien ainsi une involution qui renverse le signe "sgn" pour toutes les fonctions qui ne sont pas surjectives. Dans la sommation $\sum_{0\le j\le k}(-1)^{k-j}\,|F_{n,k,j}|$, tous les termes s'annulent, sauf précisément ceux qui correspondent aux surjections. $\square$

Dans la Fig. 3, le graphe à gauche est le graphe d'une fonction f de la classe I et $\max f = 5$. On passe au graphe d'une fonction g de la classe II en mettant *en maigre* la ligne grasse d'ordonnée $\max f + 1 = 6$.

2.3. *Les fonctions génératrices.* — Les formules

$$\sum_{n\ge k} S(n,k)\,\frac{u^n}{n!} = \frac{(e^u-1)^k}{k!} \qquad (k\ge 0), \tag{2.5}$$

$$\sum_{n,k\ge 0} S(n,k)\,\frac{t^k u^n}{n!} = \exp\bigl(t(e^u-1)\bigr), \tag{2.6}$$

ont elles aussi un contenu combinatoire permettant de les démontrer. On s'y prend comme suit : soit $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ une suite d'entiers positifs de somme n. On sait que le coefficient multinomial $\binom{n}{i_1,i_2,\ldots,i_k} = n!\,/(i_1!\,i_2!\,\ldots i_k!)$ est le nombre de suites $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ contenant exactement i_1 fois 1, i_2 fois 2, ..., i_k fois k. C'est donc aussi le nombre d'applications f de $[\,n\,]$ dans $[\,k\,]$ telles que i_1 éléments de $[\,n\,]$ sont envoyés sur 1, i_2 sont envoyés sur 2, ..., i_k sont envoyés sur k. Par conséquent, le nombre de surjections est égal à

$$k!\,S(n,k) = \sum \binom{n}{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \sum \frac{n!}{i_1!\,i_2!\,\ldots i_k!}, \tag{2.5$'$}$$

où la somme est étendue à toutes les suites d'entiers $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ de somme n, telles que $i_1\ge 1$, $i_2\ge 1$, ..., $i_k\ge 1$ (pour une surjection, chaque valeur est *prise*). Or $\sum 1/(i_1!\,i_2!\,\ldots i_k!\,)$ (avec les mêmes conditions que ci-dessus pour les i_j) n'est autre que le coefficient de u^n dans le développement de

$$\Bigl(u+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+\cdots\Bigr)^k = (e^u-1)^k,$$

ce qui prouve (2.5). La formule (2.6) est obtenue en multipliant (2.5) par t^k et en sommant de $k=0$ à $+\infty$. $\square$

2.4. *Une formule explicite.* — L'identité

$$S(n,k) = \sum 1^{c_1}2^{c_2}\ldots k^{c_k} \qquad (c_1+c_2+\cdots+c_k = n-k), \tag{2.7}$$

se démontre aussi combinatoirement de la façon suivante. Multiplions (2.7) par $k!$

$$k!\,S(n,k) = \sum k!\,1^{c_1}2^{c_2}\dots k^{c_k}, \tag{2.8}$$

et interprétons cette formule (2.8) combinatoirement comme suit (*cf.* Exercice 6 pour une démonstration de la formule (2.7) elle-même) :

Partons d'une surjection f de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$ et posons $d_1 = 1$; désignons ensuite par d_2 le plus petit entier satisfaisant $d_2 > d_1$ et $f(d_2) \neq f(d_1)$, puis d_3 le plus petit entier satisfaisant $d_3 > d_2$ et $f(d_3) \neq f(d_1)$, $f(d_3) \neq f(d_2)$, etc... Comme f est surjective, on définit ainsi une suite croissante de k entiers $d_1 = 1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k \leq n$ telle que la suite $\sigma := (f(d_1), f(d_2), \dots, f(d_k))$ soit une *permutation* de $(1, 2, \dots, k)$. Posons $c_1 = d_2 - d_1 - 1$, $c_2 = d_3 - d_2 - 1$, $\dots$, $c_k = n - d_k$. On a $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = n - k$. Par ailleurs, pour chaque $j = 1, 2, \dots, k$, notons g_j la restriction de f à l'intervalle $[d_j + 1, d_{j+1} - 1]$ [par convention : $d_{k+1} = n$]. Par construction, g_j est une application de $[d_j + 1, d_{j+1} - 1]$ dans $\{f(d_1), f(d_2), \dots, f(d_j)\}$ (contenant exactement j éléments).

Chaque surjection est ainsi caractérisée par un triplet formé d'une permutation σ (de k entiers), d'une suite $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ d'entiers de somme $(n-k)$ et par une suite $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ d'applications, où chaque g_j est une application d'un ensemble de cardinal c_j dans un ensemble de cardinal j $(j = 1, 2, \dots, k)$. La formule (2.8) ne reflète que le dénombrement des surjections suivant cette décomposition.

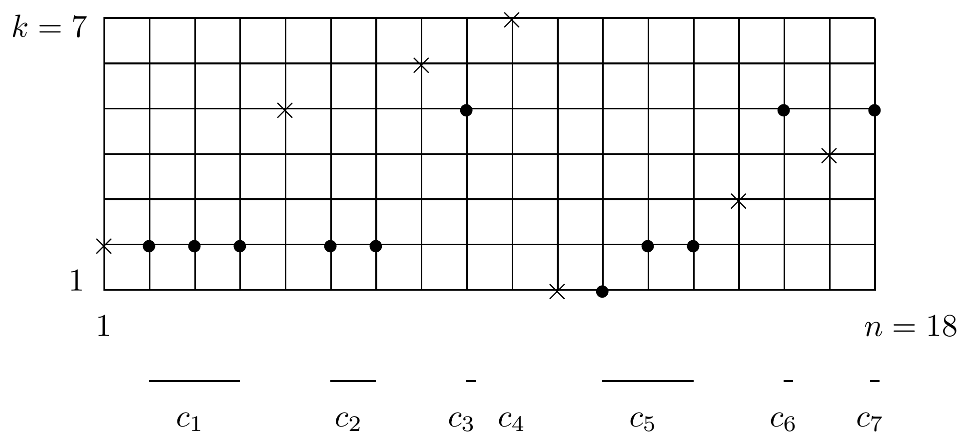


Fig. 4

La construction peut être directement vue sur le graphe de f, comme illustrée dans le schéma de la Fig. 4, où $k = 7$, $n = 18$ et où la surjection représentée par son graphe est envoyée sur le triplet

$$(\sigma, (c_1, \dots, c_k), (g_1, \dots, g_k)),$$

donné par : $\sigma = (2,5,6,7,1,3,4)$, $(d_1,\ldots,d_k) = (1,5,8,10,11,15,17)$, $(c_1,\ldots,c_k) = (3,2,1,0,3,1,1)$ et $g_1 = (2,2,2)$, $g_2 = (2,2)$, $g_3 = (5)$, $g_4 =$ application vide, $g_5 = (1,2,2)$, $g_6 = (5)$, $g_7 = (5)$.

Les points de coordonnées $(d_i, f(d_i))$ sont matérialisés par des croix, les autres points $(x, f(x))$, où $x \neq d_i$ pour tout i, sont représentés par des gros points.

Remarque. — On peut récrire l'identité (2.8) sous la forme

$$k!\,S(n,k) = \sum 1^{i_1} 2^{i_2} \ldots k^{i_k}, \tag{2.8$'$}$$

où la somme est sur toutes les suites d'entiers $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ telles que $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$ et $i_1 \geq 1$, $i_2 \geq 1$, … , $i_k \geq 1$. Les deux sommations des formules (2.5′) et (2.8′) se font ainsi sur *le même ensemble* de suites d'entiers. La suite $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ a la pondération $n!/(i_1!\,i_2!\,\ldots i_k!)$ dans (2.5′) et $1^{i_1}2^{i_2}\ldots k^{i_k}$ dans (2.8′). Il est tout à fait remarquable que ces sommations soient égales :

$$\sum \frac{n!}{i_1!\,i_2!\,\ldots i_k!} = \sum 1^{i_1} 2^{i_2} \ldots k^{i_k}.$$

2.5. *La fonction génératrice verticale.* — La formule (2.7) entraîne immédiatement l'identité suivante :

$$\sum_{n\geq k} S(n,k) u^{n-k} = \frac{1}{(1-u)(1-2u)\ldots(1-ku)} \qquad (k \geq 1). \tag{2.9}$$

Il suffit, en effet, de développer le second membre de (2.9) et de chercher le coefficient de u^{n-k} pour voir qu'il est bien égal au second membre de (2.7).

On peut également démontrer (2.9) directement à partir de la définition (2.1) des nombres de Stirling. Il suffit de considérer les séries génératrices “verticales” $S_k(u) = \sum_{n\geq k} S(n,k)u^n$ $(k \geq 1)$. Posant $S_0(u) = 1$, on voit que (2.1) se retraduit en l'identité : $(1-ku)S_k(u) = uS_{k-1}(u)$ $(k \geq 1)$. Par itération, on obtient :

$$\begin{aligned} S_k(u) &= \frac{u^k}{(1-u)(1-2u)\ldots(1-ku)} \\ &= u^k(1+u+u^2+\cdots)\ldots(1+ku+k^2u^2+\cdots). \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de u^n, on retrouve bien (2.9).

2.6. *Un comptage en termes de quasi-permutations.* — On dit qu'une partie Q de l'ensemble produit $[\,n\,] \times [\,n\,]$ est une *quasi-permutation*, si elle est contenue dans le graphe $\{(k,\sigma(k)) : k \in [\,n\,]\}$ d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit, de plus, que Q est *supradiagonale*, si la condition $(k,k') \in Q$ entraîne $k < k'$.

Soit $\pi = \{E_1,\ldots,E_k\}$ une partition de $[\,n\,]$ en k blocs. On note $M(\pi)$ l'ensemble des éléments minima qui apparaissent dans chacun des blocs :

$$M(\pi) := \{\min E_1, \min E_2, \ldots, \min E_k\}.$$

On peut aussi considérer les blocs de π comme des classes d'une relation d'équivalence $E \subset [\,n\,]\times[\,n\,]$. A chaque bloc $E_j = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_{m_j}\}$ comprenant $m_j \geq 1$ éléments, associons, en effet, la quasi-permutation supradiagonale $E'_j = \{(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{m_j-1},i_{m_j})\}$ contenant m_j-1 (éventuellement zéro) éléments de $[\,n\,]\times[\,n\,]$. L'ensemble $Q = \bigcup_j E'_j$ $(1 \leq j \leq k)$ est alors une quasi-permutation supradiagonale, de cardinal $\sum_j (m_j-1) = n-k$.

Exemple. — A la partition $\pi = \{\{1,3,5,6,9\},\ \{4\},\ \{2,7,8\}\}$ de l'intervalle $\{1,2,\ldots,9\}$ en $k=3$ blocs, correspond la quasi-permutation supradiagonale $Q = E'_1 \cup E'_2 \cup E'_3$, où $E'_1 = \{(1,3),(3,5),(5,6),(6,9)\}$, $E'_2 = \emptyset$, $E'_3 = \{(2,7),(7,8)\}$. Les éléments de Q sont représentés dans la Fig. 5, par des points pour les éléments de E'_1 et par des croix pour ceux de E'_3.

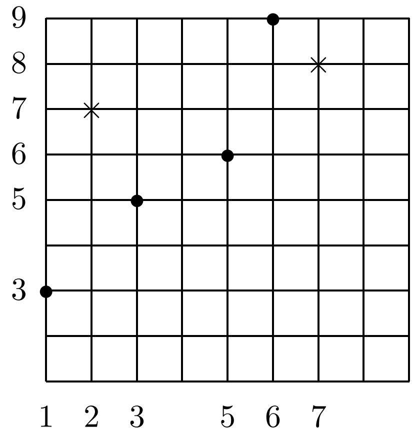


Fig. 5

Dans la proposition suivante, on donne une construction explicite de l'application $\pi \mapsto Q$.

Proposition 2.1. — *L'application $\pi \mapsto Q$ est une bijection de l'ensemble des partitions de $[\,n\,]$ en k blocs sur l'ensemble des quasi-permutations de $[\,n\,]\times[\,n\,]$, supradiagonales, de cardinal $(n-k)$, telle que la projection de Q sur l'axe vertical soit égale à*

$$\operatorname{pr}_y Q = [\,n\,] \setminus M(\pi). \tag{2.10}$$

Par conséquent, $S(n,k)$ est aussi égal au nombre de quasi-permutations Q de $[\,n\,]\times[\,n\,]$, supradiagonales, de cardinal $n-k$.

Démonstration. — L'application $\pi\mapsto Q$ est évidemment injective. De plus, la propriété (2.10) est satisfaite, puisque, ou bien le bloc E_j est un singleton et la quasi-permutation E'_j est vide, ou bien E_j a au moins deux éléments, et son minimum i_1 (appartenant à $M(\pi)$) n'apparaît pas comme seconde coordonnée dans l'un quelconque des points de E'_j.

Explicitons l'application inverse $Q\mapsto\pi$. Étant donnée une quasi-permutation supradiagonale Q ayant $(n-k)$ éléments, on définit $M(\pi)$ par (2.10), qui est donc de cardinal k. Soit $i\in M(\pi)$; si la verticale $\{i\}\times[\,n\,]$ ne contient aucun point de Q, on forme le bloc-singleton $\{i\}$. Si cette verticale contient un point (forcément unique) (i,j), on pose $i_1=i$, $i_2=j$. On détermine ensuite si la verticale $\{i_2\}\times[\,n\,]$ contient ou non un point de Q. Si ce n'est pas le cas, on forme le bloc-doubleton $\{i_1,i_2\}$. Si la verticale contient un point (i_2,k), on pose $i_3=k$ et on regarde si la verticale $\{i_3\}\times[\,n\,]$, contient ou non un point de Q et ainsi de suite. On forme ainsi un sous-ensemble $E_i=\{i_1<i_2<i_3<\cdots\}$ de $[\,n\,]$. Lorsque cet algorithme est appliqué à chacun des k éléments de $M(\pi)$, on forme k sous-ensembles de $[\,n\,]$, forcément disjoints deux à deux, puisque Q est une quasi-permutation, et de réunion $[\,n\,]$, car pour tout élément (i,j), il existe une chaîne unique $(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{l-1},i_l)$ d'éléments de Q, telle que $(i,j)=(i_{l-1},i_l)$ et $i_1\in M(\pi)$. $\square$

Par exemple, $S(4,2)=7$ et, en effet, il y a sept quasi-permutations supradiagonales Q dans le carré $[\,4\,]\times[\,4\,]$, de cardinal 2, comme indiqué dans le diagramme de la Fig. 6 avec leurs partitions associées.

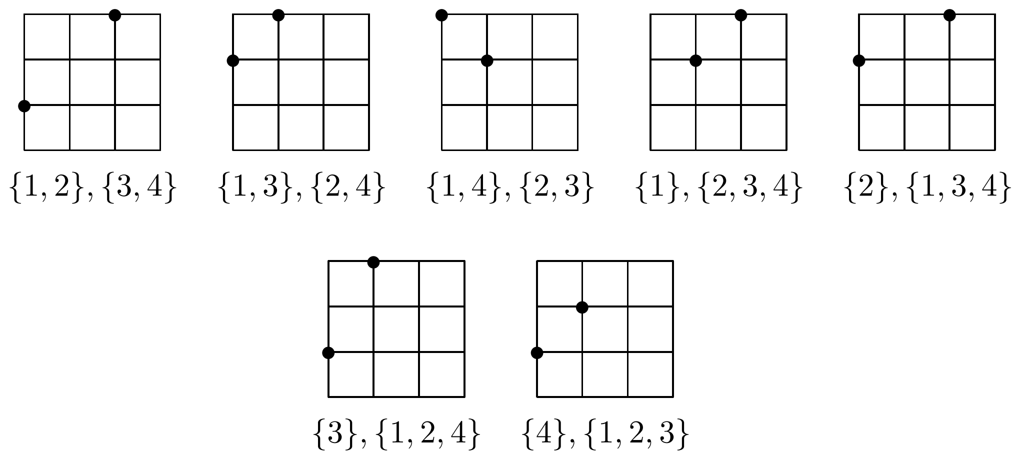


Fig. 6

Remarque. — Dans la précédente correspondance $\pi\mapsto Q$, si un entier l n'apparaît dans aucune des coordonnées $\{(i_1,j_1),\ldots,(i_{n-k},j_{n-k})\}$

des points de la quasi-permutation supradiagonale Q, alors la partition correspondante π contient le singleton $\{l\}$. A la quasi-permutation vide correspond la partition n'ayant que des singletons. A la quasi-permutation $\{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\}$ correspond la partition composée du seul bloc $[\,n\,]$.

Remarque. — Partant de la formule de récurrence (2.1) sur les nombres de Stirling de seconde espèce, on peut *algébriquement* retrouver les autres formules (2.2) – (2.9), sans faire appel à des constructions combinatoires.*

2.7. *Les nombres de Bell.* — Les nombres $B'_n := \sum\limits_{1\le k\le n} S(n,k)$ s'appellent les *nombres de Bell.* Naturellement, B'_n est le nombre *total* de partitions de l'intervalle $[\,n\,]$. Les premières valeurs apparaissent dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
B'_n	1	2	5	15	52	203	877

La série formelle apparaissant en (2.5) est d'ordre k. On peut donc sommer ces séries par rapport à k. Après réarrangement des termes du membre de gauche, on obtient l'identité :

$$\sum_{n\ge 0} B'_n \frac{u^n}{n!} = \exp(e^u - 1), \tag{2.11}$$

en posant $B'_0 = 1$. Par dérivation, on obtient

$$\sum_{n\ge 0} B'_{n+1} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n\ge 0} B'_n \frac{u^n}{n!} \cdot e^u,$$

et en déterminant le coefficient de u^n dans chaque membre, on en déduit la relation de récurrence

$$B'_{n+1} = \sum_{0\le j\le n} \binom{n}{j} B'_j \qquad (n \ge 0). \tag{2.12}$$

Cette relation peut aussi s'établir directement de la façon suivante : soient π une partition de $[\,n+1\,]$ et $E(\pi)$ l'ensemble des éléments (autres que $(n+1)$) se trouvant dans le bloc de π contenant $(n+1)$. En retirant ce bloc de π, on obtient une partition π' de l'ensemble $[\,n+1\,] \setminus E(\pi)$. La formule (2.12) n'est rien d'autre qu'une conséquence du fait que l'application $\pi \mapsto (E(\pi), \pi')$ est bijective.

* Voir Comtet (Louis). — *Analyse combinatoire*, vol. 2. — Paris, Presses Universitaires de France, 1970, p. 38–44.

3. Propriétés de congruence

La congruence

$$a^p - a \equiv 0 \pmod p, \qquad (p \text{ premier}) \tag{3.1}$$

appelée “petit théorème de Fermat,” est valable pour tout entier a. Lorsque $p \nmid a$ (*p ne divise pas a*), on peut, de plus, écrire :

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p. \tag{3.2}$$

La prochaine congruence résulte immédiatement du fait que tous les entiers inférieurs à un nombre premier sont premiers avec celui-ci : soient p premier et j un entier tel que $1 \le j \le p-1$. Alors

$$\binom{p}{j} \equiv 0 \pmod p. \tag{3.3}$$

Lemme 3.1. — *Soient p un nombre premier et $0 \le j \le p-1$. Alors*

$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod p.$$

Démonstration. — Le lemme est une conséquence immédiate de (3.3) et du triangle de Pascal. Pour $j = 0$, on a $\binom{p-1}{j} = 1 \equiv (-1)^0 \pmod p$. Pour $j \ge 1$, on utilise la relation $\binom{p}{j} = \binom{p-1}{j} + \binom{p-1}{j-1}$ et (3.3), pour obtenir, par récurrence sur j,

$$\binom{p-1}{j} \equiv \binom{p}{j} - (-1)^{j-1} \equiv (-1)^j \pmod p. \quad \square$$

Lemme 3.2. — *Pour $2n \ge 3$ on a :*

$$3!\, S(2n,3) \equiv 0 \pmod 4.$$

Démonstration. — La formule (2.3) entraîne : $3!\, S(2n,3) = 3 \cdot 1^{2n} - 3 \cdot 2^{2n} + 3^{2n} \equiv 3 + 1 \equiv 0 \pmod 4$. $\square$

Rappelons que le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ des entiers modulo p admet une *racine primitive*, c'est-à-dire contient un élément non nul g, tel que $g^{p-1} = 1$ et tel que toutes les puissances g^k $(1 \le k \le p-1)$ soient distinctes. Par exemple, 2 est une racine primitive modulo 5, puisque $2^4 = 16 \equiv 1$ et que 2, $2^2 = 4$ et $2^3 \equiv 3$ sont les trois autres éléments non nuls de ce corps.

LEMME 3.3. — *Soient p un premier, $n \geq 1$ et $\mathcal{P}_n(k)$ la somme des puissances $\mathcal{P}_n(k) = 1^n + 2^n + \cdots + k^n$. Alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(p-1) &\equiv 0 \pmod p, \quad \text{si } (p-1) \nmid n\,;\\ &\equiv -1 \pmod p, \quad \text{si } (p-1) \mid n. \end{aligned}$$

Démonstration. — Si $p-1$ ne divise pas n et si g est une racine primitive modulo p, alors $g^n \not\equiv 1 \pmod p$. Comme les deux ensembles $\{a : 1 \leq a \leq p-1\}$ et $\{ag : 1 \leq a \leq p-1\}$ sont identiques, on a : $\sum (ag)^n \equiv \sum a^n \pmod p$, de sorte que $(g^n - 1)\sum a^n \equiv 0 \pmod p$, et par conséquent $\sum a^n \equiv 0 \pmod p$.

Si $(p-1) \mid n$, il résulte de (3.2) que $a^n \equiv 1 \pmod p$ pour tout $a = 1, 2, \ldots, p-1$. Par conséquent, $\mathcal{P}_n(p-1) \equiv (p-1) \equiv -1 \pmod p$. $\square$

LEMME 3.4. — *Si p est un premier, alors*

$$(p-1)!\, S(2n, p-1) \equiv \begin{cases} 0 \pmod p & \text{si } (p-1) \nmid 2n\,; \\ -1 \pmod p & \text{si } (p-1) \mid 2n. \end{cases}$$

Démonstration. — Si $p = 2$, alors $S(2n, 1) = 1 \equiv -1 \pmod 2$. Si p est un nombre premier impair, la formule (2.3) implique

$$\begin{aligned} (p-1)!\, S(2n, p-1) &= \sum_{0 \leq j \leq p-1} (-1)^{p-1-j} \binom{p-1}{j} j^{2n} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq p-1} (-1)^j \binom{p-1}{j} j^{2n} \equiv \sum_{0 \leq j \leq p-1} (-1)^{2j} j^{2n}, \end{aligned}$$

d'après le Lemme 3.1. Le présent lemme est donc une conséquence du Lemme 3.3. $\square$

Remarque. — Le Lemme 3.4 dit en fait qu'on peut partitionner les surjections de $[\,2n\,]$ sur $[\,p-1\,]$ de façon que le nombre de surjections dans chaque bloc soit un multiple de p, lorsque $(p-1)$ ne divise pas $2n$. Lorsque $(p-1)$ divise $2n$, il reste un bloc de cardinal $(p-1)$. Comme le lemme 3.4 est l'étape cruciale dans la démonstration du théorème de von Staudt-Clausen, la découverte d'un bon groupement de ces surjections montrerait que ce théorème repose en fait sur un simple lemme combinatoire.

4. Le théorème de von Staudt-Clausen

Nous disposons désormais de tous les outils pour établir ce théorème. Rappelons-en l'énoncé.

Théorème 4.1. — *Pour chaque $n \geq 1$, on a l'identité :*

$$(-1)^n B_{2n} = A_{2n} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ (p-1) | 2n}} \frac{1}{p}\,, \tag{4.1}$$

où A_{2n} est un nombre entier.

Démonstration. — Partons du développement

$$u = \log(1 + e^u - 1) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{(e^u - 1)^k}{k}.$$

En utilisant (2.5), on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{u}{e^u - 1} &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{n \geq k} k!\, S(n,k) \frac{u^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k+1} k!\, S(n,k). \end{aligned}$$

En comparant maintenant avec la fonction génératrice des nombres de Bernoulli, donnée en (1.1), on obtient :

$$(-1)^{n+1} B_{2n} = \sum_{0 \leq k \leq 2n} \frac{(-1)^k}{k+1} k!\, S(2n,k).$$

Pour $0 \leq k \leq 2n$, posons : $H_k = \dfrac{(-1)^k}{k+1} k!\, S(2n,k)$. Lorsque $k = 1$, on obtient $H_1 = -\frac{1}{2}$. Les entiers $k \geq 2$ se répartissent en quatre catégories :

(i) $k \nmid 2n$ et $k+1$ est un premier impair p ;
(ii) $k \mid 2n$ et $k+1$ est un premier impair p ;
(iii) $k + 1 = 4$;
(iv) $k + 1 = ab$, avec $ab \geq 6$, $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

Dans le cas (i), le Lemme 3.4 implique que $H_k = H_{p-1}$ est un entier. Dans le cas (ii), le même lemme dit que

$$H_{p-1} = \frac{(-1)^p}{p} + K_p$$

où K_p est un entier. A l'aide du Lemme 3.2, on conclut que H_3 est aussi un entier. Enfin, dans le cas (iv), on voit que $k!$ est divisible par $(k+1)$ et H_k est encore un entier. On en déduit

$$(-1)^{n+1} B_{2n} = -\frac{1}{2} + \sum_{(p-1) | 2n} \frac{(-1)^p}{p} + K \qquad (p \text{ un premier impair}),$$

où K est un entier. On peut récrire cette identité sous la forme (4.1). □

Le théorème équivaut à dire que $p(-1)^n B_{2n} \equiv 0 \pmod p$, si p est un premier tel que $(p-1)$ ne divise pas $2n$, et $p(-1)^n B_{2n} \equiv 1 \pmod p$, si p est un premier tel que $(p-1)$ divise $2n$.

5. Les nombres factoriels centraux

La définition de ces nombres, notés $T(n,k)$, est très proche de celle des nombres de Stirling :

$$T(0,0)=T(1,1)=1\,;$$
$$(5.1)\qquad T(0,k)=0 \quad \text{pour } k\neq 0\,; \qquad T(1,k)=0 \quad \text{pour } k\neq 1\,;$$
$$T(n,k)=T(n-2,k-2)+\frac{1}{4}k^2T(n-2,k) \qquad (-2\le k\le n\,;\ n\ge 2).$$

Les premières valeurs de ces nombres apparaissent dans le tableau de la Fig. 7.

k=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n=0	1									
1	0	1								
2	0	0	1							
3	0	$1/4$	0	1						
4	0	0	1	0	1					
5	0	$1/4^2$	0	$10/4$	0	1				
6	0	0	1	0	5	0	1			
7	0	$1/4^3$	0	$91/4^2$	0	$35/4$	0	1		
8	0	0	1	0	21	0	14	0	1	
9	0	$1/4^4$	0	$820/4^3$	0	$966/4^2$	0	$84/4$	0	1

Fig. 7

On observe que les nombres de rang pair $T(2n,2k)$ sont entiers, en fait, donnés par la récurrence

$$T(2n,2k)=T(2n-2,2k-2)+k^2T(2n-2,2k) \qquad (1\le k\le n),$$

avec $T(2n,2k+1)=0$ pour tout k. Par ailleurs, les nombres $4^kT(2n+1,2n+1-2k)$ sont des entiers. Enfin, $T(2n+1,1)=1/4^n$ $(n\ge 0)$.

5.1. *Fonction génératrice verticale.* — Donnons l'analogue pour les $T(n,k)$ de la formule (2.9). Posons $T_k(u):=\sum_{n\ge k}T(n,k)u^n$. La formule (5.1) implique $(1-\frac14 k^2u^2)T_k(u)=u^2T_{k-2}(u)$. Comme, d'autre part, $T_0(u)=1$ et $T_1(u)=u/(1-\frac14 u^2)$, on en déduit par itération :

$$(5.2)\qquad T_{2m}(u)=\frac{u^{2m}}{(1-m^2u^2)(1-(m-1)^2u^2)\dots(1-u^2)}\,;$$

$$(5.3)\ T_{2m+1}(u)=\frac{u^{2m+1}}{\Bigl(1-\frac{(2m+1)^2}{4}u^2\Bigr)\Bigl(1-\frac{(2m-1)^2}{4}u^2\Bigr)\dots\Bigl(1-\frac14u^2\Bigr)}\,;$$

formules valables pour tout $m\ge 0$.

En identifiant les coefficients de u^{2n} dans (5.2), on trouve :

$$T(2n,2k)=\sum\bigl(1^{c_1}2^{c_2}\dots k^{c_k}\bigr)^2\qquad(c_1+c_2+\cdots+c_k=n-k).\tag{5.4}$$

5.2. *La fonction génératrice exponentielle des nombres factoriels centraux.* — Des formules (5.2) et (5.3), nous allons déduire à présent une expression pour la fonction génératrice *exponentielle* des $T(n,k)$, en utilisant la technique de la transformation inverse de Laplace développée dans le chapitre 1, § 11. Cette expression sera utilisée dans l'étude ci-après sur les nombres de Genocchi.

Chacune des fractions rationnelles $T_{2m}(u), T_{2m+1}(u)$ $(m\ge 0)$ se décompose en éléments simples :

$$T_{2m}(u)=a_{2m,0}+\sum_{1\le|j|\le m}\frac{a_{2m,j}}{1-ju}=\sum_{-m\le j\le m}\frac{a_{2m,j}}{1-ju}\,;\tag{5.5}$$

$$T_{2m+1}(u)=\sum_{0\le j\le m}\Bigl(\frac{a_{2m+1,j}}{1-\frac{2j+1}{2}u}+\frac{b_{2m+1,-j}}{1+\frac{2j+1}{2}u}\Bigr).\tag{5.6}$$

On obtient facilement les évaluations :

$$a_{2m,j}=\frac{(-1)^{m-j}}{(m+j)!\,(m-j)!}\qquad(-m\le j\le m)\,;$$
$$a_{2m+1,j}=\frac{(-1)^{m-j}}{(m+j+1)!\,(m-j)!}\,;\quad b_{2m+1,-j}=-a_{2m+1,j}\quad(0\le j\le m).$$

Ceci permet de déduire, dans un premier temps, la fonction génératrice *ordinaire* des $T(n,k)$:

$$\begin{aligned}\sum_{n,k}T(n,k)u^nv^k&=\sum_{k\ge0}v^kT_k(u)\\&=\sum_{m\ge0}\Bigl(\frac{v^{2m}u^{2m}}{(1-m^2u^2)\dots(1-u^2)}+\frac{v^{2m+1}u^{2m+1}}{\Bigl(1-\frac{(2m+1)^2}{4}u^2\Bigr)\dots\Bigl(1-\frac14u^2\Bigr)}\Bigr)\\&=\sum_{m\ge0}\Bigl(v^{2m}\sum_{-m\le j\le m}\frac{(-1)^{m-j}}{(m+j)!\,(m-j)!}\frac{1}{1-ju}\\&\qquad+v^{2m+1}\sum_{0\le j\le m}\Bigl(\frac{(-1)^{m-j}}{(m+j+1)!\,(m-j)!}\frac{1}{1-\frac{2j+1}{2}u}\\&\qquad\qquad+\frac{(-1)^{m-j+1}}{(m+j+1)!\,(m-j)!}\frac{1}{1+\frac{2j+1}{2}u}\Bigr)\Bigr).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Comme l'ordre de $T_k(u)$ est égal à k, on obtient, par application de la transformation de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\Bigl(\sum_{n,k} T(n,k)u^n v^k\Bigr) = \mathcal{L}^{-1}\Bigl(\sum_{k\ge 0} v^k T_k(u)\Bigr) = \sum_{k\ge 0} \mathcal{L}^{-1}(v^k T_k(u)).$$

Se rappelant ensuite que $\mathcal{L}^{-1}((1-ju)^{-1}) = e^{ju}$ (chap. 1, formule (11.4)), on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{n,k} \frac{T(n,k)u^n v^k}{n!} = \sum_{m\ge 0}\Bigl(v^{2m} &\sum_{-m\le j\le m} \frac{(-1)^{m-j}}{(m+j)!\,(m-j)!}e^{ju}\\ &+ v^{2m+1}\sum_{0\le j\le m}\Bigl(\frac{(-1)^{m-j}}{(m+j+1)!\,(m-j)!}e^{(2j+1)u/2}\\ &\qquad + \frac{(-1)^{m-j+1}}{(m+j+1)!\,(m-j)!}e^{-(2j+1)u/2}\Bigr)\Bigr).\end{aligned}$$

Or, avec le changement de variables $k = j+m$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{-m\le j\le m} \frac{(-1)^{m-j}}{(m+j)!\,(m-j)!}e^{ju} &= \frac{1}{(2m)!}\sum_{0\le k\le 2m}\binom{2m}{k}e^{(k-m)u}(-1)^{2m-k}\\ &= \frac{1}{(2m)!}\sum_{0\le k\le 2m}\binom{2m}{k}e^{ku/2}e^{-(2m-k)u/2}(-1)^{2m-k}\\ &= \frac{1}{(2m)!}(e^{u/2}-e^{-u/2})^{2m}.\end{aligned}$$

On a de même :

$$\sum_{0\le j\le m}\Bigl(\frac{(-1)^{m-j}e^{(2j+1)u/2}}{(m+j+1)!\,(m-j)!} + \frac{(-1)^{m-j+1}e^{-(2j+1)u/2}}{(m+j+1)!\,(m-j)!}\Bigr) = \frac{1}{(2m+1)!}(e^{u/2}-e^{-u/2})^{2m+1}.$$

On en tire :

$$\begin{aligned}&(5.8) && \sum_{n,k}\frac{T(n,k)u^n v^k}{n!} = \sum_{k\ge 0}\frac{v^k}{k!}\bigl(e^{u/2}-e^{-u/2}\bigr)^k\\ &&& = \exp\bigl(v(e^{u/2}-e^{-u/2})\bigr)\\ &(5.9) && = \exp\bigl(2v\,\mathrm{sh}(u/2)\bigr).\end{aligned}$$

Remarque. — Cette formule peut aussi s'obtenir de la formule "inverse" des $T(n,k)$, à savoir :

$$(5.10)\qquad k!\,T(n,k) = \sum_{j\ge 0}\binom{k}{j}(-1)^j\bigl(\tfrac12 k - j\bigr)^n.$$

Notons encore une formule “des puissances” :

$$x^n = \sum_{0\le k\le n} T(n,k)\, x(x+\tfrac{k}{2}-1)(x+\tfrac{k}{2}-2)\dots(x+\tfrac{k}{2}-k+1). \tag{5.11}$$

5.3. *Une interprétation combinatoire des nombres $T(2n,2k)$.* — Dans la section 2.6, nous avons associé à toute partition π l'ensemble $M(\pi)$ des éléments minima dans chaque bloc. Les nombres factoriels centraux peuvent s'interpréter comme des couples de partitions liées par la fonction M, dans le sens de la proposition suivante.

Proposition 5.1. — *L'entier $T(2n,2k)$ est égal au nombre de couples (π_1,π_2) de partitions de $[\,n\,]$ en k blocs telles que $M(\pi_1)=M(\pi_2)$.*

Démonstration. — Pour $n=k=1$, il y a un seul couple satisfaisant la propriété et l'on a aussi $T(2,2)=1$. Supposons $n\ge 2$. Par récurrence, $T(2n-2,2k-2)$ est le nombre de couples (π_1,π_2) de partitions de $[\,n\,]$ en k blocs comprenant le singleton $\{n\}$, telles que $M(\pi_1)=M(\pi_2)$. Pour construire ensuite un couple (π_1,π_2) de partitions de $[\,n\,]$ en k blocs, tel que $M(\pi_1)=M(\pi_2)$ et tel que $n\notin M(\pi_1)$ et $n\notin M(\pi_2)$ [i.e., $\{n\}$ n'apparaît pas comme bloc dans π_1, ni dans π_2], il suffit de prendre un couple (π_1',π_2') de partitions de $[\,n-1\,]$ en k blocs (par récurrence, il y a $T(2n-2,2k)$ tels couples) et d'inclure n dans l'un quelconque des blocs de π_1' et de π_2'. Il y a exactement k^2 possibilités de le faire. □

Utilisons maintenant la bijection $\pi\mapsto Q$ décrite au paragraphe 2.6 dans la Proposition 2.1. Le corollaire suivant en découle immédiatement.

Corollaire 5.2. — *L'entier $T(2n,2k)$ est égal au nombre de couples (Q_1,Q_2) de quasi-permutations supradiagonales de l'ensemble $[\,n\,]\times[\,n\,]$ telles que*

(i) $|Q_1|=|Q_2|=n-k$;

(ii) *les projections de Q_1 et Q_2 sur l'axe vertical sont identiques :* $\mathrm{pr}_y(Q_1)=\mathrm{pr}_y(Q_2)$.

6. Les nombres de Genocchi

Dans les paragraphes précédents, il a été démontré que chaque nombre de Bernoulli B_{2n} était un nombre rationnel a_n/b_n ayant la propriété

$$b_n = \prod_{(p-1)\mid 2n} p \ = 2.3.p_1.p_2.\cdots \qquad (p \text{ premier}).$$

Si $(p-1)$ divise $2n$ et si a est un entier, on a $a(a^{2n}-1)=a(a^{p-1}-1)m$, pour un certain entier m. Par conséquent, le petit théorème de Fermat implique la congruence

$$a(a^{2n}-1)\equiv a(a^{p-1}-1)m\equiv 0 \pmod p.$$

En particulier, le dénominateur b_n de B_{2n} divise $a(a^{2n}-1)$. En d'autres termes, pour tout entier a, *l'expression* $a(a^{2n}-1)B_{2n}$ *est un entier.* Le plus petit entier a pour lequel le résultat est non trivial est $a=2$. Ceci conduit à la définition des *nombres de Genocchi* :

$$G_{2n} := 2(2^{2n}-1)B_{2n} \qquad (n \geq 1). \tag{6.1}$$

Comme le dénominateur de B_{2n} est libre de carré et multiple de 2, chaque nombre de Genocchi G_{2n} est un *entier impair.*

Les premières valeurs des nombres de Genocchi apparaissent dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
B_{2n}	1/6	1/30	1/42	1/30	5/66	691/2730	7/6
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227

La définition (6.1) et la fonction génératrice des nombres de Bernoulli permettent d'obtenir très rapidement une expression pour la fonction génératrice exponentielle des nombres de Genocchi *signés* $(-1)^n G_{2n}$ $(n \geq 1)$. En effet, posons

$$G(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^n G_{2n} = \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^n 2(2^{2n}-1)B_{2n},$$

$$B(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n+1} B_{2n} = \frac{u}{e^u-1} - 1 + \frac{u}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} G(u) &= \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n+1} 2B_{2n} - \sum_{n\geq 1} \frac{(2u)^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n+1} 2B_{2n} \\ &= 2\big(B(u) - B(2u)\big) \\ &= 2\Big(\frac{u}{e^u-1} - 1 + \frac{u}{2} - \frac{2u}{e^{2u}-1} + 1 - u\Big) = \frac{2u}{e^u+1} - u. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{2u}{e^u+1} = u + \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^n G_{2n}. \tag{6.2}$$

Le calcul de la fonction génératrice exponentielle des nombres G_{2n} $(n \geq 1)$ eux-mêmes donne

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} G_{2n} &= \sum_{n\geq 1} \frac{(iu)^{2n}}{(2n)!}(-1)^n G_{2n} \\ &= \frac{2iu}{e^{iu}+1} - iu = \frac{iu(1-e^{iu})}{1+e^{iu}}, \end{aligned}$$

soit

$$u\,\mathrm{tg}(u/2)=\sum_{n\ge 1}\frac{u^{2n}}{(2n)!}G_{2n}. \tag{6.3}$$

Comme pour les nombres de Bernoulli, on vérifie sans peine, en posant $g_1=1$, $g_{2n}=(-1)^nG_{2n}$, $g_{2n+1}=0$ pour $n\ge 1$, que l'identité (6.2) est encore équivalente à la relation :

$$g_0=0,\qquad g_1=1,\qquad (g+1)^n+g_n=0\quad (n\ge 2), \tag{6.4}$$

avec la convention symbolique que $g^k=g_k$ une fois fait le développement. L'identité (6.2) se récrit donc

$$\frac{2u}{e^u+1}=\sum_{n\ge 0}\frac{u^n}{n!}g_n, \tag{6.5}$$

les premières valeurs des nombres g_n $(n\ge 0)$ étant données par :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
g_n	0	1	−1	0	1	0	−3	0	17	0	−155	0	2073	0	−38227

7. La conjecture de Gandhi

L'expression suivante des nombres de Genocchi à l'aide des nombres factoriels centraux

$$g_{2n+2}=\sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}(k!)^2T(2n,2k), \tag{7.1}$$

est due à Riordan et Stein. Ils ont ainsi pu reformuler et démontrer une conjecture de Gandhi sur les nombres de Genocchi. Cette expression est importante d'un point de vue combinatoire, car elle est à l'origine de l'étude géométrique de ces nombres faite par Dumont, étude que nous allons reprendre dans ce chapitre. La démonstration de (7.1) que nous donnons ici reprend une méthode de Barsky.

Partons de l'identité (5.8), à savoir

$$\sum_{n,k}\frac{T(n,k)u^nv^k}{n!}=\sum_{k\ge 0}\frac{v^k}{k!}\big(e^{u/2}-e^{-u/2}\big)^k,$$

et écrivons que les coefficients de v^{2k} sont les mêmes dans les deux membres. On obtient, pour tout $k\ge 0$, l'identité

$$\sum_{n\ge k}T(2n,2k)\frac{u^{2n}}{(2n)!}=\frac{(e^{u/2}-e^{-u/2})^{2k}}{(2k)!},$$

et donc aussi

$$\sum_{n\ge k}(-1)^{k+1}(k!)^2T(2n,2k)\frac{u^{2n}}{(2n)!}=(-1)^{k+1}(k!)^2\frac{(e^{u/2}-e^{-u/2})^{2k}}{(2k)!}.$$

Comme chacun des deux membres représente une série formelle en u d'ordre $2k$, on peut faire la sommation en k et obtenir

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge 0}\sum_{n\ge k}(-1)^{k+1}(k!)^2T(2n,2k)\frac{u^{2n}}{(2n)!}&\\ =\sum_{n\ge 0}\frac{u^{2n}}{(2n)!}\sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}(k!)^2T(2n,2k)&\\ =\sum_{k\ge 0}(-1)^{k+1}(k!)^2\frac{(e^{u/2}-e^{-u/2})^{2k}}{(2k)!}&,\end{aligned}$$

de sorte que l'identité (7.1) peut se récrire :

$$\sum_{n\ge 0}\frac{u^{2n}}{(2n)!}g_{2n+2}=\sum_{k\ge 0}(-1)^{k+1}(k!)^2\frac{(e^{u/2}-e^{-u/2})^{2k}}{(2k)!}. \tag{7.2}$$

D'après (6.5), le membre de gauche est égal à la dérivée seconde de $2u/(e^u+1)$, soit

$$-\frac{2e^u(2+u)}{(e^u+1)^2}+\frac{4ue^{2u}}{(e^u+1)^3}=-\mathrm{ch}^{-2}(u/2)+\frac{u}{2}\,\mathrm{sh}(u/2)\,\mathrm{ch}^{-3}(u/2). \tag{7.3}$$

Reste à prouver que le membre de droite de (7.2) est aussi égal à cette expression. Posons

$$z:=i\,\mathrm{sh}\Big(\frac{u}{2}\Big)=i\frac{e^{u/2}-e^{-u/2}}{2}.$$

Ce même membre de droite prend la forme

$$-\sum_{k\ge 0}\frac{(k!)^2}{(2k)!}(2z)^{2k} \tag{7.4}$$

et le problème est de rattacher cette série au développement d'une fonction connue. Or, dans la Remarque 2, chap. 1, § 4, formule (4.18), on a obtenu :

$$-2(\mathrm{Arcsin}\,z)^2=-\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k^2}\frac{(k!)^2}{(2k)!}(2z)^{2k}.$$

Ce n'est pas encore le développement (7.4), mais en dérivant deux fois on peut faire disparaître le dénominateur k^2. En fait, deux dérivations successives donnent :

$$-(1-z^2)^{-1}-z\,(\mathrm{Arcsin}\,z)\,(1-z^2)^{-3/2}=-\sum_{k\ge 0}\frac{(k!)^2}{(2k)!}(2z)^{2k}. \tag{7.5}$$

Il n'y a plus qu'à réexprimer cette identité en fonction de $u/2$. Comme $z = i\,\mathrm{sh}(u/2)$, on a : $1 - z^2 = \mathrm{ch}^2(u/2)$. D'après la Remarque 1, chap. 1, § 4, on a aussi : $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Argsh}(iz) = i \operatorname{Argsh}(\mathrm{sh}(u/2)) = i\,u/2$. D'où

$$-\,\mathrm{ch}^{-2}(u/2) + \frac{u}{2}\,\mathrm{sh}(u/2)\,\mathrm{ch}^{-3}(u/2) = -\sum_{k\geq 0} \frac{(k!)^2}{(2k)!}(2z)^{2k}. \tag{7.6}$$

L'identité (7.1) est ainsi démontrée.

Remarque. — D'après l'Exercice 17, chap. 1, on montre que les séries $\operatorname{Arcsin} u$ et $\sin u$ sont réverses l'une de l'autre. Cette propriété a été utilisée dans la démonstration précédente, avec les séries $\operatorname{Argsh} u$ et $\mathrm{sh}\, u$.

8. Les polynômes de Gandhi

Refaisons le même calcul que dans la section précédente, mais en utilisant cette fois la fonction génératrice *ordinaire* des nombres $T(2n, 2k)$. On part de la définition même des $T(2n, 2k)$ sous la forme (5.2) :

$$\sum_{n\geq k} T(2n, 2k) u^{2n} = \frac{u^{2k}}{(1 - k^2u^2)\ldots(1 - u^2)}\ ;$$

d'où l'on tire, comme dans la section précédente,

$$\sum_{n\geq k} (-1)^k (k!)^2 T(2n, 2k) u^{2n} = (-1)^k (k!)^2 \frac{u^{2k}}{(1 - k^2u^2)\ldots(1 - u^2)},$$

formule valable pour tout $k \geq 1$. En sommant par rapport à $k \geq 1$ et en remplaçant u^2 par $-u^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k} &(-1)^k (k!)^2 T(2n, 2k)(-u^2)^n \\ &= \sum_{n\geq 1} u^{2n} \sum_{1\leq k\leq n} (-1)^{n+k} (k!)^2 T(2n, 2k) \\ &\qquad = \sum_{k\geq 1} (k!)^2 \frac{u^{2k}}{(1 + k^2u^2)\ldots(1 + u^2)}.\end{aligned}$$

Compte-tenu de (7.1) et du fait que $T(2n, 0) = 0$ pour $n \geq 1$, on en tire

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} g_{2n+2}\, u^{2n} = \sum_{n\geq 1} u^{2n} (-1)^{n+1} \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{k+1} (k!)^2 T(2n, 2k),$$

soit, par conséquent,

$$\sum_{n\geq 1} G_{2n+2}\, u^{2n} = \sum_{k\geq 1} (k!)^2 \frac{u^{2k}}{(1 + k^2u^2)\ldots(1 + u^2)}. \tag{8.1}$$

Or, la série

$$F(x;u) = \sum_{k\ge 1} \frac{(x(x+1)\ldots(x+k-1))^2 u^{2k}}{(1+x^2u^2)(1+(x+1)^2u^2)\ldots(1+(x+k-1)^2u^2)} \tag{8.2}$$

se développe en série de puissances de u comme

$$F(x;u) = \sum_{n\ge 1} L_n(x) u^{2n}, \tag{8.3}$$

où chaque $L_n(x)$ est un polynôme. La comparaison des identités (8.1), (8.2) et (8.3) montre alors que l'on a :

$$G_{2n+2} = L_n(1) \qquad (n \ge 1). \tag{8.4}$$

Reste à trouver une relation de récurrence pour les polynômes $L_n(x)$. Or d'après (8.2) et (8.3) on a :

$$F(x;u)(1+x^2u^2) = x^2u^2\bigl(1+F(x+1;u)\bigr)\,;$$

soit

$$F(x;u) = x^2u^2 + x^2u^2\bigl(F(x+1;u) - F(x;u)\bigr)\,;$$

ou encore :

$$\sum_{n\ge 1} L_n(x)u^{2n} = x^2u^2 + \sum_{n\ge 2} x^2\bigl(L_{n-1}(x+1) - L_{n-1}(x)\bigr)u^{2n}.$$

On en tire la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} &L_1(x) = x^2\,; \\ &L_n(x) = x^2\bigl(L_{n-1}(x+1) - L_{n-1}(x)\bigr) \qquad (n \ge 2). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Ces polynômes, dits *polynômes de Gandhi*, ont évidemment comme coefficients des entiers positifs et n'ont pas de terme linéaire ; de plus, $\deg L_n(x) = n+1$. On trouvera au début du paragraphe suivant, dans la Fig. 8, les premières valeurs de ces polynômes.

On peut évidemment refaire tous les calculs en sens inverse. Autrement dit, la récurrence (8.5) et l'identité (8.4) sont équivalentes à l'identité (7.1). En fait, Gandhi, partant de la récurrence (8.5), avait exprimé sa conjecture sous la forme (8.4).

9. Les pistolets de Dumont

La récurrence (8.5) a permis à Dumont d'obtenir les premières interprétations géométriques des nombres de Genocchi à l'aide de nouveaux objets combinatoires, les *pistolets de Dumont*. Ils s'introduisent naturellement à partir d'une lecture rapprochée de cette récurrence. Posons, en effet, pour $n \geq 1$,

$$L_n(x) := \sum_{1 \leq k \leq n+1} L_{n,k} x^k, \quad \text{avec } L_{n,1} = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq k \leq n+1} L_{n,k} x^k &= x^2 \sum_{1 \leq j \leq n} L_{n-1,j} \big((x+1)^j - x^j\big) \\ &= x^2 \sum_{1 \leq j \leq n} L_{n-1,j} \sum_{0 \leq i \leq j-1} \binom{j}{i} x^i \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} x^{i+2} \sum_{i+1 \leq j \leq n} \binom{j}{i} L_{n-1,j}.\end{aligned}$$

En prenant le coefficient de x^k dans le premier et le dernier membre, on obtient :

$$(9.1) \quad L_{n,k} = \binom{k-1}{k-2} L_{n-1,k-1} + \binom{k}{k-2} L_{n-1,k} + \cdots + \binom{n}{k-2} L_{n-1,n}.$$

Les valeurs initiales sont $L_{1,2} = 1$ et $L_{1,k} = 0$ pour $k \neq 2$. Les premières valeurs des $L_{n,k}$ sont données dans le tableau de la Fig. 8.

k=	2	3	4	5	6	7
n=1	1					
2	1	2				
3	3	8	6			
4	17	54	60	24		
5	155	556	762	480	120	
6	2073	8146	12840	10248	4200	720

Fig. 8

Proposition 9.1. — *Pour $n \geq 2$, on a :*

$$G_{2n} = L_{n-1}(1) = \sum_{2 \leq k \leq n} L_{n-1,k} = L_{n,2}.$$

Démonstration. — Seule la dernière identité est à établir et elle résulte de (9.1) lorsqu'on pose $k = 2$. $\square$

Les nombres de Genocchi apparaissent ainsi dans la colonne $\{k = 2\}$ du tableau précédent et aussi comme sommes des coefficients dans chaque ligne. Notons SE_n l'ensemble des *surjections* f de $[\,2n\,]$ sur $\{2, 4, \ldots, 2n\}$, qui sont *excédantes*, c'est-à-dire, qui, pour tout $i = 1, 2, \ldots, 2n$, satisfont $i \le f(i)$. Le graphe d'une telle surjection est contenu dans un escalier dont les marches sont doubles, comme illustré dans la Fig. 9, où l'on a représenté les deux surjections.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(i)$	2	8	6	4	6	8	8	8

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(i)$	2	6	6	4	6	6	8	8

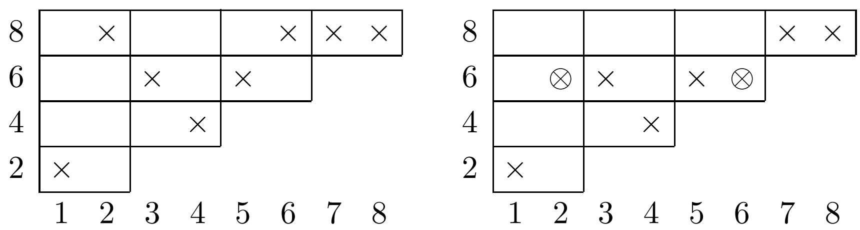


Fig. 9

Si l'on identifie la surjection excédante avec son graphe, on parlera abusivement d'*escalier excédant d'ordre* $2n$ ou *pistolet de Dumont d'ordre* $2n$. Une telle configuration est donc composée de $2n$ points répartis sur un escalier aux marches doubles, de telle sorte que chaque ligne contienne au moins un point et chaque colonne contienne exactement un point.

PROPOSITION 9.2.

(i) *Le cardinal de SE_n est égal au nombre de Genocchi G_{2n+2}.*

(ii) *Soit $SE_{n,k}$ l'ensemble des surjections excédantes f de SE_n, pour lesquelles l'élément $2n$ a k antécédents, ou, de façon équivalente, l'ensemble des escaliers excédants d'ordre $2n$, ayant k points sur la ligne supérieure. Alors le cardinal de $SE_{n,k}$ est égal au coefficient $L_{n,k}$.*

Démonstration. — La partie (i) est une conséquence de (ii) d'après la Proposition 9.1. Pour prouver (ii), on note tout d'abord que $|SE_{1,2}| = 1$ et $|SE_{1,k}| = 0$ pour $k \ne 2$. Il suffit de vérifier que $|SE_{n,k}|$ satisfait la relation de récurrence (9.1), lorsqu'on remplace $L_{n,k}$ par $|SE_{n,k}|$. On va montrer, en fait, qu'on peut, de façon bijective, associer à tout élément de $SE_{n,k}$ un triplet $(j, (i_1, \ldots, i_{k-2}), h)$, où j est un entier satisfaisant $k-1 \le j \le n$, où $(i_1, \ldots, i_{k-2})$ est une suite d'entiers satisfaisant $1 \le i_1 < \cdots < i_{k-2} \le j$ et où h est un élément de $SE_{n-1,j}$. La récurrence (9.1) en sera une conséquence.

Cette bijection est illustrée dans la Fig. 9. On part d'un élément f de $SE_{n,k}$ et on fait descendre d'un cran vers le bas tous les points situés sur la ligne supérieure de f (à l'exclusion des deux points les plus à droite qui sortiraient de l'escalier !). On garde trace de ces points déplacés (notés "$\otimes$" dans la Fig. 9). En supprimant la ligne supérieure de l'escalier excédant obtenu, on obtient un escalier excédant h d'ordre $2(n-1)$. Soit j le nombre de ses points situés sur sa ligne supérieure. Comme le nombre de points descendus est égal à $(k-2)$ et que la ligne d'ordonnée $(2n-2)$ de f avait au moins un point au départ, on a $k-1 \le j$. Par ailleurs, $j \le n$ puisque h est un escalier excédant. Enfin, garder trace des points descendus équivaut à dire qu'on garde en mémoire le numérotage de $(k-2)$ points de la ligne supérieure de h parmi les j qu'elle contient. $\square$

Par exemple, à l'escalier excédant f, d'ordre 8 de la Fig. 9, pour lequel $k = 4$, correspond le triplet

$$j = 4, \quad (1 \le i_1 = 1 < i_2 = 4 \le j = 4), \quad h =$$

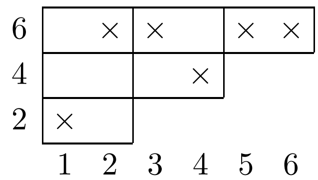


Fig. 10

10. Le codage des permutations

Dans la Proposition 9.2, nous avons démontré que le nombre de Genocchi pouvait s'interpréter comme un comptage de fonctions excédantes. Or, ces dernières fonctions servent à *coder* des permutations. On entend par là qu'on sait construire des bijections du groupe des permutations sur certaines classes de fonctions excédantes. La question qui se pose est alors de voir si l'interprétation trouvée dans la Proposition 9.2 ne peut pas se récrire en termes de permutations : en clair, faire apparaître les nombres de Genocchi comme des cardinaux de classes de permutations ayant des propriétés géométriques intéressantes. Pour ce faire, nous passons en revue quelques uns de ces codages pour les appliquer ensuite aux fonctions excédantes introduites dans le paragraphe précédent.

10.1. *Retour sur la transformation fondamentale.* — Celle-ci a été décrite au chap. 1, § 16.2. Rappelons que si σ est une permutation d'ordre n ayant r orbites $I_1, I_2, \ldots, I_r$, on numérote celles-ci de sorte que $\max I_1 < \max I_2 < \cdots < \max I_r$. Pour chaque $j = 1, 2, \ldots, r$, on forme ensuite le mot *initialement dominé* $\check\sigma_j \coloneqq \max I_j,\ \sigma^{-1}(\max I_j), \ldots, \sigma^{-(|I_j|-1)}(\max I_j)$. On associe alors à σ le produit de juxtaposition : $\check\sigma := \check\sigma_1\check\sigma_2 \ldots \check\sigma_r$.

Exemple. — Considérons la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 4 & 3 & 9 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les orbites de σ écrites d'après l'ordre croissant de leurs maxima sont :

$$I_1 = \{4\}, \quad I_2 = \{2,3,5,7\}, \quad I_3 = \{1,6,8,9\}.$$

Ensuite, $\check\sigma_1 = 4\,;$ $\check\sigma_2 = 7, \sigma^{-1}(7), \sigma^{-2}(7), \sigma^{-3}(7) = 7,3,5,2\,;$ $\check\sigma_3 = 9, \sigma^{-1}(9), \sigma^{-2}(9), \sigma^{-3}(9) = 9,6,8,1$. De là :

$$\check\sigma = \mathbf{4}, \mathbf{7}, 3, 5, 2, \mathbf{9}, 6, 8, 1.$$

Retournons au cas général. La bijection inverse est définie comme suit : on part d'une permutation τ, écrite comme un mot linéaire de n lettres distinctes. On coupe le mot τ avant chaque lettre *saillante*, c'est-à-dire avant chaque lettre qui est plus grande que toutes les lettres qui sont *à sa gauche*. Les facteurs de τ que l'on obtient ainsi permettent de reconstituer les cycles de la permutation σ telle que $\check\sigma = \tau$. Dans l'exemple, les lettres saillantes de $\check\sigma$ sont : **4**, **7**, **9**. On reconstitue ainsi les trois cycles de σ.

On a démontré également que le *nombre d'excédances*, $\operatorname{exc}\sigma$, de la permutation σ est égal au *nombre de descentes*, $\operatorname{des}\check\sigma$, de $\check\sigma$. Un examen plus approfondi permet d'établir la propriété supplémentaire suivante.

Proposition 10.1. — *L'élément $k \in [n]$ est un maximum d'orbite de σ, si et seulement si k est une lettre saillante dans $\check\sigma$. De plus, k est un point fixe de σ (donc aussi maximum d'orbite), si et seulement si $k = n$ (et n est alors la dernière lettre de $\check\sigma$) ou si $k < n$ et la lettre suivant k dans le mot $\check\sigma$ est, comme k, une lettre saillante.*

Cette propriété est particulièrement évidente par la construction même de la transformation fondamentale. En reprenant l'exemple précédent, on voit que 4, 7, 9 sont à la fois les maxima d'orbite de σ et les lettres saillantes de $\check\sigma$. Par ailleurs, 4 est point fixe de σ et la lettre 7 suivant 4 dans $\check\sigma$ est saillante.

Soit $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ une permutation. On note $E_0(\sigma)$ l'ensemble des entiers $\sigma(k)$ tels que $k \le \sigma(k)$, soit

$$E_0(\sigma) := \{\sigma(k) : 1 \le k \le n,\, \sigma(k) \ge k\}.$$

Dans la permutation $\check\sigma = \check\sigma(1)\check\sigma(2)\ldots\check\sigma(n)$, notons $D_0(\check\sigma)$ l'ensemble des lettres $\check\sigma(k)$ qui sont ou bien *saillantes* (i.e. telles que $\check\sigma(k) > \check\sigma(i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, (k-1)$), ou bien des *valeurs de descente* (i.e. telles que $1 \le k \le (n-1)$ et $\check\sigma(k) > \check\sigma(k+1)$), soit

$$D_0(\check\sigma) := \{\check\sigma(k) : \check\sigma(k) > \check\sigma(i)\,(1 \le i \le k-1) \text{ ou } \check\sigma(k) > \check\sigma(k+1)\}.$$

Dans la transformation fondamentale $\sigma \mapsto \check\sigma$, chaque excédance $\sigma(k) > k$ dans σ correspond à une descente $\check\sigma(l) > \check\sigma(l+1)$ dans $\check\sigma$. De plus, une lettre saillante $\check{\sigma}(l)$ dans $\check{\sigma}$ qui n'est pas aussi valeur de descente satisfait l'une des propriétés suivantes :

(i) $l = n$ et $\check{\sigma}(l) = n$;

(ii) $1 \leq l \leq (n-1)$ et $\check{\sigma}(l+1)$ est aussi saillante dans $\check{\sigma}$.

D'après la Proposition 10.1, l'une des propriétés (i) ou (ii) est satisfaite si et seulement si l'indice $k = \check{\sigma}(l)$ est point fixe de σ, i.e. si $\sigma(k) = k$. Il y a donc bijection entre les valeurs k telles que $k \leq \sigma(k)$ et les valeurs l telles que $\check{\sigma}(l)$ est saillante dans $\check{\sigma}$ ou valeur de descente. En d'autres termes, on a la propriété :

$$E_0(\sigma) = D_0(\check{\sigma}). \tag{10.1}$$

Dans l'exemple précédent, $E_0(\sigma) = D_0(\check{\sigma}) = \{4, 5, 7, 8, 9\}$.

10.2. *Un codage des permutations par des fonctions excédantes.* — Par *fonction excédante*, on entend une fonction f d'un ensemble fini I (totalement ordonné) dans lui-même telle que pour tout $i \in I$, on a $i \leq f(i)$. On note FE_n l'ensemble des fonctions excédantes de $[\,n\,]$ dans lui-même. Évidemment $|FE_n| = n!$

Nous nous proposons de construire une bijection $\varphi_> : \sigma \mapsto f$ de $\mathfrak{S}_n$ sur FE_n, satisfaisant

$$D_0(\sigma) = f([\,n\,]). \tag{10.2}$$

Tout d'abord si $I = \{i_1 < \cdots < i_m\}$ est un ensemble (totalement ordonné) de cardinal m et si $\tau = \tau(i_1) \ldots \tau(i_m)$ est une permutation de I telle que $\tau(i_1) = i_m$ (le plus grand élément de I ; on dit encore que τ, considérée comme un mot linéaire, est *initialement dominée*), on forme une fonction excédante f de l'ensemble I dans lui-même en posant $f(\tau(i_1)) = \tau(i_1)$, puis pour chaque $\tau(i_j)$ $(2 \leq j \leq m)$, en définissant $f(\tau(i_j))$ comme étant la lettre *la plus voisine* de $\tau(i_j)$ située *à sa gauche* qui lui soit *supérieure*. Il y en a toujours une puisque $\tau(i_1)$ est la plus grande lettre du mot. On définit bien là une fonction excédante f. De plus,

$$D_0(\tau) = f(\{\tau(i_1), \tau(i_2), \ldots, \tau(i_m)\}) = f(I). \tag{10.3}$$

Prenons maintenant une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$. En regardant σ comme un mot et en coupant celui-ci *avant* chaque lettre saillante, on obtient une suite $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$, dite *factorisation croissante* de σ. Chacun des facteurs w_1, w_2, ... , w_r est initialement dominé. On peut donc lui associer une fonction excédante suivant le procédé juste décrit. Soit f_1, f_2, ... , f_r la suite de ces fonctions excédantes. Ces fonctions sont définies sur des sous-ensembles *disjoints* de $[\,n\,]$, de réunion $[\,n\,]$. Elles sont donc les *restrictions* d'une fonction f de $[\,n\,]$ sur lui-même, qui est *excédante.* L'application $\sigma \mapsto f$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur FE_n, telle que les parties connexes des graphes de σ et f coïncident ; de plus, comme $D_0(\sigma) = D_0(w_1) \cup \cdots \cup D_0(w_r)$, on a, d'après (10.3)

$$D_0(\sigma) = f([\,n\,]). \tag{10.4}$$

Par exemple, la permutation $\sigma = 4, 7, 3, 5, 2, 9, 6, 8, 1$ admet la factorisation croissante : $(4 \mid 7, 3, 5, 2 \mid 9, 6, 8, 1)$. Ces facteurs correspondent aux fonctions excédantes

$$4 \leftarrow 4\,; \quad 7 \leftarrow 7 \leftarrow 5 \leftarrow 2 \quad 7 \leftarrow 3\,; \quad 9 \leftarrow 9 \leftarrow 8 \leftarrow 1 \quad 9 \leftarrow 6,$$

qui sont elles-mêmes les restrictions d'une fonction excédante $\varphi_>(\sigma) = f$ de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ dans lui-même. Cette fonction excédante f peut être mieux visualisée par son graphe tel qu'il apparaît dans la Fig. 11.

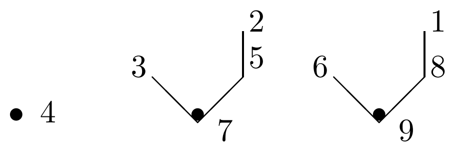


Fig. 11

La *bijection inverse* $f \mapsto \sigma$ de FE_n sur $\mathfrak{S}_n$ peut être définie comme suit. L'unique $f \in FE_1$ est envoyée sur le mot réduit à sa seule lettre 1. Supposons que $f \in FE_n$ avec $n \geq 2$. Si f n'a qu'un seul point fixe r, on note s_1, s_2, … , s_m la suite *croissante* des points $x \neq r$ tels que $f(x) = r$. Pour chaque $j = 1, 2, \ldots, m$, on note aussi I_j l'ensemble des $x \in [\,n\,]$ tels que $f^k(x) = s_j$ pour un certain $k \geq 0$. La fonction g_j définie par $g_j(s_j) = s_j$ et par $g_j(x) = f(x)$ pour $x \in I_j \setminus \{s_j\}$ est alors une fonction excédante de I_j sur lui-même. Par récurrence, elle est envoyée sur un mot débutant par s_j qu'on peut noter $s_j w_j$. L'image inverse de f est alors définie comme le produit de juxtaposition : $r s_1 w_1 s_2 w_2 \ldots s_m w_m$.

Si f a k points fixes et si $k \geq 2$, désignons par r_1, r_2, … , r_k la suite *croissante* de ses points fixes. Le graphe de f est alors composé de k parties connexes qui sont les graphes de fonctions excédantes définies sur des ensembles de cardinal au plus égal à $(n-1)$. Par récurrence, ces fonctions ont pour images inverses des mots de la forme $r_1 v_1$, … , $r_k v_k$. L'image inverse de f est alors définie par : $r_1 v_1 r_2 v_2 \ldots r_k v_k$.

Exemple. — Considérons la fonction $f \in FE_9$, dont le graphe apparaît dans la Fig. 11, ou encore la fonction :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

La fonction f a $k=3$ points fixes : 4, 7, 9 et le graphe de f a aussi trois parties connexes. Au point fixe isolé 4, correspond le mot 4 ; à la partie connexe, de point fixe 7, correspond le mot composé de la lettre 7, suivie du mot $\varphi_>^{-1}(g)$, où g est la fonction excédante $g(3)=3$, $g(2)=g(5)=5$. Par récurrence, au point fixe isolé 3 de g correspond le mot 3 ; à la fonction excédante $g(2)=g(5)=5$ sur le doubleton $\{2,5\}$, correspond le mot $5,2$. Par conséquent, à la fonction g sur l'ensemble $\{2,3,5\}$, correspond le mot $\varphi_>^{-1}(g)=3,5,2$. A cette seconde partie connexe, correspond donc le mot $7,3,5,2$. De la même façon, à la partie connexe de point fixe 9, correspond le mot $9,6,8,1$. Ainsi, à la fonction excédante f correspond le produit de juxtaposition $\varphi_>^{-1}(f)=\sigma=4,7,3,5,2,9,6,8,1$.

Remarque. — Les définitions des bijections $\varphi_>$ et $\varphi_>^{-1}$ sont de nature récursive. Un bon exercice pour maîtriser ces définitions est de les programmer.

Appelons Φ le produit de $\varphi_>$ par la transformation fondamentale. Autrement dit, pour toute permutation σ, posons

$$\Phi(\sigma)=\varphi_>(\check{\sigma}). \tag{10.5}$$

Alors, si $\Phi(\sigma)=f$, on a :

$$E_0(\sigma)=f([\,n\,]). \tag{10.6}$$

La transformation fondamentale et la bijection $\varphi_>$ entrent dans la construction des bijections représentées dans le tableau de la Fig. 12, dont l'étude fait l'objet de la fin de ce paragraphe.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_n \arrow[r, "\vee"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \mathfrak{S}_n \arrow[r, "\mathbf{c}"] \arrow[d, "\varphi_>"] & \mathfrak{S}_n \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\varphi_<"] & \mathfrak{S}_n \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\psi"] & \mathfrak{S}_n \arrow[d, "\delta"] \\
& FE_n \arrow[r, "\mathbf{c}\,\mathbf{r}"] & FSE_n \arrow[r, "\theta"] & F_n \arrow[r, "\kappa"] & A_n
\end{tikzcd}$$

Fig. 12

10.3. *Un codage des permutations par des fonctions sous-excédantes.* Le diagramme de la Fig. 12 fait apparaître de nouveaux symboles que nous allons expliciter. Les applications $\mathbf{c}$ et $\mathbf{r}$ sont des opérations du groupe des rotations du carré. Si on identifie les applications de $[\,n\,]$ dans lui-même avec leurs graphes représentés dans un carré $[\,n\,]\times[\,n\,]$, l'opération $\mathbf{c}$ est la *symétrie par rapport à l'axe horizontal.* Elle fait passer des n points du graphe $(1,f(1)),\ldots,(n,f(n))$ aux points $(1,n+1-f(1)),\ldots,(n,n+1-f(n))$. On l'appelle aussi le *complément à* $(n+1)$.

L'opération $\mathbf{r}$ est la *symétrie par rapport à l'axe vertical.* Le graphe passe de $\{(1, f(1)), \ldots, (n, f(n))\}$ à $\{(1, f(n)), \ldots, (n, f(1))\}$. C'est l'*image-miroir* ou le *retournement.* Les deux opérations $\mathbf{c}$ et $\mathbf{r}$ commutent et sont involutives : $\mathbf{c}^2 = \mathbf{r}^2 = \mathrm{id}$ (l'application identique).

Quand on applique $\mathbf{c}$ et $\mathbf{r}$ à toute application de $[\,n\,]$ dans $[\,n\,]$ (une endofonction au sens du chap. 1, § 17), on retrouve une endofonction. En particulier, l'image de $\mathbf{c}$ ou de $\mathbf{r}$ d'une permutation est encore une permutation. En revanche, l'image par le produit $\mathbf{cr} = \mathbf{rc}$ d'une fonction excédante f est une fonction dite *sous-excédante.* Posons $g := \mathbf{cr}f$. Alors $g(i) = n+1-f(n+1-i)$, donc $n+1-i \le f(n+1-i) \Rightarrow 1 \le g(i) \le i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, ce qui constitue la définition des fonctions sous-excédantes. On note FSE_n l'ensemble des fonctions sous-excédantes d'ordre n.

Le diagramme de la Fig. 12 donne la définition de la bijection

$$\varphi_< := \mathbf{c}\,\mathbf{r}\,\varphi_>\,\mathbf{c}$$

de $\mathfrak{S}_n$ sur FSE_n. La bijection $\varphi_<$ peut être définie directement. Partons, en effet, d'une permutation σ et coupons le mot $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ avant chaque lettre $\sigma(i)$ qui est *plus petite* que toutes les lettres qui sont à sa gauche. On obtient une suite de facteurs que l'on note

$$\sigma(1)\ldots\sigma(r_1), \quad \sigma(r_1+1)\ldots\sigma(r_1+r_2), \quad \ldots$$

Ces *coupures étant repérées*, lorsqu'on applique la transformation $\mathbf{c}$ à ce mot, on obtient la suite de facteurs

$$(n+1-\sigma(1))\ldots(n+1-\sigma(r_1)), \quad (n+1-\sigma(r_1+1))\ldots(n+1-\sigma(r_1+r_2)), \quad \ldots$$

qui débutent par leurs *plus grandes lettres* et la lecture de ces plus grandes lettres de gauche à droite est *croissante.*

Quand on applique $\varphi_>$ à $\mathbf{c}\,\sigma$, on obtient une fonction excédante f telle que $f(n+1-\sigma(1)) = (n+1-\sigma(1))$ et pour chaque $j = 2, \ldots, r_1$, l'élément $f(n+1-\sigma(j))$ est égal à la lettre la plus voisine de $f(n+1-\sigma(j))$, située à sa gauche, qui lui soit supérieure, disons $f(n+1-\sigma(k))$ $(1 \le k \le j-1)$. Même définition pour les éléments des autres facteurs.

Enfin, quand on applique $\mathbf{cr}$ à f, on obtient une fonction g telle que $g(i) = n+1-f(n+1-i)$. Par conséquent, $g(\sigma(1)) = n+1-f(n+1-\sigma(1)) = n+1-(n+1-\sigma(1)) = \sigma(1)$. Puis $g(\sigma(j)) = n+1-f(n+1-\sigma(j)) = n+1-f(n+1-\sigma(k)) = g(\sigma(k)), \ldots$

Ainsi, pour définir $g = \varphi_<(\sigma)$, il suffit de couper le mot $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ avant chaque lettre $\sigma(i)$ qui est *plus petite* que toutes les lettres qui sont à sa gauche. On pose $g(\sigma(j)) = \sigma(j)$ si $\sigma(j)$ est la première lettre de l'un des facteurs ainsi formés. Si $\sigma(j)$ est à une autre place dans un de ces facteurs, on définit $g(\sigma(j))$ comme étant la lettre la plus proche de $\sigma(j)$ dans ce facteur, située sur sa gauche, qui lui soit plus petite.

Exemple. — Partons de la permutation $\sigma = 6, 3, 7, 5, 8, 1, 4, 2, 9$. En coupant avant chaque lettre qui est inférieure à toutes les lettres situées sur sa gauche, on obtient la factorisation $(6 \,|\, 3, 7, 5, 8 \,|\, 1, 4, 2, 9)$. Par application de $\mathbf{c}$, on obtient : $\mathbf{c}\sigma = 4 \,|\, 7, 3, 5, 2 \,|\, 9, 6, 8, 1$. L'image par $\varphi_{>}$ a été calculée en §10.2. On a trouvé

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 4 & 7 & 9 & 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

et par application de $\mathbf{c\,r}$:

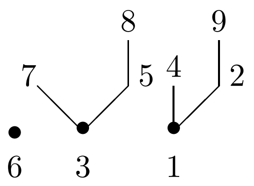
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

qui est une fonction sous-excédante. Le calcul direct de $g = \varphi_{<}(\sigma)$ s'obtient aussi à partir de la factorisation $(6 \,|\, 3, 7, 5, 8 \,|\, 1, 4, 2, 9)$.

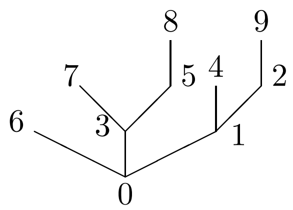
10.4. *Un codage des permutations par des arbres enracinés croissants.* On note F_n l'ensemble des *arbres enracinés* en 0 sur $[\,n\,]$ qui sont *croissants.* La bijection $\theta : g \mapsto h$, qui apparaît dans le diagramme de la Fig. 12, est particulièrement simple à définir. Il suffit de conserver pour h toutes les valeurs de g à l'exclusion des points fixes, qu'on envoie sur la racine de l'arbre 0, comme illustré dans la Fig. 13. Dans l'exemple courant, on a :

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La bijection $\psi : \mathfrak{S}_n \to F_n$ définie par $\psi = \theta\,\varphi_{<}$ a une construction analogue à celle de $\varphi_{<}$: la seule variante est de poser $h(x) = 0$ si x est le début d'un facteur dans la factorisation décroissante de la permutation.



Le graphe de g



Le graphe de h

Fig. 13

10.5. *Un codage des permutations par des arbres binaires croissants.* Il s'agit, enfin, dans le diagramme de la Fig. 12, d'expliciter A_n, κ et δ. D'abord, A_n est l'ensemble des *arbres binaires croissants* sur $[\,n\,]$. Les arbres binaires croissants sont définis par récurrence comme suit. Pour $n = 1$, il n'y a qu'un arbre binaire croissant (en abrégé, un arbre) consistant en une racine étiquetée 1.

Soit $n \geq 2$ et soit σ une permutation d'ordre n. En décrivant la permutation σ comme un mot linéaire, on peut écrire : $\sigma = \sigma' 1 \sigma''$. Par récurrence, σ' (resp. σ'') correspond à un arbre, disons, $T\sigma'$ (resp. $T\sigma''$) dont l'étiquette de la racine est égale à la lettre minima de σ' (resp. σ''). Pour obtenir $T\sigma$, on place $T\sigma'$ à la gauche et $T\sigma''$ à la droite et au-dessus d'un sommet étiqueté 1, dit *racine* de l'arbre. On joint alors ce sommet à chacune des racines de $T\sigma'$ et de $T\sigma''$, si l'arbre $T\sigma'$ ou $T\sigma''$ n'est pas vide. L'arbre $T\sigma$ obtenu est *binaire* (chaque sommet a zéro, un ou deux sommets adjacents situés au-dessus de lui) et *croissant* (parcourant chaque branche depuis la racine et allant vers le haut, on ne rencontre que des sommets dont l'étiquette va en croissant). On dit que $T\sigma$ est le *déploiement* de la permutation σ.

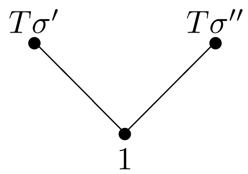


Fig. 14

Par exemple, la permutation $\sigma = 7, 1, 6, 5, 4, 8, 2, 3$ correspond à l'arbre représenté dans la Fig. 15. Pour retrouver la permutation à partir de l'arbre, on prend simplement la projection verticale des n sommets de l'arbre et on écrit sur un axe horizontal les étiquettes des n sommets ainsi projetés. On dit que σ est la *projection* de l'arbre $T\sigma$.

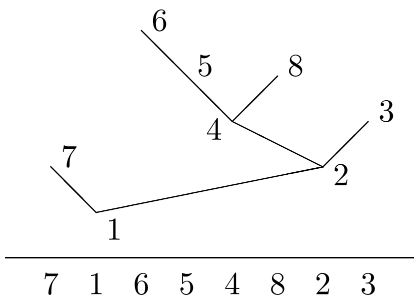


Fig. 15

La bijection $\kappa : F_n \to A_n$ compatible avec le diagramme est mieux comprise si l'on décrit aussi F_n géométriquement. La bijection κ de F_n sur A_n repose sur la correspondance entre les arcs qui aboutissent en un même sommet a dans le graphe d'une fonction h de F_n et la branche à droite

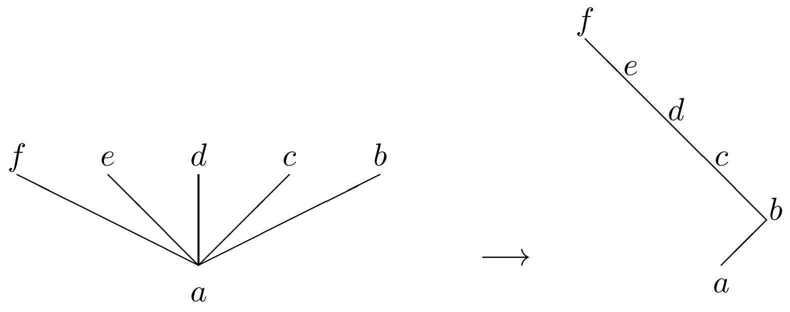


Fig. 16

issue du même sommet a dans l'arbre binaire croissant correspondant, comme indiqué dans la Fig. 16.

L'arbre enraciné croissant h de l'exemple courant est envoyé sur l'arbre binaire croissant $\kappa(h)$ comme indiqué dans la Fig. 17. La racine 0 sert seulement à la construction de l'arbre. Pour retrouver l'élément de A_n, on efface cette racine 0, ainsi que l'unique arête à droite issue de cette racine.

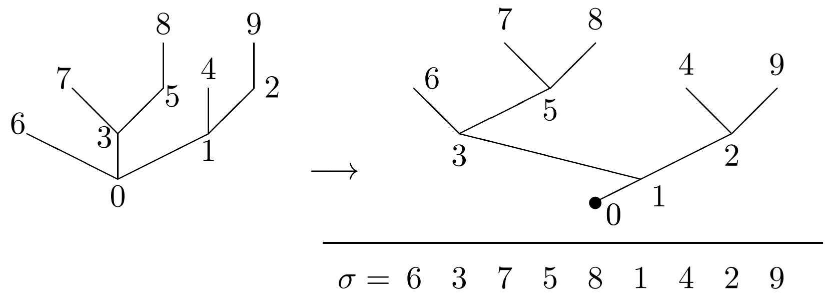


Fig. 17

11. Nombres de Genocchi et permutations

Faisons désormais plein usage des résultats du paragraphe précédent. L'ensemble SE_n de toutes les *surjections excédantes* f de $[\,2n\,]$ sur $\{2,4,\ldots,2n\}$ (introduites au paragraphe 9) est un sous-ensemble de l'ensemble FE_{2n} des fonctions excédantes de $[2n]$ dans lui-même. Soient $f \in SE_n$ et σ la permutation appartenant à $\mathfrak{S}_{2n}$ telle que $\Phi(\sigma) = f$, par la bijection Φ définie en § 10.2. Il résulte de (10.6) et du fait que f est une surjection sur $\{2,4,\ldots,2n\}$ que l'on a :

$$E_0(\sigma) = f([2n]) = \{2,4,\ldots,2n\}. \tag{11.1}$$

Notons P^0_{2n} le sous-ensemble de $\mathfrak{S}_{2n}$ formé de toutes les permutations σ telles que $\Phi(\sigma)$ appartienne à SE_n. D'après (11.1), l'ensemble P^0_{2n} peut être défini comme l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ telles que

$$\sigma(i) \geq i \quad \text{si et seulement si} \quad \sigma(i) \text{ est pair.} \tag{11.2}$$

Il résulte de la Proposition 9.2 que l'on peut interpréter le nombre de Genocchi G_{2n+2} comme le cardinal d'un ensemble de permutations, à savoir :

$$G_{2n+2} = \left|P^0_{2n}\right|. \tag{11.3}$$

En plus des opérations **c**, **r** qui envoient le groupe des permutations sur lui-même, on peut aussi introduire la transformation **i** qui fait pivoter le carré $[2n] \times [2n]$ autour de la diagonale $x = y$. Sous l'action de **i**, le graphe formé par les points $(i, \sigma(i))$ est envoyé sur les points $(\sigma(i), i)$. Autrement dit, l'image de σ par l'application de **i** est simplement son inverse σ^{-1}.

Appelons P_{2n} l'image de P^0_{2n} par l'involution $\mathbf{c}\,\mathbf{r}$. Si σ appartient à P^0_{2n}, la permutation $\overline{\sigma} := \mathbf{c}\,\mathbf{r}(\sigma)$ est encore définie par :

$$\overline{\sigma}(2n+1-i) = 2n+1-\sigma(i) \qquad (1 \leq i \leq 2n). \tag{11.4}$$

D'après (11.4), l'entier $\overline{\sigma}(2n+1-i)$ est pair si et seulement si $\sigma(i)$ est impair, donc, d'après (11.2), si et seulement si $\sigma(i) < i$, soit encore d'après (11.4), si et seulement si $\overline{\sigma}(2n+1-i) > 2n+1-i$. Autrement dit, P_{2n} est le sous-ensemble des permutations $\overline{\sigma} \in \mathfrak{S}_{2n}$ telles que

$$\overline{\sigma}(i) > i \quad \text{si et seulement si} \quad \overline{\sigma}(i) \text{ est pair.} \tag{11.5}$$

D'où encore :

$$G_{2n+2} = |P_{2n}|. \tag{11.6}$$

Notons P^{-1}_{2n} l'image de P_{2n} par la transformation **i**. Il résulte de (11.5) que P^{-1}_{2n} est le sous-ensemble des permutations $\overline{\sigma}^{-1} \in \mathfrak{S}_{2n}$ telles que

$$i > \overline{\sigma}^{-1}(i) \quad \text{si et seulement si} \quad i \text{ est pair.} \tag{11.7}$$

On a ainsi la nouvelle interprétation :

$$G_{2n+2} = \left|P^{-1}_{2n}\right|. \tag{11.8}$$

Les trois interprétations ci-dessus se réfèrent aux *graphes* des permutations. Par exemple, les permutations de P^{-1}_{2n} sont *alternantes*, dans le sens que leurs graphes traversent alternativement la diagonale du carré $[\,2n\,] \times [\,2n\,]$. La transformation fondamentale, dont on a rappelé la construction en § 10.1, permet d'avoir une interprétation *linéaire*, comme décrit dans la proposition suivante.

Proposition 11.1. — *Soit $\check{P}_{2n+1}$ l'ensemble des permutations σ d'ordre $(2n+1)$ telles que*

$$\begin{cases} \sigma(i) > \sigma(i+1), & \textit{si } \sigma(i) \textit{ est pair;} \\ \sigma(i) < \sigma(i+1), & \textit{si } \sigma(i) \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Alors :

$$G_{2n+2} = \left|\check{P}_{2n+1}\right|. \tag{11.9}$$

Démonstration. — Notons $\check{P}_{2n}$ l'image de P_{2n} par la transformation fondamentale $\sigma \mapsto \check{\sigma}$. Il correspond alors à toute excédance stricte ($i < \sigma(i)$) de σ un entier j tel que $1 \le j \le 2n-1$ et $\sigma(i) = \check{\sigma}(j) > \check{\sigma}(j+1) = i$. Par ailleurs, si $i < \sigma(i)$ est une excédance stricte de σ, alors $\sigma(i)$ est pair. Par conséquent, les seules descentes de $\check{\sigma}$ sont les seuls facteurs $\check{\sigma}(j) > \check{\sigma}(j+1)$, où $\check{\sigma}(j)$ est pair. En posant $\check{\sigma}(2n+1) = 2n+1$, la permutation $\check{\sigma}$ devient d'ordre $2n+1$ et appartient bien à l'ensemble $\check{P}_{2n+1}$ décrit dans l'énoncé de la proposition. ∎

Table. — Le nombre de Genocchi de rang $n = 8$ vaut $G_8 = 17$. Nous donnons ci-après la liste des 17 permutations de P_6^0, de P_6^{-1} et de $\check{P}_7$.

P_6^0 : 2, 1, 4, 3, 6, 5 ; 2, 4, 1, 3, 6, 5 ; 4, 2, 1, 3, 6, 5 ; 2, 1, 4, 6, 3, 5 ;
2, 1, 6, 4, 3, 5 ; 2, 4, 1, 6, 3, 5 ; 2, 4, 6, 1, 3, 5 ; 2, 6, 4, 1, 3, 5 ;
4, 2, 1, 6, 3, 5 ; 4, 2, 6, 1, 3, 5 ; 6, 2, 4, 1, 3, 5 ; 2, 4, 6, 3, 1, 5 ;
2, 6, 4, 3, 1, 5 ; 2, 6, 1, 4, 3, 5 ; 4, 2, 6, 3, 1, 5 ; 6, 2, 4, 3, 1, 5 ;
6, 2, 1, 4, 3, 5.

P_6^{-1} : 2, 1, 4, 3, 6, 5 ; 2, 1, 5, 3, 6, 4 ; 2, 1, 6, 3, 5, 4 ; 3, 1, 4, 2, 6, 5 ;
3, 1, 5, 2, 6, 4 ; 3, 1, 6, 2, 5, 4 ; 4, 1, 3, 2, 6, 5 ; 4, 1, 5, 2, 6, 3 ;
4, 1, 5, 3, 6, 2 ; 4, 1, 6, 2, 5, 3 ; 4, 1, 6, 3, 5, 2 ; 5, 1, 3, 2, 6, 4 ;
5, 1, 4, 2, 6, 3 ; 5, 1, 4, 3, 6, 2 ; 6, 1, 3, 2, 5, 4 ; 6, 1, 4, 2, 5, 3 ;
6, 1, 4, 3, 5, 2.

$\check{P}_7$: 2, 1, 4, 3, 6, 5, 7 ; 2, 1, 5, 6, 4, 3, 7 ; 2, 1, 6, 4, 3, 5, 7 ; 3, 4, 2, 1, 6, 5, 7 ;
3, 5, 6, 4, 2, 1, 7 ; 3, 6, 4, 2, 1, 5, 7 ; 4, 2, 1, 3, 6, 5, 7 ; 4, 2, 1, 5, 6, 3, 7 ;
4, 2, 1, 6, 3, 5, 7 ; 4, 3, 5, 6, 2, 1, 7 ; 4, 3, 6, 2, 1, 5, 7 ; 5, 6, 2, 1, 4, 3, 7 ;
5, 6, 3, 4, 2, 1, 7 ; 5, 6, 4, 2, 1, 3, 7 ; 6, 2, 1, 4, 3, 5, 7 ; 6, 3, 4, 2, 1, 5, 7 ;
6, 4, 2, 1, 3, 5, 7.

12. La matrice de Seidel des nombres de Genocchi

12.1. *Le calcul de la matrice de Seidel.* — Dans la terminologie de l'étude des matrices de Seidel (*cf.* chap. 1, § 12), prenons comme suite initiale (a_n) $(n \ge 0)$, la suite des nombres de Genocchi signés (g_n) $(n \ge 0)$, de sorte que

$$g_0 = 0, \quad g_1 = 1, \quad g_{2n} = (-1)^n G_{2n}, \quad g_{2n+1} = 0 \quad (n \ge 1),$$

et notons $(g_{i,j})$ $(i \ge 0,\, j \ge 0)$ la matrice de Seidel associée. On a :

$$\sum_{n\ge 0} \frac{u^n}{n!} g_n = u + \sum_{n\ge 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^n G_{2n} = \frac{2u}{e^u+1}.$$

Les fonctions génératrices exponentielles de la suite initiale $(g_{0,j} = g_j)$ $(j \ge 0)$ et de la suite finale $(g_{i,0})$ $(i \ge 0)$ sont donc respectivement données (*cf.* chap. 1, Proposition 12.2) par :

$$\begin{aligned} A_{0,*} &= \sum_{j\ge 0} \frac{u^j}{j!} g_{0,j} = \frac{2u}{e^u+1}\,; \\ A_{*,0} &= e^u \frac{2u}{e^u+1} = 2u - \frac{2u}{e^u+1} = 2u - A_{0,*} \\ &= u + \sum_{j\ge 2} \frac{u^j}{j!}(-g_{0,j}). \end{aligned}$$

Ainsi la suite finale $(g_{i,0})$ $(i \ge 0)$ est reliée à la suite initiale par les relations :

$$g_{0,0} = 0, \quad g_{1,0} = g_{0,1} = 1, \quad g_{i,0} = -g_{0,i} \quad (i \ge 2). \tag{12.1}$$

Partant de (12.1), on peut calculer tous les $g_{i,j}$ en fonction des $g_{0,j}$ par la formule (*cf.* chap. 1 (12.2))

$$g_{i,j} = \sum_{0\le k\le i} \binom{i}{k} g_{0,j+k},$$

et d'autre part, compte-tenu de la formule (12.3) du chap. 1 et de (12.1), le nombre $g_{0,j}$ est donné par :

$$2g_{0,j} = \sum_{1\le i\le j} (-1)^i \binom{j}{i} g_{j-i,0}.$$

En fait, partant du coin supérieur gauche $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{matrix}$, on calcule successivement tous les autres coefficients suivant les diagonales NE-SO, comme indiqué dans le Tableau 18.

0	1	−1	0	1	0	−3	0	17	0	−155
1	0	−1	1	1	−3	−3	17	17	−155	
1	−1	0	2	−2	−6	14	34	−138		
0	−1	2	0	−8	8	48	−104			
−1	1	2	−8	0	56	−56				
0	3	−6	−8	56	0					
3	−3	−14	48	56						
0	−17	34	104							
−17	17	138								
0	155									
155										

Tableau 18

On observe plusieurs symétries dans le précédent tableau énoncées dans la proposition suivante :

Proposition 12.1. — *La matrice de Seidel associée aux nombres de Genocchi a les propriétés suivantes :*

$$g_{i,j} = (-1)^{i+j-1} g_{j,i} \quad (i \ge 0, j \ge 0). \tag{12.2}$$

En particulier

$$g_{n,n} = 0 \qquad (n \ge 0).$$

Enfin, si $j \ge i \ge 0$ et si $i+j = 2n$ ou $2n+1$, s'il est non nul, le coefficient $g_{i,j}$ est du signe de $(-1)^n$.

Démonstration. — Puisque $g_{i,0} = g_0$ est nul pour i impair supérieur ou égal à 3, on peut récrire (12.1) sous la forme :

$$g_{0,0} = 0, \qquad g_{1,0} = g_{0,1} = 1, \qquad g_{i,0} = (-1)^{i-1} g_{0,i} \quad (i \ge 2).$$

De là, (12.1) est vérifiée pour $i \ge 0$ et $j = 0$.

Pour démontrer le cas général, on utilise les formules sur les coefficients de la matrice de Seidel qui relient $g_{i,j}$ aux coefficients des suites initiale et finale :

$$g_{i,j} = \sum_{0 \le k \le i} \binom{i}{k} g_{0,j+k}\,; \qquad g_{i,j} = \sum_{0 \le k \le j} (-1)^k \binom{j}{k} g_{i+j-k,0}\,;$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \sum_{0 \le k \le j} (-1)^k \binom{j}{k} (-1)^{i+j-k-1} g_{0,i+j-k} \\ &= (-1)^{i+j-1} \sum_{0 \le k \le j} \binom{j}{k} g_{0,i+k} = (-1)^{i+j-1} g_{j,i}. \end{aligned}$$

Lorsque $i = j = n$ dans (12.2), on obtient bien $g_{n,n} = 0$. Pour établir la dernière partie de la proposition, on évalue les coefficients des contre-diagonales supérieures ($i+j = n$, $j \ge i$, $n \ge 3$) de NE en SO (i décroissant) lorsque n est impair et de SO en NE lorsque n est pair.

Supposons, par récurrence, que les contre-diagonales ($i+j = 2m$, $j \ge i$) et ($i + j = 2m + 1$, $j \ge i$) aient tous leurs coefficients non nuls de signe $(-1)^m$ et que cette hypothèse soit vraie jusqu'à l'ordre n ($n \ge 1$). Cette hypothèse est en particulier vraie pour $n = 1$, puisque le coin supérieur gauche de la matrice des $g_{i,j}$ est donné par : $\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & -1 & \end{matrix}$

Considérons la contre-diagonale ($i + j = 2n + 2$, $j \ge i$). On a successivement : $0 = g_{n+1,n+1} = g_{n,n+1} + g_{n,n+2}$, d'où, par récurrence, $\operatorname{sgn} g_{n,n+2} = -\operatorname{sgn} g_{n,n+1} = (-1)^{n+1}$. La formule suivante $g_{n,n+2} = g_{n-1,n+2} + g_{n-1,n+3}$ permet d'obtenir d'après le résultat précédent et la formule de récurrence : $\operatorname{sgn} g_{n-1,n+3} = (-1)^{n+1}$. On continue le long de cette contre-diagonale, jusqu'à obtenir la formule : $g_{1,2n+1} = g_{0,2n+1} + g_{0,2n+2} = g_{0,2n+2}$, d'où le signe $\operatorname{sgn} g_{0,2n+2} = (-1)^{n+1}$.

Pour décrire la contre-diagonale suivante, on opère de NE en SO. D'abord $g_{0,2n+3} = 0$, d'où $g_{1,2n+2} = g_{0,2n+2}$ et $\operatorname{sgn} g_{1,2n+2} = (-1)^{n+1}$. La formule $g_{2,2n+1} = g_{1,2n+1} + g_{1,2n+2}$ entraîne, à son tour : $\operatorname{sgn} g_{2,2n+1} = (-1)^{n+1}$. On continue ainsi jusqu'à obtenir $g_{n+1,n+2} = g_{n,n+2} + g_{n,n+3}$ et donc $\operatorname{sgn} g_{n+1,n+2} = (-1)^{n+1}$. □

La démonstration de la proposition précédente indique que pour décrire la matrice de Seidel des nombres de Genocchi, il suffit de donner un algorithme de calcul des contre-diagonales supérieures. On passe des coefficients d'une contre-diagonale à la suivante en faisant une somme cumulée des coefficients de droite à gauche (resp. de gauche à droite) pour calculer une contre-diagonale de rang pair (resp. impair). On peut donc faire disparaître les signes dans une table (ils sont faciles à rétablir d'après la proposition précédente) et écrire ces contre-diagonales comme des lignes. On obtient la table de la Fig. 19. On obtient, par exemple, 138 en faisant la somme cumulée (de gauche à droite) $56 + 48 + 34$, alors qu'à la ligne précédente, le coefficient 48 est obtenu en faisant la somme cumulée (de droite à gauche) de $17 + 17 + 14$.

Remarque. — La proposition précédente entraîne, en particulier, la règle des signes sur les nombres de Genocchi eux-mêmes, à savoir : $\operatorname{sgn} g_{2n} = (-1)^n$.

Remarque. — La première colonne de Fig. 19 donne les valeurs absolues des nombres appelés *nombres de Genocchi médiants*. Ils sont définis par :

$$g_{n,n+1} = g_{n+1,n} = g_{n+2,n} = -g_{n,n+2}.$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
1 \\
1 & 1 \\
2 & 1 \\
2 & 3 & 3 \\
8 & 6 & 3 \\
8 & 14 & 17 & 17 \\
56 & 48 & 34 & 17 \\
56 & 104 & 138 & 155 & 155 \\
608 & 552 & 448 & 310 & 155 \\
608 & 1160 & 1608 & 1918 & 2073 & 2073 \\
9440 & 8832 & 7672 & 6064 & 4146 & 2073 \\
9440 & 18272 & 25944 & 32008 & 36154 & 38227 & 38227
\end{array}$$

Fig. 19

Ils apparaissent ainsi (au signe près) quatre fois dans la matrice de Seidel associée aux nombres de Genocchi. La table des premières valeurs est donnée par :

n	0	1	2	3	4	5	6
$g_{n,n+1}$	1	-1	2	-8	56	-608	9440

12.2. *Fonction génératrice des nombres de Genocchi médiants.* — Commençons par calculer la fonction génératrice *ordinaire* des nombres de Genocchi signés $(-1)^n G_{2n}$.

PROPOSITION 12.2. — *On a :*

$$\sum_{n\ge 0}(-1)^n G_{2n}u^{2n} = \sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^k k!\,(k-1)!\,u^{2k}}{(1-u^2)(1-2^2u^2)\dots(1-k^2u^2)}, \tag{12.3}$$

$$= \sum_{k\ge 1}\sum_{-k\le j\le k}\frac{(-1)^j k!\,(k-1)!}{(k+j)!\,(k-j)!}\,\frac{1}{1-ju}. \tag{12.4}$$

Démonstration. — On part de :

$$2(\arcsin z)^2 = \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k^2}\frac{(k!)^2}{(2k)!}(2z)^{2k},$$

et en posant $z = i\,\mathrm{sh}\,u/2$, on trouve :

$$-\frac{u^2}{2} = \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k^2}\frac{(k!)^2}{(2k)!}2^{2k}(-1)^k\mathrm{sh}^{2k}(u/2).$$

Par dérivation :

$$-u = \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k}\frac{(k!)^2}{(2k)!}2^{2k}(-1)^k\mathrm{sh}^{2k-1}(u/2)\,\mathrm{ch}(u/2)\,;$$

d'où

$$-u\frac{\mathrm{sh(u/2)}}{\mathrm{ch(u/2)}} = \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k}\frac{(k!)^2}{(2k)!}2^{2k}(-1)^k \mathrm{sh}^{2k}(u/2) = \frac{2u}{e^u+1} - u.$$

On retrouve la fonction génératrice exponentielle des nombres de Genocchi signés :

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge 0}(-1)^n G_{2n}\frac{u^{2n}}{(2n)!} &= \sum_{k\ge 1}(-1)^k\frac{k!\,(k-1)!}{(2k)!}2^{2k}\mathrm{sh}^{2k}(u/2)\\ &= \sum_{k\ge 1}\frac{k!\,(k-1)!}{(2k)!\,(k-j)!}(-1)^k(e^{u/2}-e^{-u/2})^{2k}.\end{aligned}$$

Enfin, on sait que cette dernière identité est équivalente à l'identité de l'énoncé de la proposition. □

Les identités de la précédente proposition peuvent être récrites :

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge 0} g_n u^n &= u + \sum_{n\ge 2} g_n u^n\\ &= u + \sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^k k!\,(k-1)!\,u^{2k}}{(1-u^2)(1-2^2u^2)\ldots(1-k^2u^2)}\\ &= u + \sum_{k\ge 1}\ \sum_{-k\le j\le k}\frac{(-1)^j k!\,(k-1)!}{(k+j)!\,(k-j)!}\frac{1}{1-ju}.\end{aligned}\tag{12.5}$$

Avant d'établir la fonction génératrice des nombres de Genocchi médiants, nous donnons un lemme supplémentaire sur les matrices de Seidel en général.

Soit $(a_{i,j})$ la matrice de Seidel associée à une suite (a_n) $(n\ge 0)$ [on dira aussi : associée à la série formelle $a=\sum_{n\ge 0} a_n u^n$]. Pour tout $i\ge 0$ on désigne par $R_i\,a$ (resp. $T_i\,a$) la fonction génératrice de la *ligne* i (resp. de la diagonale issue du point $(i,0)$). Autrement dit, on pose :

$$R_i\,a = \sum_{j\ge 0} a_{i,j}u^j \qquad \text{et} \qquad T_i\,a = \sum_{j\ge 0} a_{i+j,j}u^j. \tag{12.6}$$

LEMME 12.3. — *Soit $(a_{i,j})$ la matrice de Seidel associée à la suite (ω^n) $(n\ge 0)$. Alors*

$$R_i\,a = \sum_{j\ge 0} a_{i,j}u^j = \frac{(1+\omega)^i}{1-\omega u}\,; \tag{12.7}$$

$$T_i\,a = \sum_{j\ge 0} a_{i+j,j}u^j = \frac{(1+\omega)^i}{1-\omega(1+\omega)u}. \tag{12.8}$$

Démonstration. — En effet, $a_{i,j} = \sum\limits_{0\le k\le i}\binom{i}{k}\omega^{j+k} = \omega^j(1+\omega)^i$ et aussi $a_{i+j,j}=\omega^j(1+\omega)^{i+j}$. □

Notons F_{2k} la fraction rationnelle apparaissant dans le membre de droite de (12.5). On a : $o(F_{2k}) = 2k$. Par conséquent, en appliquant l'opérateur T_1 aux deux membres, on obtient, d'après (12.8) :

$$\begin{aligned}
T_1\Bigl(\sum_{n\ge 0} g_n u^n\Bigr) &= \sum_{n\ge 0} g_{n+1,n} u^n = 1 - u + 2u^2 - 8u^3 + \cdots \\
&= T_1(u) + \sum_{k\ge 1}\sum_{-k\le j\le k} \frac{(-1)^j k!\,(k-1)!}{(k+j)!\,(k-j)!} T_1\Bigl(\frac{1}{1-ju}\Bigr) \\
&= 1 + u + \sum_{k\ge 1}\sum_{-k\le j\le k} \frac{(-1)^j k!\,(k-1)!}{(k+j)!\,(k-j)!} \frac{(1+j)}{1-j(j+1)u}.
\end{aligned}$$

La question est maintenant de remettre la somme $\sum_j$ du membre de droite de la seconde identité sous la forme d'une fraction rationnelle. Posons

$$f_{k,j} = \frac{(-1)^j k!\,(k-1)!}{(k+j)!\,(k-j)!} \frac{(1+j)}{1-j(j+1)u}.$$

Pour $j = 0, 1, \ldots, (k-1)$, les deux fractions rationnelles $f_{k,j}$ et $f_{k,-(j+1)}$ ont la forme :

$$f_{k,j} = \frac{c_{k,j}}{1-j(j+1)u} \qquad \text{et} \qquad f_{k,-(j+1)} = \frac{c_{k,-(j+1)}}{1-j(j+1)u},$$

où $c_{k,j}$ et $c_{k,-(j+1)}$ sont des scalaires. On a donc :

$$\sum_{-k\le j\le k} f_{k,j} = \frac{k!\,(k-1)!}{(k!)^2} + \sum_{1\le j\le k} \frac{d_{k,j}}{1-j(j+1)u},$$

où les $d_{k,j}$ $(1 \le j \le k-1)$ sont des scalaires. Si on réduit cette somme au même dénominateur, on obtient une fraction rationnelle de la forme :

$$\frac{P_k(u)}{(1-1\times 2u)(1-2\times 3u)\ldots(1-k(k+1)u)},$$

où $P_k(u)$ est un polynôme en u de degré au plus égal à k. Par ailleurs, la somme de ces fractions rationnelles est égale à $T_1(F_{2k})$, qui est d'ordre au moins égal à k. Il en est de même pour le polynôme $P_k(u)$. Par conséquent, ce polynôme est de la forme $\mathrm{C}^{\mathrm{te}} u^k$ et il suffit d'évaluer la constante C^{te}. Naturellement,

$$\mathrm{C}^{\mathrm{te}} = \frac{k!\,(k-1)!}{(k!)^2}(-1)^k k!\,(k+1)! = (-1)^k (k-1)!\,(k+1)!$$

D'où la fonction génératrice des nombres de Genocchi médiants :

$$\sum_{n\ge 0} g_{n+1,n} u^n = 1 + u + \sum_{k\ge 1} \frac{(-1)^k (k-1)!\,(k+1)!\,u^k}{(1-2u)(1-6u)\ldots(1-k(k+1)u)}. \tag{12.9}$$

13. Nombres tangents et sécants

On peut définir la fonction tangente, tg, et la fonction sécante, sec, comme les développements en séries des fonctions usuelles

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u} = \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}\, D_{2n-1}, \tag{13.1}$$

$$\sec u = \frac{1}{\cos u} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}\, D_{2n}, \tag{13.2}$$

la fonction tangente (resp. sécante) étant impaire (resp. paire), donc ayant des coefficients pairs nuls (resp. coefficients impairs nuls). En posant $D(u) := \operatorname{tg} u + \sec u$ et en utilisant les relations usuelles sur les dérivées des fonctions trigonométriques (valables encore dans l'algèbre des séries formelles) on voit que l'on a :

$$2\, D'(u) = D(u)^2 + 1, \qquad D(0) = 1. \tag{13.3}$$

A son tour, cette identité (13.3) est équivalente à la relation suivante entre les coefficients D_n :

$$2D_n = \sum_{1\leq k\leq n} \binom{n-1}{k-1} D_{k-1}\, D_{n-k} \quad (n \geq 2), \qquad D_0 = D_1 = 1. \tag{13.4}$$

On peut encore dériver (13.3) et obtenir : $D''(u) = D'(u)\, D(u)$, ce qui équivaut à l'identité

$$D_n = \sum_{1\leq k\leq n-1} \binom{n-2}{k-1} D_k\, D_{n-k-1} \quad (n \geq 2), \qquad D_0 = D_1 = 1. \tag{13.5}$$

Cette dernière formule montre que les coefficients D_n sont tous des *entiers positifs*. Leurs premières valeurs apparaissent dans le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D_n	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521	353792	2702765

Naturellement, les coefficients D_{2n+1} (souvent aussi notés T_{2n+1}) sont les *nombres tangents* et les coefficients D_{2n} (notés également E_{2n}) sont les *nombres sécants* ou *d'Euler*.

Les nombres tangents (D_{2n-1}) sont reliés aux nombres de Bernoulli et de Genocchi comme suit. D'après (6.3), on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} G_{2n} = u \ \operatorname{tg}(u/2) = \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{2^{2n-1}(2n-1)!} D_{2n-1},$$

d'où l'on tire :

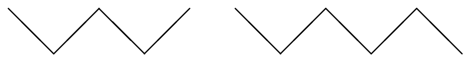
$$n\, D_{2n-1} = 2^{2n-2} G_{2n} \qquad (n \geq 1). \tag{13.6}$$

Les premières valeurs des nombres tangents D_{2n-1} $(n \geq 1)$, comparées avec celles des nombres de Genocchi, apparaissent dans le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5	6	7
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227
D_{2n-1}	1	2	16	272	7936	353.792	22.368.256

Comme G_{2n} est impair, (13.6) donne la 2-valuation des nombres nD_{2n-1}, c'est-à-dire la valeur de la plus grande puissance de 2 qui les divise.

La formule (13.4) s'interprète combinatoirement facilement à l'aide de la notion de *permutation alternante.* Une permutation $w = x_1x_2\ldots x_n$ de $12\ldots n$ est dite *alternante*, si pour tout j tel que $2 \leq 2j \leq n-1$, l'entier x_{2j} est inférieur à la fois à x_{2j-1} et à x_{2j+1} et si l'on a $x_{n-1} > x_n$, lorsque n est pair. Ainsi le graphe d'une permutation alternante est de la forme :

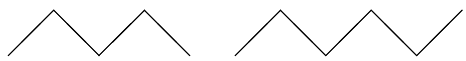


(n impair) (n pair)

THÉORÈME 13.1. — *Pour tout $n \geq 1$, le nombre de permutations alternantes de longueur n est égal à D_n.*

Par exemple, $D_1 = D_2 = 1$. Il y a $D_3 = 2$ permutations alternantes de longueur 3, à savoir 213 et 312. Il y en a $D_4 = 5$ d'ordre 4 ; ce sont : 2143, 3142, 3241, 4132, 4231.

Démonstration. — Pour tout $n \geq 1$, notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des permutations alternantes de longueur n et $\mathcal{D}'_n$ l'ensemble des permutations $x_1x_2\ldots x_n$ telles que x_{2j} est *plus grand* que x_{2j-1} et x_{2j+1} pour $2 \leq 2j \leq n-1$ et telles que $x_{n-1} < x_n$ lorsque n est pair. Les éléments de $\mathcal{D}'_n$ sont de la forme :



(n impair) (n pair)

Les éléments de $\mathcal{D}_n$ débutent par une descente $x_1 > x_2$; on les appellera aussi permutations alternantes, mais *décroissantes.* Ceux de $\mathcal{D}'_n$ débutent par une montée $x_1 < x_2$. Ce sont les permutations alternantes *croissantes.* L'application qui envoie le mot $x_1x_2\ldots x_n$ sur son *complément* à $(n+1)$, à savoir $(n+1-x_1)(n+1-x_2)\ldots(n+1-x_n)$ est évidemment une bijection de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathcal{D}'_n$. On pose $d_n = |\mathcal{D}_n| = |\mathcal{D}'_n|$ $(n \geq 1)$. Notons que pour $n \geq 2$, les ensembles $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}'_n$ sont disjoints.

Pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$, notons $\mathcal{D}_{n,k}$ l'ensemble des permutations $x_1x_2\ldots x_n$ appartenant à $\mathcal{D}_n \cup \mathcal{D}'_n$ telles que $x_k = n$. Lorsque $n \geq 2$, l'ensemble $\mathcal{D}_{n,k}$ est seulement constitué d'éléments de $\mathcal{D}_n$ (resp. $\mathcal{D}'_n$), lorsque k est impair (resp. pair). Lorsque $n \geq 2$, l'ensemble $\mathcal{D}_n \cup \mathcal{D}'_n$ est l'union disjointe :

$$\mathcal{D}_n \cup \mathcal{D}'_n = \sum_{1\le k\le n} \mathcal{D}_{n,k}.$$

Pour constituer un élément $x_1 x_2 \ldots x_n$ de $\mathcal{D}_{n,k}$, il suffit de :

(i) choisir un sous-ensemble I de $[\,n-1\,]$ de cardinal $(k-1)$;

(ii) former une permutation alternante décroissante (resp. croissante) w de l'ensemble I, si k est impair (resp. pair) ;

(iii) former une permutation alternante croissante w' de l'ensemble $[\,n-1\,]\setminus I$;

(iv) prendre le produit de juxtaposition $w\,n\,w'$.

Réciproquement, chaque permutation alternante décroissante ou croissante admet une et une seule telle factorisation. Comme la définition d'une permutation alternante dépend seulement de l'ordre mutuel de ses éléments, on a :

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = \binom{n-1}{k-1} d_{k-1}\, d_{n-1-(k-1)},$$

avec $d_0 = d_1 = 1$. De là

$$2d_n = \sum_{1\le k\le n} \binom{n-1}{k-1} d_{k-1}\, d_{n-k} \qquad (n \geq 2),$$

qui est précisément la relation de récurrence des nombres D_n. D'où $D_n = d_n$. $\square$

Remarque. — Le précédent théorème fournit une interprétation des nombres tangents et sécants en termes de comptages de *permutations alternantes*. D'après (11.8), les nombres de Genocchi s'interprètent aussi comme des cardinaux de classes de permutations alternantes. On peut donc penser que la relation (13.6) devrait avoir une démonstration combinatoire directe dans ce contexte. Cette même interprétation n'a été jusqu'ici d'aucun secours pour établir la formule (13.6) combinatoirement.

14. La matrice de Seidel des nombres tangents et sécants

Considérons la suite (a_n) $(n \geq 0)$ définie par : $a_0 = 1$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = (-1)^n D_{2n-1}$ pour $n \geq 1$. La fonction génératrice exponentielle de la suite (a_n) est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{0,*} &= 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^n D_{2n-1} \\ &= 1 + i\ \mathrm{tg}(iu) = 1 - \mathrm{th}\, u = \frac{2}{e^{2u}+1}. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 12.2 du chap. 1, la fonction génératrice exponentielle de la suite *finale* de la matrice de Seidel associée à la suite (a_n) est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{*,0} &= e^u \frac{2}{e^{2u}+1} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{\operatorname{ch} u} \ (= \operatorname{sech} u) \\ &= \frac{1}{\cos(iu)} = \sum_{n\ge 0} \frac{u^{2n}}{(2n)!} (-1)^n D_{2n}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi prouvé le résultat suivant.

THÉORÈME 14.1. — *Si dans une matrice de Seidel on prend comme suite initiale la suite des nombres tangents signés, alors la suite finale est celle des nombres sécants, eux aussi signés.*

La matrice de Seidel ainsi obtenue s'appelle évidemment la *matrice de Seidel des nombres tangents et sécants*. Les premières valeurs de ses coefficients sont reproduites dans le Tableau 20.

1	−1	0	2	0	−16	0	272	0
0	−1	2	2	−16	−16	272	272	
−1	1	4	−14	−32	256	544		
0	5	−10	−46	224	800			
5	−5	−56	178	1024				
0	−61	122	1202					
−61	−61	1324						
0	1385							
1385								

Tableau 20

Comme pour la matrice de Seidel des nombres de Genocchi, on a une règle des signes qui est la suivante : soit $(a_{i,j})$ $(i, j \ge 0)$ la matrice de Seidel de suite initiale $a_0 = 1$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = (-1)^n D_{2n-1}$ $(n \ge 1)$; alors si $i + j = 2n - 1$ et $i \ge 1$, ou $i + j = 2n$ et $j \le 2n - 1$, on a :

$$\operatorname{sgn} a_{i,j} = (-1)^n. \tag{14.1}$$

La règle des signes étant connue, on peut donc ne considérer que les valeurs absolues de ces nombres et disposer les contre-diagonales $\{|a_{i,j}|\,,\ i+j = n\}$ en lignes, en supprimant les zéros et en écrivant ces contre-diagonales de droite à gauche (resp. de gauche à droite), si n est impair (resp. n est pair). En justifiant à gauche, on obtient la Table 21.

k=	1	2	3	4	5	6	7	8	Somme
n=1	1								1
2	1								1
3	1	1							2
4	2	2	1						5
5	5	5	4	2					16
6	16	16	14	10	5				61
7	61	61	56	46	32	16			272
8	272	272	256	224	178	122	61		1385
9	1385	1385	1324	1202	1024	800	544	272	7936

Table 21

Notons que dans la table ci-dessus, on a décalé les indices k et n d'une unité. Soit $(K_{n,k})$ $(n, k \geq 1)$ la suite des nombres obtenus. De par la règle de calcul des coefficients de la matrice de Seidel, on déduit pour les $K_{n,k}$ la récurrence :

$$K_{1,1} = 1, \qquad K_{n,k} = 0, \qquad \text{si } k \geq n\,;$$

$$K_{n,k} = \sum_{1 \leq i \leq n-k} K_{n-1,i}, \qquad \text{si } n \geq 2,\ 1 \leq k \leq n-1. \tag{14.2}$$

La récurrence (14.2) permet d'obtenir une interprétation combinatoire des coefficients $K_{n,k}$, de la façon suivante.

Une permutation alternante $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ *croissante* d'ordre $n \geq 2$ (i.e., satisfaisant $x_1 < x_2$) ne peut débuter par n. Pour $n \geq 2$ et $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$, notons $\mathcal{D}_{n,k}$ l'ensemble des permutations alternantes croissantes $x_1 x_2 \ldots x_n$ débutant par $x_1 = k$. Posons, de plus, $D_{1,1} = 1$ et $D_{n,k} = |\mathcal{D}_{n,k}|$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$.

Proposition 14.2. — *La suite* $(D_{n,k})$ *satisfait la récurrence* (14.2). *En d'autres termes,*

$$D_{n,k} = \sum_{1 \leq i \leq n-k} D_{n-1,i}.$$

Démonstration. — Soit $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ une permutation appartenant à $\mathcal{D}_{n,k}$. Définissons une permutation $w' = x'_2 x'_3 \ldots x'_n$ d'ordre $(n-1)$ par :

$$x'_i = \begin{cases} n - x_i, & \text{si } x_i < k\,; \\ n + 1 - x_i, & \text{si } x_i > k. \end{cases}$$

L'application $w \mapsto w'$ envoie $\mathcal{D}_{n,k}$ sur $\sum_{1 \leq i \leq n-k} \mathcal{D}_{n-1,i}$ de façon bijective. $\square$

Notons que pour $n \geq 3$ on a : $D_{n,1} = D_{n,2} = D_{n-1}$. La prochaine étape est de calculer la fonction génératrice de la suite $(K_{n,k})$ *en utilisant l'interprétation combinatoire* précédente. Dans la proposition suivante, on calcule la fonction génératrice exponentielle des différentes *diagonales* de la matrice des $K_{n,k}$.

Proposition 14.3. — *Pour tout $k \geq 1$, on a l'identité :*

$$\sum_{m\geq k} \frac{u^{m-k}}{(m-k)!} D_{m+1,m+1-k} = \cos u\,(\sec u + \operatorname{tg} u)^{(k)}, \tag{14.3}$$

où l'exposant entre parenthèses désigne la $k^{\text{ième}}$ dérivée.

Démonstration. — On note que pour $k = 1$, le membre de droite de (14.3) est encore égal à $\sec u + \operatorname{tg} u$ et en effet on retrouve dans la diagonale du tableau des $K_{n,k}$ les nombres sécants et tangents.

Considérons une permutation alternante croissante $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ d'ordre $n \geq 2$ et prenons k tel que $1 \leq k \leq n-1$. Notons j l'entier défini par : $1 \leq j \leq n$; $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ tous plus grands que k et $x_j \leq k$. Soit w' et w'' les deux facteurs $w' := x_1 x_2 \ldots x_{j-1}$ ($= e$, le mot vide, si $j = 1$) et $w'' := x_j x_{j+1} \ldots x_n$. Soit aussi I l'ensemble des $(j-1)$ lettres de w'. Il est clair que les propriétés suivantes sont vérifiées (*cf.* Fig. 22) :

(i) I est contenu dans l'intervalle $[\,k+1, n\,]$;

(ii) w' est une permutation alternante croissante de I ;

(iii) w'' est une permutation alternante croissante de $[\,n\,] \setminus I$ débutant par une lettre au plus égale à k ;

(iv) j est impair et $1 \leq j \leq n-k+1$.

Dans ces conditions, le nombre de couples (I, w'), où I est de cardinal $(j-1)$, est égal à $\binom{n-k}{j-1} D_{j-1}$. Lorsque le couple (I, w') est fixé, le nombre de permutations w'' satisfaisant la propriété (iii) ci-dessus est égal à : $\sum_{1\leq i\leq i} D_{n-j+1,i}$. Or ce nombre est aussi égal à $D_{n-j+2,n-j+2-k}$, d'après la Proposition 14.2. De là, pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$D_n = \sum_{\substack{1\leq j\leq n-k+1\\ j\ \text{impair}}} \binom{n-k}{j-1} D_{j-1} D_{n-j+2,n-j+2-k}. \tag{14.4}$$

Lorsque $n = 2m \geq k+1$, l'identité ci-dessus s'écrit :

$$D_{2m} = \sum_{0\leq 2j\leq 2m-k} \binom{2m-k}{2j} D_{2j} D_{2m-2j+1,2m-2j+1-k}.$$

De là, pour $2m \geq k+1$, le nombre D_{2m} est égal au coefficient de $u^{2m-k}/(2m-k)!$ dans le produit :

$$\sum_{j\geq 0} \frac{u^{2j}}{(2j)!} D_{2j} \sum_{2i\geq k} \frac{u^{2i-k}}{(2i-k)!} D_{2i+1,2i+1-k}.$$

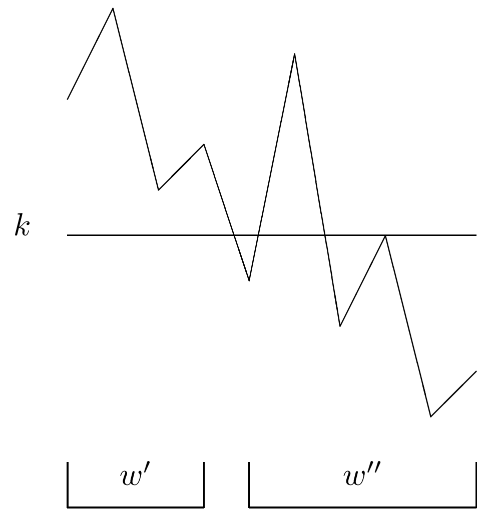


Fig. 22

Lorsque k est pair, on a le même résultat pour $2m = k$, car le terme constant dans le produit précédent est $D_{k+1,1} = D_k$. Par conséquent, l'identité suivante est vérifiée :

$$(14.5) \qquad \sum_{2m\geq k} \frac{u^{2m-k}}{(2m-k)!} D_{2m} = \sum_{j\geq 0} \frac{u^{2j}}{(2j)!} D_{2j} \sum_{2i\geq k} \frac{u^{2i-k}}{(2i-k)!} D_{2i+1,2i+1-k}.$$

Pour tout $k \geq 1$, notons $\sec^{(k)} u$ la $k^{\text{ième}}$ dérivée de $\sec u$. Alors (14.5) peut se récrire comme :

$$(14.6) \qquad \sum_{2i\geq k} \frac{u^{2i-k}}{(2i-k)!} D_{2i+1,2i+1-k} = \cos u.\sec^{(k)} u,$$

qui est la *fonction génératrice pour les coefficients* $D_{2i+1,2i+1-k}$.

Lorsque $n = 2m-1 \geq 3$ et $1 \leq k \leq 2m-2$, la formule (14.4) s'écrit :

$$D_{2m-1} = \sum_{0\leq 2j\leq 2m-1-k} \binom{2m-1-k}{2j} D_{2j} D_{2m-2j,2m-2j-k}.$$

On en tire l'identité

$$\sum_{2m\geq k+1} \frac{u^{2m-1-k}}{(2m-1-k)!} D_{2m-1} = \sum_{j\geq 0} \frac{u^{2j}}{(2j)!} D_{2j} \sum_{2i\geq k+1} \frac{u^{2i-k-1}}{(2i-k-1)!} D_{2i,2i-k},$$

soit encore

$$(14.7) \qquad \sum_{2i \geq k+1} \frac{u^{2i-k-1}}{(2i-k-1)!} D_{2i,2i-k} = \cos u.\, \mathrm{tg}^{(k)}\, u.$$

La formule (14.7) fournit ainsi la *fonction génératrice exponentielle* des coefficients $D_{2i,2i-k}$. La somme de (14.6) et (14.7) permet de retrouver la formule (14.3). □

Comme corollaire, on peut noter que des formules explicites peuvent être obtenues pour les coefficients $D_{n,k}$. En développant $\cos u$ dans (14.6), on obtient

$$\sum_{2i \geq k} \frac{u^{2i-k}}{(2i-k)!} D_{2i+1,2i+1-k} = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \frac{u^{2j}}{(2j)!} \sum_{2m \geq k} \frac{u^{2m-k}}{(2m-k)!} D_{2m}.$$

On en tire :

$$(14.8) \qquad D_{2i+1,2i+1-k} = \sum_{m \geq 0} (-1)^{i-m} \binom{2i-k}{2i-2m} D_{2m} \qquad (2i \geq k).$$

De la même manière, de (14.7) on déduit :

$$(14.9) \qquad D_{2i,2i-k} = \sum_{m \geq 1} (-1)^{i-m} \binom{2i-k-1}{2i-2m} D_{2m-1} \qquad (2i-1 \geq k).$$

15. Groupes de réarrangements

Dans ce paragraphe et le suivant, nous nous proposons de faire apparaître les nombres tangents et sécants comme des nombres d'orbites de groupes de transformation. La construction repose essentiellement sur le codage des permutations par des arbres binaires croissants tel qu'il a été décrit en § 10.5. L'action des groupes de transformation est, en effet, tout à fait parlante sur ces dernières structures. La notion de *x-factorisation* des permutations est par exemple directement inspirée de cette présentation.

Proposition 15.1. — *Soient $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ ($n \geq 1$) une permutation du mot $12 \ldots n$ et x l'une des lettres x_i ($1 \leq i \leq n$). Alors w admet une factorisation unique (w_1, w_2, x, w_4, w_5) de longueur 5, appelée sa x-factorisation, caractérisée par les trois propriétés :*

(i) *w_1 est vide ou sa dernière lettre est inférieure à x ;*
(ii) *w_2 (resp. w_4) est vide ou toutes ses lettres sont plus grandes que x ;*
(iii) *w_5 est vide ou sa première lettre est inférieure à x.*

Démonstration. — Comme x est une lettre de w, on a $w = w'xw''$. Soit w_2 (resp. w_4) le plus long facteur droit (resp. gauche) de w' (resp. w'') dont toutes les lettres sont plus grandes que x. Si la dernière (resp.

première) lettre de w' (resp. w'') est plus petite que x, ou si w' (resp. w'') est vide, alors w_2 (resp. w_4) est vide. On peut alors écrire $w' = w_1 w_2$ et $w'' = w_4 w_5$. La factorisation (w_1, w_2, x, w_4, w_5) satisfait bien les trois propriétés de la proposition.

Inversement, soit (w_1, w_2, x, w_4, w_5) une factorisation satisfaisant (i), (ii) et (iii). Alors (i) et (ii) (resp. (ii) et (iii)) impliquent que w_2 (resp. w_4) est le plus long facteur droit (resp. gauche) de $w_1 w_2$ (resp. $w_4 w_5$) dont toutes les lettres sont plus grandes que x. Par conséquent, il ne peut exister qu'une seule factorisation de w ayant les propriétés (i), (ii) et (iii). $\square$

Par exemple, les x-factorisations de 71654823 sont (en désignant par e le mot vide) :

$(e, 7, 1, 654823, e)$ pour $x = 1$;	$(71, 6548, 2, 3, e)$ pour $x = 2$;
$(7165482, e, 3, e, e)$ pour $x = 3$;	$(71, 65, 4, 8, 23)$ pour $x = 4$;
$(71, 6, 5, e, 4823)$ pour $x = 5$;	$(71, e, 6, e, 54823)$ pour $x = 6$;
$(e, e, 7, e, 1654823)$ pour $x = 7$;	$(71654, e, 8, e, 23)$ pour $x = 8$.

Revenant au cas général, soit (w_1, w_2, x, w_4, w_5) la x-factorisation d'une permutation w contenant x. On pose :

$$\varphi_x(w) = w_1 w_4 x w_2 w_5.$$

Il est évident que (w_1, w_4, x, w_2, w_5) est la x-factorisation de $\varphi_x(w)$. Par conséquent,

$$\varphi_x \varphi_x(w) = w.$$

Ainsi φ_x est une involution agissant sur le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations. On note G_n le sous-groupe du groupe des permutations agissant sur $\mathfrak{S}_n$, qui est engendré par l'ensemble $\{\varphi_x : 1 \le x \le n\}$.

Le groupe G_n est mieux visualisé lorsqu'on le fait agir sur les *arbres binaires croissants* associés aux permutations (*cf.* § 10.5). Soit Tw le déploiement associé à la permutation w. Par exemple, la permutation $w = 71654823$ correspond à l'arbre décrit dans la Fig. 23.

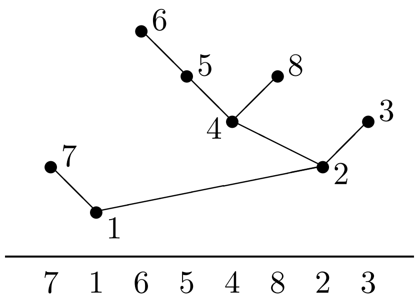


Fig. 23

L'action de l'involution φ_x sur l'arbre Tw peut être vue de la façon suivante : d'abord φ_x n'a pas d'action sur Tw, si x est un sommet final de Tw. Si dans Tw le sommet x est la racine d'un seul sous-arbre T' placé à la gauche (resp. à la droite) de x, l'involution φ_x fait basculer T' vers la droite (resp. vers la gauche). Finalement, si x est la racine d'un arbre $T'xT''$, où T' et T'' ne sont pas vides, l'involution φ_x permute globalement les arbres T' et T'' (sans modifier leurs structures internes).

Par exemple, avec l'arbre Tw de la Fig. 23, on a $\varphi_6(Tw) = Tw$, puisque 6 est un sommet final, alors que les arbres $\varphi_5(Tw)$ et $\varphi_4(Tw)$ sont donnés par les transformations suivantes décrites dans les Fig. 24 et Fig. 25.

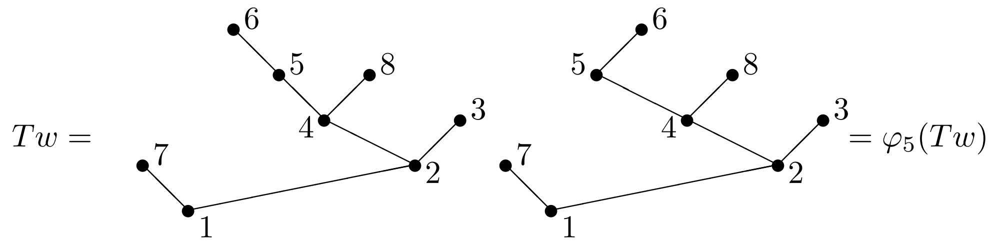


Fig. 24

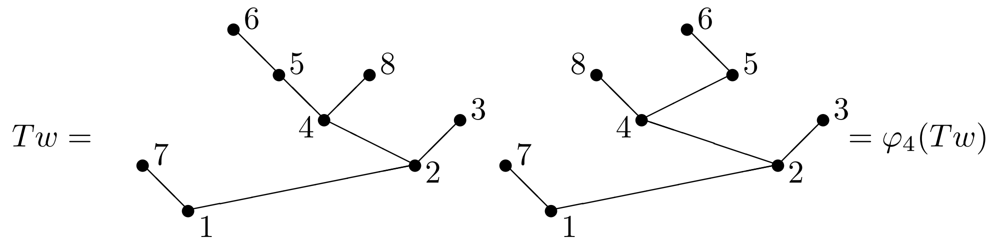


Fig. 25

La prochaine étape est de démontrer que les involutions φ_x commutent deux à deux. Ce résultat semble tout à fait évident lorsqu'on regarde l'action du groupe G_n sur les arbres binaires croissants. Nous donnons ici une démonstration sur les permutations elles-mêmes, qui fait apparaître certains invariants utilisés dans la suite.

Pour $n = 1$, il n'y a rien à prouver. Lorsque $n \geq 2$, il est commode d'associer à chaque permutation w d'ordre n l'*ordre linéaire* ainsi défini : soient z, z' deux éléments distincts de $[\,n\,]$. Alors

(15.1) $\qquad w(z, z')$ si et seulement si z est à la gauche de z' dans w.

Si $w(z, z')$ est vrai, on note $I_{zz'}w$ le facteur de w dont les première et dernière lettres sont z, z'. La lettre minima — par rapport à l'ordre naturel des entiers — de $I_{zz'}w$ est notée $\mu_w(z,z')$. Si $w(z',z)$ a lieu, la relation $w(z,z')$ n'a pas lieu. Dans ce cas, on pose $\mu_w(z,z')=\mu_w(z',z)$. Ainsi μ_w est défini pour tous les couples *ordonnés* (z,z') tels que $z\neq z'$. On l'appelle la *fonction minima* de w.

Soit (w_1,w_2,x,w_4,w_5) la x-factorisation de w. L'involution φ_x permute les mots w_2 et w_4 seulement. Par conséquent, φ_x renverse l'ordre $w(\cdot,\cdot)$ pour les couples (z,z') tels que (i) $z\neq z'$; (ii) z est une lettre de w_2x ; (iii) z' est une lettre de xw_4. D'autre part, z est une lettre de w_2x et z' de xw_4 avec $z\neq z'$, si et seulement si $w(z,z')$ et $\mu_w(z,z')=x$. L'ordre linéaire $\varphi_x w(\cdot,\cdot)\big(=(\varphi_x(w))(\cdot,\cdot)\big)$ peut donc être aussi défini par :

$$\text{(15.2)}\qquad \text{si}\quad w(z,z'),\quad \text{alors}\begin{cases}\varphi_x w(z',z), & \text{si } \mu_w(z,z')=x\,;\\ \varphi_x w(z,z'), & \text{autrement.}\end{cases}$$

De façon évidente, w et $w'=\varphi_x(w)$ ont la même fonction minima : $\mu_w=\mu_{w'}$.

Soient $x\neq y$, $w'=\varphi_x(w)$ et $w(z,z')$. Si $\mu_w(z,z')=x$, la relation (15.2) implique $w'(z',z)$. De plus $\mu_{w'}(z,z')=x$, puisque w et w' ont la même fonction minima. De la relation (15.2) de nouveau, mais avec w' remplaçant w et y remplaçant x, on obtient $\varphi_y w'(z',z)$, i.e. $\varphi_y\varphi_x w(z',z)$.

Si $\mu_w(z,z')\neq x$, alors $\varphi_x w(z,z')$, i.e., $w'(z,z')$. Une autre application de (15.2) avec w' et y à la place de w et x donne :

$$\begin{cases}\varphi_y w'(z',z), & \text{si } \mu_{w'}(z,z')=y\,;\\ \varphi_y w'(z,z'), & \text{si } \mu_{w'}(z,z')\neq y.\end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\text{(15.3)}\qquad \text{si}\quad w(z,z'),\quad \text{alors}\begin{cases}\varphi_y\varphi_x w(z',z), & \text{si } \mu_w(z,z')\in\{x,y\}\,;\\ \varphi_y\varphi_x w(z,z'), & \text{autrement.}\end{cases}$$

Dans (15.3) le rôle joué par x et y est symétrique. Comme $\varphi_y\varphi_x w(\cdot,\cdot)$ est un ordre linéaire de $[\,n\,]$, on en déduit : $\varphi_x\varphi_y=\varphi_y\varphi_x$. Comme cette identité est évidemment vraie pour $x=y$, on a prouvé la proposition suivante.

Proposition 15.2. — *Pour $1\le x,y\le n$, on a : $\varphi_x\varphi_y=\varphi_y\varphi_x$.*

Comme tous les φ_x commutent, on peut poser pour tout sous-ensemble X de $[\,n\,]$

$$\varphi_X=\prod_{x\in X}\varphi_x.$$

Lorsque X est vide, convenons que φ_X est l'application identique. D'autre part, comme φ_n est aussi l'application identique, on peut restreindre X aux sous-ensembles de $[\,n-1\,]$. Il résulte de la proposition 15.2 que l'on a :

$$\text{(15.4)}\qquad \varphi_X\varphi_Y=\varphi_{X\triangle Y},$$

pour toute paire $\{X, Y\}$ de sous-ensembles de $[\,n-1\,]$, en désignant par $X \triangle Y$ la différence symétrique de X et Y $(X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X))$.

Par récurrence sur $|X|$ les relations (15.2) et (15.3) impliquent la proposition suivante :

Proposition 15.3. — *Soient X un sous-ensemble de $[\,n-1\,]$ et w une permutation d'ordre n. Alors $\varphi_X w(\cdot,\cdot)$ est l'ordre linéaire défini par :*

$$\text{(15.5)} \qquad \text{si} \quad w(z, z'), \quad \text{alors} \begin{cases} \varphi_X w(z', z), & \textit{si } \mu_w(z, z') \in X \ ; \\ \varphi_X w(z, z'), & \textit{autrement.} \end{cases}$$

Corollaire 15.4. — *Pour $n \geq 2$, le groupe G_n est isomorphe au produit direct de $(n-1)$ groupes d'ordre 2. Il est constitué par les 2^{n-1} involutions distinctes φ_X, où X est un sous-ensemble de $[\,n-1\,]$.*

Démonstration. — L'ensemble $2^{[n-1]}$ des parties de $[\,n-1\,]$ muni de l'opération $\triangle$ est isomorphe au produit direct de $(n-1)$ groupes d'ordre 2. Il résulte de (15.4) que G_n est l'image homomorphe de $2^{[n-1]}$ par l'application $X \mapsto \varphi_X$. Il suffit de montrer que $X \mapsto \varphi_X$ est bijectif. Soient X un sous-ensemble non vide de $[\,n-1\,]$ et w un mot de la forme nzw' avec $z \in X$. Comme $w(n, z)$ et $\mu_w(n, z) = z \in X$, on a $\varphi_X w(z, n)$ et par conséquent $\varphi_X w \neq w$. De là, le noyau de l'application $X \mapsto \varphi_X$ est réduit au seul élément $\emptyset$ de $2^{[n-1]}$. $\square$

Soit $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ une permutation. On définit son *image-miroir* comme étant la permutation $\mathbf{r}\, w = x_n \ldots x_2 x_1$. Notons, de plus, $\{\mu_w\}$ l'ensemble des valeurs prises par μ_w et par $|\mu_w|$ le cardinal de cet ensemble.

Corollaire 15.5. — *Soient X un sous-ensemble de $[\,n-1\,]$ et w une permutation d'ordre n. Alors*

$$\varphi_X(w) = \mathbf{r}\, w, \quad \textit{si et seulement si} \quad X \supset \{\mu_w\}.$$

Démonstration. — On observe que $\varphi_X(w) = \mathbf{r}\, w$, si et seulement si $\varphi_X w(z', z)$ est vrai pour tous les couples ordonnés (z, z') tels que $w(z, z')$. D'après (15.5), la dernière condition est équivalente à la propriété d'inclusion $X \supset \{\mu_w\}$. $\square$

16. Orbites de groupe

On a vu, dans le paragraphe précédent, que la fonction μ, définie en (15.1), était orbite-invariante. En fait, μ *caractérise* les orbites, comme décrit dans la proposition suivante.

Proposition 16.1. — *Si $\mu_w = \mu_{w'}$, alors $w' = \varphi_X(w)$ pour un certain $X \subset [\,n-1\,]$, i.e., w et w' appartiennent à la même orbite de G_n. En fait, si $\mu_w = \mu_{w'}$, alors $w' = \varphi_X(w)$, avec X donné par :*

$$X = \{\mu_w(z, z') : w(z, z') \;\&\; w'(z', z)\}.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver la seconde partie de la proposition. Montrons d'abord que si

$$\mu_w(z'', z''') = x \in X, \quad z'' \neq z''' \quad \text{et} \quad w(z'', z'''), \tag{16.1}$$

alors $w'(z''', z'')$. Par définition de X, il existe un couple (z, z') ayant la propriété :

$$w(z, z'),\ w'(z', z) \text{ et } \mu_w(z, z') = x. \tag{16.2}$$

Soit (w_1, w_2, x, w_4, w_5) (resp. $(w_1', w_2', x, w_4', w_5')$) la x-factorisation de w (resp. w') et supposons $w'(z'', z''')$. La dernière condition combinée avec (16.1) et (16.2) implique que z'' et z (resp. z et z''', z' et z''', z'' et z') sont des lettres de $w_2'x$ et xw_4' (resp. w_2x et xw_4, $w_2'x$ et xw_4', w_2x et xw_4). Par conséquent, chaque paire $\{z, z''\}$, $\{z, z'''\}$, $\{z', z'''\}$, $\{z', z''\}$ contient un entier égal à x. Si $z = x$, alors $z' \neq x$, puisque $z \neq z'$. Il en résulte que $z'' = x = z'''$, ce qui est une contradiction, puisque $z'' \neq z'''$. Si $z'' = x$, alors $z''' \neq x$, puisque $z'' \neq z'''$. Alors $z = x = z'$, ce qui est une contradiction puisque $z \neq z'$. Donc l'hypothèse (16.1) implique $w'(z''', z'')$. Or, il est équivalent de dire que $\mu_w(z'', z''') \in X$ et de dire qu'ou bien $w(z'', z''')$ et $w'(z''', z'')$, ou bien $w(z''', z'')$ et $w'(z'', z''')$. De là

$$\begin{cases} \mu_w(z'', z''') \in X,\ w(z'', z''') \text{ implique } w'(z''', z'')\,; \\ \mu_w(z'', z''') \notin X,\ w(z'', z''') \text{ implique } w'(z'', z'''). \end{cases} \tag{16.3}$$

En comparant (16.3) et (15.5), on conclut que $w' = \varphi_X(w)$. $\square$

Il résulte de la Proposition 16.1 que l'orbite de w est constituée par les $2^{|\mu_w|}$ éléments *distincts* $\varphi_X(w)$ ($X \subset \{\mu_w\}$). De là

$$1 = \sum_{w'} 2^{-|\mu_{w'}|},$$

où la somme est étendue à toutes les permutations w' appartenant à l'orbite de w. Soit θ_n le nombre d'orbites de G_n. En sommant sur toutes les orbites de G_n la formule précédente, on obtient

$$\theta_n = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} 2^{-|\mu_w|}.$$

Soient $1 \leq i \leq n$ et $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ une permutation. Alors x_i est appelé *pic* de w, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) ou bien $i = 1$, ou bien $2 \leq i$ et $x_{i-1} < x_i$;

(ii) ou bien $i = n$, ou bien $i \leq n - 1$ et $x_i > x_{i+1}$.

On note $P(w)$ l'ensemble des pics de w et on pose $p(w) = |P(w)|$.

Proposition 16.2. — *Pour toute permutation w d'ordre n, on a $\{\mu_w\} = [\,n\,] \setminus P(w)$. D'où $|\mu_w| = n - p(w)$, et l'orbite contenant w est constituée par les $2^{n-p(w)}$ permutations $\varphi_X(w)$, où $X \subset [\,n\,] \setminus P(w)$.*

Démonstration. — Soit (w_1, w_2, x, w_4, w_5) la x-factorisation de w. Alors x est un pic, si et seulement si les deux facteurs w_2 et w_4 sont vides, c'est-à-dire si et seulement si on ne peut jamais avoir $\mu_w(z, z') = x$ pour un couple (z, z') avec $z \neq z'$. Ainsi x est un pic, si et seulement si $x \notin \{\mu_w\}$. □

Ainsi, le nombre d'orbites de G_n est aussi égal à

$$\theta_n = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} 2^{-n+p(w)}. \tag{16.4}$$

Théorème 16.3. — *Le nombre d'orbites θ_n de G_n est égal au nombre sécant (ou tangent) D_n ($n \geq 1$).*

Démonstration. — Par convention, on pose $D_0 = \theta_0 = 1$ et on a : $D_1 = \theta_1 = 1$, $D_2 = \theta_2 = 1$. Il suffit de prouver que θ_n satisfait la relation de récurrence des D_n donnée en (13.4), qu'on va récrire :

$$2\theta_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} \theta_i \theta_{n-i} \qquad (n \geq 1).$$

Notons $\mathfrak{S}_{n+1,i}$ l'ensemble des permutations σ d'ordre $(n+1)$ telles que $\sigma(i+1) = 1$ ($0 \leq i \leq n$, $n \geq 1$). Il est tout d'abord évident que l'on a :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,i}} 2^{-(n+1)+p(\sigma)} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 2^{-n+p(\sigma)} = \frac{1}{2}\theta_n,$$

lorsque $i = 0$ ou $i = n$. Lorsque $1 \leq i \leq n-1$, envoyons chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,i}$ sur le couple (σ', σ'') défini par $\sigma' = \sigma(1) \ldots \sigma(i)$ et $\sigma'' = \sigma(i+2) \ldots \sigma(n+1)$. L'application $\sigma \mapsto (\sigma', \sigma'')$ est une bijection de $\mathfrak{S}_{n+1,i}$ sur l'ensemble des couples (σ', σ'') tels que σ' est une permutation d'un sous-ensemble I de $\{2, 3, \ldots, n+1\}$, de cardinal i, et σ'' une permutation de $\{2, 3, \ldots, n+1\} \setminus I$. De plus, $p(\sigma) = p(\sigma') + p(\sigma'')$, à cause de la convention qu'on s'est imposée sur les pics et le fait que 1 n'est jamais un pic dans une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ avec $n \geq 1$.

D'autre part, la somme $\sum 2^{-i+p(\sigma')}$ ($\sigma' \in \mathfrak{S}_I$), où σ' varie dans l'ensemble des permutations de I, de cardinal i, est égale à $\sum 2^{-i+p(\sigma')}$ ($\sigma' \in \mathfrak{S}_i$), c'est-à-dire, par récurrence sur n, à θ_i. La définition d'un pic ne dépend, en effet, que de l'ordre mutuel des éléments.

De la même façon, la somme $\sum 2^{-(n-i)+p(\sigma'')}$, où σ'' varie dans l'ensemble des permutations de $\{2, 3, \ldots, n+1\} \setminus I$, est égale à θ_{n-i}. De là

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,i}} 2^{-(n+1)+p(\sigma)} = \frac{1}{2} \binom{n}{i} \theta_i \theta_{n-i},$$

et donc

$$2\theta_{n+1} = \theta_n + \sum_{1 \le i \le n-1} \binom{n}{i} \theta_i \theta_{n-i} + \theta_n = \sum_{0 \le i \le n} \binom{n}{i} \theta_i \theta_{n-i}. \quad \square$$

Dans la Fig. 26, on a représenté les $D_4 = 5$ orbites de G_4 sous la forme d'un graphe. Le graphe a $4!$ sommets étiquetés par les $4!$ permutations d'ordre 4. Les sommets w et w' sont reliés par une arête x si l'on a $\varphi_x(w) = w'$. Sous chaque orbite figurent les valeurs de μ sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure : $(\mu(i,j))$ $(1 \le i \le j \le 4)$.

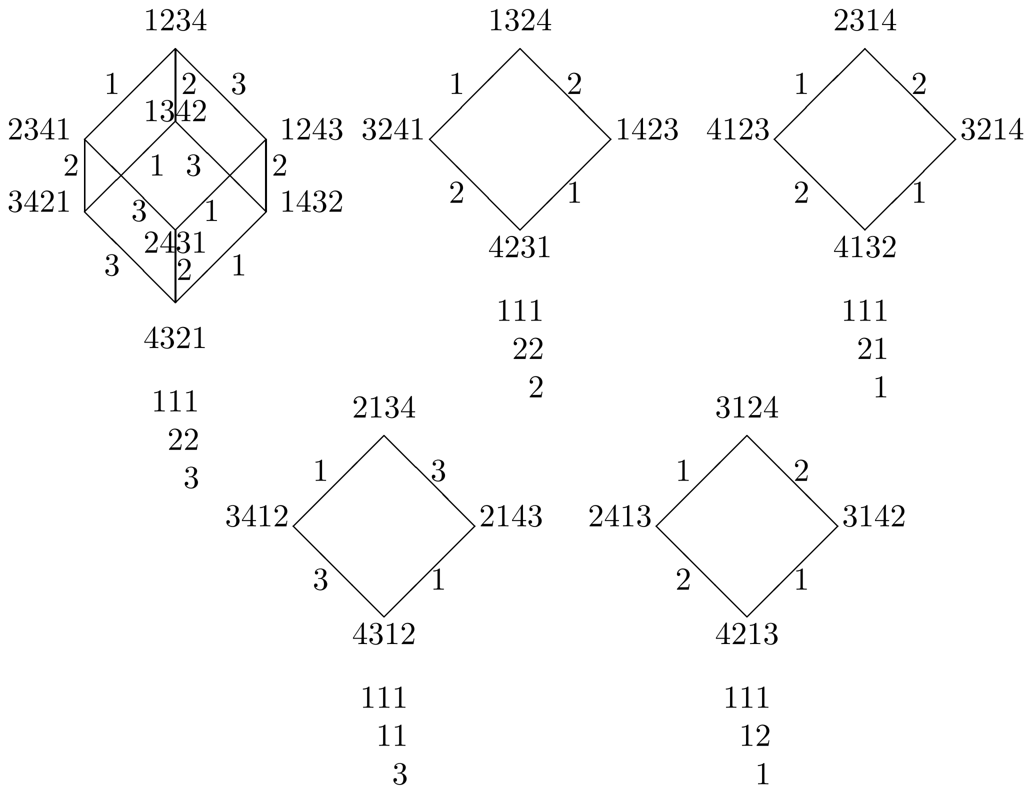


Fig. 26

17. Fractions continues formelles de Stieltjes

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des séries formelles en une variable u, de terme constant égal à 1 et dont *tous* les coefficients sont non nuls. Si $c =$

La rédaction des paragraphes 17-20 doit beaucoup au contenu d'un mémoire non publié "Les fractions continues", 34 p. de Dominique Dumont. Notre présentation en conserve l'esprit, mais s'en écarte très sensiblement dans la forme.

$1 + \sum_{n\ge 1} c(n)u^n$ est une telle série, formons, pour chaque entier $n \ge 1$, la fraction rationnelle :

$$\mathrm{Stiel}_n(c) := \cfrac{1}{1-\cfrac{c(1)u}{1-\cfrac{c(2)u}{1-\cfrac{c(3)u}{\ddots\, 1-\cfrac{c(n-1)u}{1-c(n)u}}}}}.$$

Notons

$$p_n(u) = p_n(c(1), c(2), \ldots, c(n); u) \text{ et } q_n(u) = q_n(c(1), c(2), \ldots, c(n); u)$$

son numérateur et son dénominateur. Comme $q_n(0) = 1$, cette fraction rationnelle est une série formelle bien définie. On pose :

$$\mathrm{Stiel}_n(c) = \frac{p_n(u)}{q_n(u)} := 1 + a^{(n)}(1)u + a^{(n)}(2)u^2 + \cdots + a^{(n)}(k)u^k + \cdots$$

Théorème 17.1. — *La suite des séries formelles* $(\mathrm{Stiel}_n(c))$ $(n \ge 1)$ *est convergente. Soit* $\mathrm{Stiel}(c) := 1 + a(1)u + a(2)u^2 + \cdots$ *la limite de cette suite. Alors, pour tout* $n \ge 1$, *on a :*

$$a(n) = a^{(n)}(n) = a_n^{(n+1)}(n) = a^{(n+2)}(n) = \cdots \tag{17.1}$$

De plus, l'application $c \mapsto \mathrm{Stiel}(c)$ *est injective.*

Démonstration. — Par convention, posons $p_0(u) = 1$, $p_{-1}(u) = 0$ et $q_0(u) = 1$, $q_{-1}(u) = 1$ et montrons, par récurrence sur n, que l'on a les identités :

$$\begin{aligned} p_n(u) &= p_{n-1}(u) - c(n)u\, p_{n-2}(u) \qquad (n \ge 1)\,; \\ q_n(u) &= q_{n-1}(u) - c(n)u\, q_{n-2}(u) \qquad (n \ge 1). \end{aligned} \tag{17.2}$$

En effet, la fraction rationnelle $\mathrm{Stiel}_{n+1}(c)$ se déduit de $\mathrm{Stiel}_n(c)$ en substituant au facteur $c(n)u$ la fraction $c(n)u/(1 - c(n+1)u)$

$$\frac{p_{n+1}(u)}{q_{n+1}(u)} = \frac{p_n(u)}{q_n(u)}\Big|_{c(n)u \leftarrow c(n)u/(1-c(n+1)u)},$$

soit

$$\frac{p_{n+1}(u)}{q_{n+1}(u)} = \frac{p_{n-1}(u) - c(n)u\, p_{n-2}(u)}{q_{n-1}(u) - c(n)u\, q_{n-2}(u)}\Big|_{c(n)u \leftarrow c(n)u/(1-c(n+1)u)},$$

en appliquant la substitution précédente. Comme aucun des polynômes $p_{n-1}(u)$, $p_{n-2}(u)$, $q_{n-1}(u)$, $q_{n-2}(u)$ ne dépend de $c(n)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}(u)}{q_{n+1}(u)} &= \frac{p_{n-1}(u) - \dfrac{c(n)u}{1-c(n+1)u}\, p_{n-2}(u)}{q_{n-1}(u) - \dfrac{c(n)u}{1-c(n+1)u}\, q_{n-2}(u)} \\
&= \frac{p_{n-1}(u) - c(n)u\, p_{n-2}(u) - c(n+1)u\, p_{n-1}(u)}{q_{n-1}(u) - c(n)u\, q_{n-2}(u) - c(n+1)u\, q_{n-1}(u)} \\
&= \frac{p_n(u) - c(n+1)u\, p_{n-1}(u)}{q_n(u) - c(n+1)u\, q_{n-1}(u)},
\end{aligned}$$

en appliquant, une dernière fois, la récurrence au stade n. La récurrence (17.2) est donc encore vraie au stade $(n+1)$.

Par itération, on obtient :

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(u)q_n(u) - p_n(u)q_{n+1}(u)& \\
&= [p_n(u) - c(n+1)u\, p_{n-1}(u)]q_n(u) \\
&\qquad - p_n(u)[q_n(u) - c(n+1)u\, q_{n-1}(u)] \\
&= c(n+1)u[p_n(u)q_{n-1}(u) - p_{n-1}(u)q_n(u)] \\
&= c(n+1)u \ldots c(1)u[p_0(u)q_{-1}(u) - p_{-1}(u)q_0(u)] \\
&= c(1)c(2)\ldots c(n+1)u^{n+1},
\end{aligned}$$

soit encore

$$\frac{p_{n+1}(u)}{q_{n+1}(u)} - \frac{p_n(u)}{q_n(u)} = \frac{c(1)c(2)\ldots c(n+1)u^{n+1}}{q_{n+1}(u)q_n(u)}. \tag{17.3}$$

Comme les coefficients $c(k)$ sont non nuls, l'ordre de la série $\mathrm{Stiel}_{n+1}(c) - \mathrm{Stiel}_n(c)$ est égal à $n+1$. D'où, pour tout $k \geq 1$, la série formelle $\mathrm{Stiel}_{n+k}(c) - \mathrm{Stiel}_n(c) = (\mathrm{Stiel}_{n+k}(c) - \mathrm{Stiel}_{n+k-1}(c)) + \cdots + (\mathrm{Stiel}_{n+1}(c) - \mathrm{Stiel}_n(c))$ est aussi d'ordre $n+1$. Donc, en particulier,

$$a^{(n+k)}(n) = a^{(n+k-1)}(n) = \cdots = a^{(n)}(n),$$

une valeur que nous posons égale à $a(n)$. Pour $1 \leq k \leq n$ on a donc : $a(k) = a^{(k)}(k) = a^{(n)}(k)$. La série $\mathrm{Stiel}(c) - \mathrm{Stiel}_n(c)$ est au moins d'ordre $n+1$, ce qui prouve que $\lim_n \mathrm{Stiel}_n(c) = \mathrm{Stiel}(c)$.

Soient maintenant deux séries distinctes c et c' de $\mathcal{P}$ et n le plus petit indice tel que l'on ait $c(n+1) \neq c'(n+1)$. L'identité (17.3) écrite pour c et c' donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stiel}_{n+1}(c) - \mathrm{Stiel}_n(c) &= c(1)\cdots c(n)c(n+1)u^{n+1} + b; \\
\mathrm{Stiel}_{n+1}(c') - \mathrm{Stiel}_n(c') &= c(1)\cdots c(n)c'(n+1)u^{n+1} + b';
\end{aligned}$$

où b et b' sont des séries d'ordre au moins égal à $n+2$. Comme $\mathrm{Stiel}_n(c) = \mathrm{Stiel}_n(c')$, on en tire :

$$\mathrm{Stiel}_{n+1}(c') - \mathrm{Stiel}_{n+1}(c) = c(1)\cdots c(n)(c'(n+1) - c(n+1))u^{n+1} + b'',$$

où b'' est une série d'ordre au moins égal à $n+2$. En posant $\mathrm{Stiel}(c') = 1 + \sum_{n\geq 1} a'(n)u^n$, on en déduit :

$$\begin{aligned} a'(n+1) - a(n+1) &= a'^{(n+1)}(n+1) - a^{(n+1)}(n+1) \\ &= c(1)\cdots c(n)(c'(n+1) - c(n+1)), \end{aligned}$$

qui est non nul. D'où $\mathrm{Stiel}(c') \neq \mathrm{Stiel}(c)$. $\square$

Définition. — La série $\mathrm{Stiel}(c)$ est appelée *fraction continue de Stieltjes associée à la série c*. Les fractions rationnelles $\mathrm{Stiel}_n(c)$ $(n \geq 1)$ sont appelées les *réduites* ou les *convergents* de la fraction continue.

Traditionnellement, on représente cette fraction continue comme une fraction *infinie* sous la forme :

$$\mathrm{Stiel}(c) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c(1)u}{1 - \cfrac{c(2)u}{1 - \cfrac{c(3)u}{\ddots\, 1 - \cfrac{c(n-1)u}{1 - \cfrac{c(n)u}{\ddots}}}}}}. \tag{17.4}$$

18. L'algorithme de Stieltjes

Pour déterminer la série $\mathrm{Stiel}(c)$, on peut naturellement calculer les polynômes $p_n(u)$ et $q_n(u)$ par la récurrence (17.2). Le coefficient de u^n dans le développement de la fraction rationnelle $p_n(u)/q_n(u)$ fournit alors le coefficient de u^n dans la série $\mathrm{Stiel}(c)$. Stieltjes a proposé un algorithme plus rapide qui est le suivant.

Soit c une série de terme constant égal à 1 et dont tous les coefficients sont non nuls. On appelle *tableau de Stieltjes associé* à c la suite-double $(h(n,k))$ définie par la récurrence

$$h(0,0) = 1;$$

$$h(n,k) = \begin{cases} h(n-1,k) + c(n-k+1)\,h(n,k-1), & \text{si } 0 \leq k \leq n\,; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \tag{18.1}$$

Proposition 18.1. — *Si* $\mathrm{Stiel}(c) = a = 1 + \sum_{n\geq 1} a(n)u^n$*, alors les coefficients* $a(n)$ *se lisent sur la diagonale du tableau de Stieltjes associé. En d'autres termes, pour tout* $n \geq 1$*, on a :*

$$a(n) = h(n,n).$$

Démonstration. — Pour tout $n \geq 0$, notons $h(\star + n, \star)$ la série formelle dont les coefficients sont les éléments de la $n^{\text{ième}}$ diagonale du tableau de Stieltjes. Autrement dit,

$$h(\star + n, \star) := 1 + \sum_{k\geq 1} h(k+n,k)\, u^k.$$

Il s'agit de prouver l'identité : $h(\star + 0, \star) = a$. Or (18.1) se récrit : $h(k+n,k) = h(k+n-1,k) + c(n+1)\, h(k+n,k-1)$. Pour $n \geq 1$, on en tire :

$$\begin{aligned} h(\star+n,\star) &= 1 + \sum_{k\geq 1} h(k+n,k)\, u^k \\ &= 1 + \sum_{k\geq 1} h(k+n-1,k)\, u^k + c(n+1) \sum_{k\geq 1} h(k+n,k-1)\, u^k \\ &= h(\star+n-1,\star) + c(n+1)\, u\, h(\star+n+1,\star), \end{aligned}$$

une identité qu'on peut récrire :

$$h(\star+n,\star)\Bigl(1 - c(n+1)\, u\, \frac{h(\star+n+1,\star)}{h(\star+n,\star)}\Bigr) = h(\star+n-1,\star),$$

ou encore

$$\frac{h(\star+n,\star)}{h(\star+n-1,\star)} = \frac{1}{1 - c(n+1)u\dfrac{h(\star+n+1,\star)}{h(\star+n,\star)}}. \tag{18.2}$$

Pour $n = 0$, on a simplement $h(\star+0,\star) = 1 + c(1)\, u\, h(\star+1,\star)$, d'où

$$h(\star+0,\star) = \frac{1}{1 - c(1)u\dfrac{h(\star+1,\star)}{h(\star+0,\star)}}. \tag{18.3}$$

On peut alors itérer l'identité (18.3) en utilisant (18.2). Pour $n \geq 1$, on trouve :

$$h(\star+0,\star) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c(1)u}{1 - \cfrac{c(2)u}{1 - \cfrac{c(3)u}{\ddots\, 1 - \cfrac{c(n)u}{1 - c(n+1)u\dfrac{h(\star+n+1,\star)}{h(\star+n,\star)}}}}}}.$$

On voit que $h(\star+0,\star)$ se déduit de $\mathrm{Stiel}_{n+1}(c)=p_{n+1}(u)/q_{n+1}(u)$ en substituant à $c(n+1)$ l'expression $c(n+1)h(\star+n+1,\star)/h(\star+n,\star)$, que nous noterons $c'(n+1)$. Posons

$$p'_{n+1}(u):=p_{n+1}(c(1),\ldots,c(n),c'(n+1);u);$$
$$q'_{n+1}(u):=q_{n+1}(c(1),\ldots,c(n),c'(n+1);u);$$

de sorte que

$$h(\star+0,\star)=\frac{p'_{n+1}(u)}{q'_{n+1}(u)}.$$

L'identité (17.3) se récrit

$$\frac{p'_{n+1}(u)}{q'_{n+1}(u)}-\frac{p_n(u)}{q_n(u)}=\frac{c(1)\ldots c(n)c'(n+1)u^{n+1}}{q'_{n+1}(u)q_n(u)},$$

ce qui montre que $h(\star+0,\star)-\mathrm{Stiel}_n(c)$ est d'ordre égal à $n+1$. D'où $h(\star+0,\star)-\lim_n \mathrm{Stiel}_n(c)=0$, soit $h(\star+0,\star)=\mathrm{Stiel}(c)=a$. □

Le tableau des premières valeurs des $h(n,k)$ est reproduit dans la Table 27.

k=	0	1	2	3
n=0	1			
1	1	$c(1)$		
2	1	$c(1)+c(2)$	$c(1)^2+c(1)c(2)$	
3	1	$c(1)+c(2)$ $+c(3)$	$c(1)^2+2c(1)c(2)$ $+c(2)^2+c(2)c(3)$	$c(1)^3+2c(1)^2c(2)$ $+c(1)c(2)^2+c(1)c(2)c(3)$

Tableau de Stieltjes des $h(n,k)$

Table 27

19. Fractions continues formelles de Jacobi

Pour définir une telle fraction continue, nous partons d'un couple de séries formelles (p,q), toutes deux de terme constant égal à 1. De plus, *tous* les coefficients de q sont non nuls, mais non nécessairement ceux de p. Comme pour les fractions continues de Stieltjes, on introduit, pour chaque $n\ge 1$, une fraction rationnelle

$$\mathrm{Jac}_n(p,q):=\cfrac{1}{1-p(1)u-\cfrac{q(1)u^2}{\ddots\, 1-p(n-1)u-\cfrac{q(n-1)u^2}{1-p(n)u-q(n)u^2}}}.$$

Cette fraction rationnelle se développe en une série formelle en u. En reprenant la démonstration du Théorème 17.1, on établit que la suite des séries $\mathrm{Jac}_n(p,q)$ ($n \geq 1$) est convergente. On pose $\mathrm{Jac}(p,q) := \lim_n \mathrm{Jac}_n(p,q)$. On peut aussi démontrer que l'application $(p,q) \mapsto \mathrm{Jac}(p,q)$ est injective. La série $\mathrm{Jac}(p,q)$ est appelée *fraction continue de Jacobi associée au couple* (p,q). On la note ainsi :

$$\mathrm{Jac}(p,q) = \cfrac{1}{1 - p(1)u - \cfrac{q(1)u^2}{1 - p(2)u - \cfrac{q(2)u^2}{\ddots}}}.$$

Il y a un analogue de la Proposition 18.1 pour les fractions continues de Jacobi, qui s'appuie sur le calcul d'une récurrence d'une suite de nombres $H(i,n)$ qu'on définit comme suit : on appelle *tableau de Jacobi associé au couple* (p,q) la suite des nombres $(H(i,n))$ définie par la récurrence :

$$H(0,0) = 1;$$
$$(19.1) \qquad H(i,n) = \begin{cases} H(i-1,n-1) + p(i+1)H(i,n-1) \\ \qquad\qquad +q(i+1)H(i+1,n-1), \\ \qquad\qquad \text{si } 0 \leq i \leq n \text{ et } (i,0) \neq (0,0)\,; \\ 0, \qquad\qquad \text{autrement.} \end{cases}$$

Proposition 19.1. — *La fraction continue de Jacobi* $\mathrm{Jac}(p,q) = \lim_n \mathrm{Jac}_n(p,q)$, *associée au couple* (p,q), *a pour développement en série :*

$$(19.2) \qquad \mathrm{Jac}(p,q) = 1 + \sum_{n\geq 1} H(0,n)\, u^n.$$

Démonstration. — Nous nous contentons d'une démonstration rapide, la démonstration complète étant très proche de celle de la Proposition 18.1. Pour chaque $i \geq 0$, posons :

$$H(i,\star) := \sum_{n\geq i} H(i,n)\, u^n.$$

La récurrence (19.1) se récrit à l'aide des séries $H(i,\star)$ comme

$$H(0,\star) = 1 + p(1)u\, H(0,\star) + q(1)u\, H(1,\star)$$

et pour $i \geq 1$ comme

$$H(i,\star) = u\, H(i-1,\star) + p(i+1)u\, H(i,\star) + q(i+1)u\, H(i+1,\star),$$

ou encore :

$$H(0,\star) = \cfrac{1}{1 - p(1)u - q(1)u\dfrac{H(1,\star)}{H(0,\star)}};$$

$$\frac{H(i,\star)}{H(i-1,\star)} = \cfrac{u}{1 - p(i+1)u - q(i+1)u\dfrac{H(i+1,\star)}{H(i,\star)}}.$$

Par itération de la première identité, on obtient alors :

$$H(0,\star) = \cfrac{1}{1 - p(1)u - \cfrac{q(1)u^2}{1 - p(2)u - \cfrac{q(2)u^2}{\ddots}}} = \mathrm{Jac}(p,q). \qquad \square$$

La table des premières valeurs des coefficients $H(i,n)$ est donnée dans la Table 28.

$n =$	0	1	2	3
$i = 0$	1	$p(1)$	$p(1)^2 + q(1)$	$p(1)^3 + 2p(1)q(1) + p(2)q(1)$
1		1	$p(1) + p(2)$	$p(1)^2 + p(1)p(2) + p(2)^2 + q(1) + q(2)$
2			1	$p(1) + p(2) + p(3)$
3				1

Tableau des $H(i,n)$

Table 28

La récurrence (19.1) s'incarne de façon très naturelle dans une algèbre de chemins, dits *de Motzkin*, dont la définition est la suivante.

Définition. — Étant donnés trois entiers positifs n, i et j tels que $n \geq |i-j|$, on appelle *chemin de Motzkin allant de la hauteur i à la hauteur j en n pas* une application γ de $\{0,1,2,\ldots,n\}$ dans $\mathbb{N}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $\gamma(0) = i$, $\gamma(n) = j$, ce qui veut dire que les extrémités sont de hauteurs i et j ; de plus, comme $\gamma \geq 0$, le chemin reste dans le demi-plan supérieur ;

(ii) pour chaque $k = 1,2,\ldots,n$, on a $|\gamma(k) - \gamma(k-1)| \leq 1$, ce qui signifie que les pas sont, ou bien des *montées* d'amplitude $+1$, ou bien des *paliers*, ou bien encore des *descentes* d'amplitude -1.

Chaque chemin de Motzkin γ est affecté d'un *poids* $w(\gamma)$ défini comme le *produit* des poids des différents pas qui le constituent. Un palier situé à la hauteur i est affecté du poids $p(i+1)$; une descente de la hauteur $i+1$ vers la hauteur i est affectée du poids $q(i+1)$; enfin, chaque montée est affectée du poids 1. Le poids $w(\gamma)$ est ainsi un *monôme* en les variables $p(i)$, $q(i)$ (*cf.* Fig. 29).

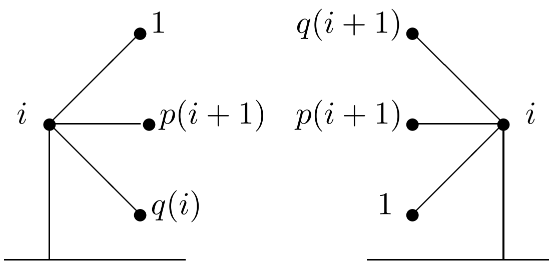


Fig. 29

Exemples. — L'application $\gamma = 0012112122$ est un chemin de Motzkin allant de 0 à 2 en 9 pas, de poids $w(\gamma) = p(1)q(2)p(2)q(2)p(3) = p(1)p(2)p(3)q(2)^2$.

De même, $\gamma = 3433232110$ est un chemin de Motzkin allant de 3 à 0 en 9 pas, de poids $w(\gamma) = p(2)p(4)q(1)q(2)q(3)^2q(4)$ (*cf.* Fig. 30).

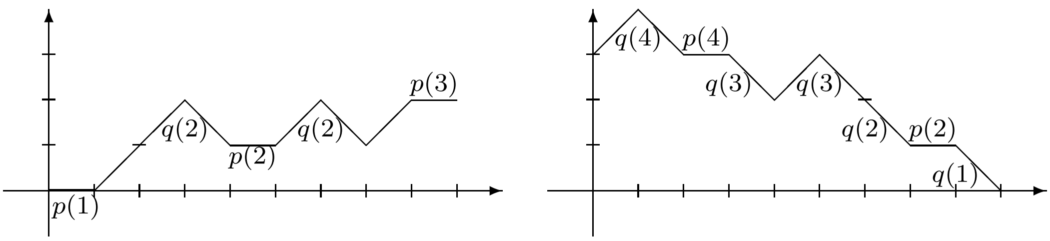


Fig. 30

Cette définition des chemins de Motzkin étant donnée, il devient très facile d'interpréter les coefficients $H(i,n)$. Notons $\Gamma_{i\to j}(n)$ l'ensemble des chemins de Motzkin allant de la hauteur i à la hauteur j en n pas.

PROPOSITION 19.2. — *On a les identités :*

$$H(i,n) = \sum_{\gamma} w(\gamma), \qquad \bigl(\gamma \textit{ parcourant } \Gamma_{0\to i}(n)\bigr)\,;$$

$$q(1)q(2)\cdots q(i)\,H(i,n) = \sum_{\gamma} w(\gamma), \qquad \bigl(\gamma \textit{ parcourant } \Gamma_{i\to 0}(n)\bigr).$$

Démonstration. — La récurrence (19.1), à savoir

$$H(i,n) = H(i-1,n-1) + p(i+1)H(i,n-1) + q(i+1)H(i+1,n-1),$$

ne signifie rien d'autre que les chemins de $\Gamma_{0\to i}(n)$ aboutissent en (n,i) par une montée issue de la hauteur $i-1$, ou par un palier de hauteur i, de poids $p(i+1)$, ou par une descente issue de la hauteur $i+1$, de poids $q(i+1)$.

Posons maintenant $K(i,n) = q(1)q(2)\cdots q(i)\,H(i,n)$. Alors

$$\begin{aligned}K(i,n) = q(1)q(2)\cdots q(i)\,[H(i-1,n-1) &+ p(i+1)H(i,n-1)\\ &+ q(i+1)H(i+1,n-1)],\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}K(i,n) &= q(i)(q(1)q(2)\cdots q(i-1)\,H(i-1,n-1))\\ &\qquad + p(i+1)(q(1)q(2)\cdots q(i)\,H(i,n-1))\\ &\qquad + q(1)q(2)\cdots q(i+1)\,H(i+1,n-1)\\ &= q(i)K(i-1,n-1) + p(i+1)K(i,n-1) + K(i+1,n-1).\end{aligned}$$

Cette récurrence signifie que les chemins de $\Gamma_{i\to 0}(n)$, qui partent de $(0,i)$, ont un *premier* pas qui est soit une descente aboutissant à la hauteur $i-1$, de poids $q(i)$, soit un palier de hauteur i, de poids $p(i+1)$, soit encore une montée aboutissant à la hauteur $i+1$. $\square$

Comme $H(0,n) = \sum_\gamma w(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma_{0\to 0}(n))$, les Propositions 19.1 et 19.2 entraînent le théorème suivant, qui est le résultat-clé dans les travaux d'analyse combinatoire des fractions continues.

Théorème 19.3. — *La fraction continue* $\mathrm{Jac}(p,q)$ *est la fonction génératrice des chemins de Motzkin partant de l'origine et retournant sur l'axe horizontal, par le poids* w. *En d'autres termes, on a l'identité :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}(p,q) &= \cfrac{1}{1-p(1)u-\cfrac{q(1)u^2}{1-p(2)u-\cfrac{q(2)u^2}{\ddots}}} = 1+\sum_{n\ge 1}u^n\sum_{\gamma\in\Gamma_{0\to 0}(n)}w(\gamma)\\ &= 1+p(1)u+(p(1)^2+q(1))u^2+(p(1)^3+2p(1)q(1)+p(2)q(1))u^3\\ &\qquad +(p(1)^4+3p(1)^2q(1)+2p(1)p(2)q(1)\\ &\qquad\qquad +p(2)^2q(1)+q(1)^2+q(1)q(2))u^4+\cdots\end{aligned}$$

Remarque. — Lorsque la série p vaut 1, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$ on a $p(n) = 0$, la fraction continue $\mathrm{Jac}(p,q)$ de Jacobi se réduit à une fraction continue de Stieltjes en la variable u^2. Dans le membre de droite, les chemins γ ayant un poids non nul sont les chemins n'ayant pas de paliers. On les appelle habituellement les *chemins de Dyck*. La fraction continue $\mathrm{Stiel}(q) = \mathrm{Jac}(1,q)$ est alors la fonction génératrice des chemins de Dyck.

20. Partitions et permutations

L'interprétation donnée à la fraction continue $\mathrm{Jac}(p,q)$ dans le Théorème 19.3 en termes de chemins de Motzkin n'est qu'une traduction, au fond très littérale, de la récurrence (19.1) des nombres $H(i,n)$. Le théorème ne prendra toute sa force que si l'on peut en déduire des propriétés géométriques intéressantes sur de vrais objets combinatoires, que sont par exemple les partitions d'ensembles finis ou les permutations. C'est ce que nous proposons de faire dans ce paragraphe.

20.1. *Partitions.* — Soit γ un chemin de Motzkin appartenant à $\Gamma_{0\to 0}(n)$. Son poids, $w(\gamma)$, défini dans le paragraphe précédent, est un monôme en les variables $p(i)$, $q(i)$. On a vu que seuls les paliers et les descentes avaient un poids différent de 1. On appelle *chemin de Motzkin pondéré* tout couple (γ, v) où $\gamma \in \Gamma_{0\to 0}(n)$ et où $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une suite d'entiers, telle que pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, la propriété suivante soit satisfaite :

$v_k = 1,$	si le $k^{\text{ième}}$ pas est une montée ;
$1 \leq v_k \leq i+1,$	si le $k^{\text{ième}}$ pas est un palier sis à la hauteur i ;
$1 \leq v_k \leq i+1,$	si le $k^{\text{ième}}$ pas est une descente de la hauteur $(i+1)$.

Dans la Fig. 31, on a représenté un chemin de Motzkin pondéré de longueur $n = 9$. Les valeurs des v_k sont indiquées sur chaque pas : $(1,1,1,2,1,1,1,2,1)$. Notons que pour le chemin de Motzkin *non pondéré* représenté dans la figure, les valeurs *maxima possibles* pour les v_k sont : $(1,1,1,2,2,1,2,2,1)$.

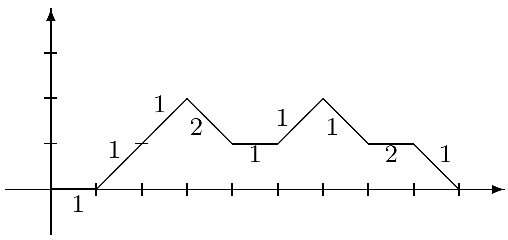


Fig. 31

Notons Π_n l'ensemble des partitions de l'ensemble $[\,n\,] = \{1, 2, \ldots, n\}$ en blocs non vides. Nous nous proposons de construire une *bijection* $\pi \mapsto (\gamma, v)$ de Π_n sur l'ensemble, notée Mop_n, de tous les chemins de Motzkin pondérés de longueur n. A priori, il n'est pas évident que ces deux ensembles aient même cardinal.

Partons d'une partition $\pi \in \Pi_n$ et écrivons chacun de ses blocs comme des suites croissantes de leurs éléments. Par exemple, la partition

$$\pi = \{\{1\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4\}, \{6, 9\}, \{8\}\}$$

est récrite :

$$\pi = \{(1), (2, 5, 7), (3, 4), (6, 9), (8)\}.$$

Chaque bloc de cardinal au moins égal à 2 possède ainsi un élément *initial* et un élément *final* distincts. Les autres éléments, qui sont *à l'intérieur* de chaque suite ou qui forment des blocs-*singletons*, sont dits *intermédiaires.* Dans l'exemple courant, 2, 3, 6 sont des éléments initiaux, 4, 7, 9 des éléments finaux et 1, 5, 8 des éléments intermédiaires. Naturellement, il y a autant d'éléments initiaux que d'éléments finaux.

Le chemin de Motzkin associé à π est simple à définir : partant de l'origine des axes $(0, 0)$, on dessine un pas montant ou un palier, suivant que 1 est, dans π, un élément initial ou un élément intermédiaire (en l'occurrence un singleton). Supposons que l'on ait construit un chemin polygonal dans le plan, partant de l'origine, et s'arrêtant à l'abscisse k et à l'ordonnée $\gamma(k)$ $(1 \le k \le n - 1)$. Partant alors du point $(k, \gamma(k))$, on dessine un pas montant, descendant ou un palier, suivant que $(k + 1)$ est un élément initial, final ou intermédiaire. On continue cette construction jusqu'à l'indice n. On se persuade, sans peine, que le chemin polygonal γ ainsi obtenu est un chemin de Motzkin de $\Gamma_{0\to 0}(n)$.

Par exemple, à la partition de l'exemple courant correspond le chemin de Motzkin (non pondéré) tel qu'il est dessiné dans la Fig. 31.

Comment obtient-on la pondération v de γ ? La partition $\pi \in \Pi_n$ étant donnée, pour chaque entier k $(1 \le k \le n)$, notons $\mathrm{Init}_k(\pi)$ (resp. $\mathrm{Fin}_k(\pi)$) le nombre d'éléments initiaux (resp. finaux) dans π inférieurs à k. On a toujours $\mathrm{Init}_k(\pi) \ge \mathrm{Fin}_k(\pi)$. Si k est un élément final ou intermédiaire, la différence $v_k^{\max} := \mathrm{Init}_k(\pi) - \mathrm{Fin}_k(\pi)$ est égale au nombre de blocs finissant par des éléments supérieurs ou égaux à k et débutant par des éléments inférieurs à k. Numérotons ces blocs $1, 2, \ldots, v_k^{\max}$ suivant la valeur *croissante* de leurs éléments initiaux.

Si k est un élément final ou intermédiaire de π, on pose $v_k := i$, si k se trouve dans le bloc numéroté i. De plus, on pose $v_k := v_k^{\max} + 1$, si k forme un bloc-singleton.

On peut vérifier que la pondération indiquée sur le chemin de Motzkin de la Fig. 31 est justement la pondération attachée à la partition π de l'exemple courant.

Si γ est le chemin de Motzkin associé à π, il est immédiat de voir que l'on a :

$$\gamma(k-1) = \begin{cases} v_k^{\max}, & \text{si } k \text{ est un élément final;} \\ v_k^{\max}+1, & \text{si } k \text{ est un élément intermédiaire.} \end{cases} \tag{20.1}$$

Par conséquent, $v_k^{\max}$ (resp. $v_k^{\max}+1$) est la pondération *maxima* qu'on peut donner au pas $(k-1,\gamma(k-1)) \to (k,\gamma(k))$, lorsque celui-ci est une descente (resp. un palier).

Réciproquement, si on part d'un chemin de Motzkin pondéré, on peut obtenir la partition unique qui lui correspond en plaçant un à un les entiers dans les blocs qui conviennent. Les pas montants donnent tous les éléments initiaux des blocs. Si le $k^{\text{ième}}$ pas est un palier et si $v_k = v_k^{\max}+1$, alors k est un bloc-singleton. Si k est un pas descendant ou un palier et si $1 \le v_k \le v_k^{\max}$, on numérote les blocs non clos $1,2,\ldots,v_k^{\max}$. On place alors k dans le bloc numéroté v_k.

La fonction génératrice des chemins de Motzkin pondérés se déduit du développement de $\mathrm{Jac}(p,q)$ donné dans le Théorème 19.3 en remplaçant chaque $p(i)$ et chaque $q(i)$ par l'entier i. En utilisant la bijection qui vient d'être décrite, on en déduit le résultat suivant.

THÉORÈME 20.1. — *Les substitutions $p(i) \leftarrow i$, $q(i) \leftarrow i$ $(i = 1,2,\ldots)$ dans la fraction continue* $\mathrm{Jac}(p,q)$ *du Théorème* 19.3 *fournissent la fonction génératrice de la suite des nombres de partitions des ensembles $[\,n\,]$, c'est-à-dire des nombres de Bell B'_n :*

$$\cfrac{1}{1-u-\cfrac{u^2}{1-2u-\cfrac{2u^2}{\ddots\, 1-nu-\cfrac{nu^2}{\ddots}}}} = 1+u+2u^2+5u^3+15u^4 + \cdots + B'_n u^n + \cdots$$

20.2. *Permutations.* — Il existe plusieurs bijections envoyant le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ sur une classe de chemins de Motzkin, de longueur n. Chacune a été inventée pour le traitement d'un problème spécifique et a donc des propriétés que l'on ne peut pas nécessairement appliquer dans un autre contexte. Nous avons fait le choix d'en décrire une seule et de donner dans la bibliographie référence à plusieurs autres.

Pour ne pas confondre avec les chemins considérés précédemment, nous dirons que les chemins que nous introduisons ci-après sont des *chemins de Motzkin colorés*. Un tel chemin est un couple (γ, v), où γ est naturellement un chemin de Motzkin ordinaire de $\Gamma_{0\to 0}(n)$. Pour des raisons de commodité, nous supposons, cependant, que les paliers sont de deux couleurs, bleue et rouge et qu'il n'y a pas de palier rouge à la hauteur 0. De plus, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une valuation satisfaisant les propriétés suivantes :

$0 \le v_k \le i$	si le $k^{\text{ième}}$ pas est une montée issue de la hauteur i ;
$0 \le v_k \le i$,	si le $k^{\text{ième}}$ pas est un palier *bleu* sis à la hauteur i ;
$0 \le v_k \le i-1$,	si le $k^{\text{ième}}$ pas est un palier *rouge* sis à la hauteur $i \ge 1$;
$0 \le v_k \le i-1$,	si le $k^{\text{ième}}$ pas est une descente aboutissant à la hauteur $(i-1)$.

On observe qu'ici les montées ont des valuations non identiques à 1, contrairement au cas précédent.

Il y a une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et l'ensemble des chemins de Motzkin colorés de longueur n.

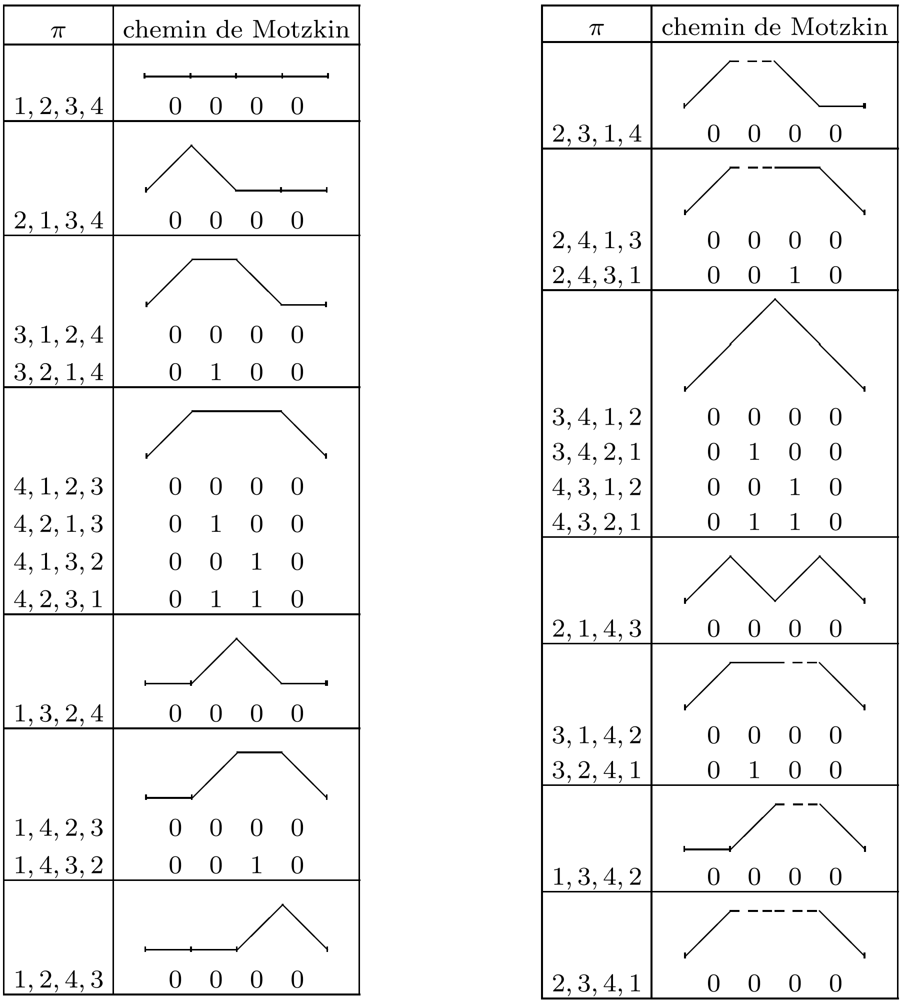
Dans la Fig. 32, on a représenté une correspondance entre les 24 permutations appartenant à $\mathfrak{S}_4$ et les chemins de Motzkin colorés de longueur 4. C'est, en fait, la correspondance que l'on obtient en appliquant la bijection que nous allons maintenant décrire.

Pour construire une telle bijection, nous partons d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$. On note $\operatorname{Exc}\sigma = \{i_1 < \cdots < i_l\}$ l'ensemble des positions des excédances de σ, c'est-à-dire l'ensemble des entiers i tels que $\sigma(i) > i$. L'ensemble complémentaire $[\,n\,] \setminus \operatorname{Exc}\sigma$ est noté $\operatorname{Nexc}\sigma = \{j_1 < \cdots < j_{n-l}\}$. La permutation σ, considérée comme une bijection de $[\,n\,]$ sur lui-même, envoie $\operatorname{Exc}\sigma$ (resp. $\operatorname{Nexc}\sigma$) sur un sous-ensemble de $[\,n\,]$ que nous notons $\operatorname{Exc}'\sigma$ (resp. $\operatorname{Nexc}'\sigma$).

Formons ensuite les mots $\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_l)$ et $\sigma(j_1)\ldots\sigma(j_{n-l})$. Pour le premier de ces mots, déterminons sa *table d'inversions*, qui est définie comme le mot $t(i_1)\ldots t(i_l)$, où, pour chaque $r = 1, \ldots, l$, l'entier $t(i_r)$ est égal au nombre d'entiers inférieurs à $\sigma(i_r)$ dans le facteur *gauche* $\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_{r-1})$.

Pour le second de ces mots, nous déterminons sa *table d'inversions de droite à gauche*, définie comme le mot $t(j_1)\ldots t(j_{n-l})$, où pour chaque $r = 1, \ldots, n-l$, l'entier $t(j_r)$ est égal au nombre d'entiers supérieurs à $\sigma(j_r)$ dans le facteur *droit* $\sigma(j_{r+1})\ldots\sigma(j_{n-l})$.

Le chemin de Motzkin γ est construit comme suit :



π	chemin de Motzkin
$1,2,3,4$	0 0 0 0
$2,1,3,4$	0 0 0 0
$3,1,2,4$	0 0 0 0
$3,2,1,4$	0 1 0 0
$4,1,2,3$	0 0 0 0
$4,2,1,3$	0 1 0 0
$4,1,3,2$	0 0 1 0
$4,2,3,1$	0 1 1 0
$1,3,2,4$	0 0 0 0
$1,4,2,3$	0 0 0 0
$1,4,3,2$	0 0 1 0
$1,2,4,3$	0 0 0 0

π	chemin de Motzkin
$2,3,1,4$	0 0 0 0
$2,4,1,3$	0 0 0 0
$2,4,3,1$	0 0 1 0
$3,4,1,2$	0 0 0 0
$3,4,2,1$	0 1 0 0
$4,3,1,2$	0 0 1 0
$4,3,2,1$	0 1 1 0
$2,1,4,3$	0 0 0 0
$3,1,4,2$	0 0 0 0
$3,2,4,1$	0 1 0 0
$1,3,4,2$	0 0 0 0
$2,3,4,1$	0 0 0 0

Fig. 32

si $k\in \operatorname{Exc}\sigma\cap\operatorname{Nexc}'\sigma$, alors le $k^{\text{ième}}$ pas est montant ;
si $k\in \operatorname{Exc}'\sigma\cap\operatorname{Nexc}\sigma$, alors le $k^{\text{ième}}$ pas est descendant ;
si $k\in \operatorname{Nexc}\sigma\cap\operatorname{Nexc}'\sigma$, alors le $k^{\text{ième}}$ pas est un palier bleu ;
si $k\in \operatorname{Exc}\sigma\cap\operatorname{Exc}'\sigma$, alors le $k^{\text{ième}}$ pas est un palier rouge.

La valuation v est simplement définie par :
si $k=\sigma(i_r)$ (resp. $k=\sigma(j_s)$), alors $v_k:=t(i_r)$ (resp. $v_k:=t(j_s)$).

Exemple. — Considérons la permutation

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&1&5&4&9&2&6&3&8\end{pmatrix}.$$

L'ensemble de ses positions d'excédances est $\operatorname{Exc}\sigma=\{1,3,5\}$ et de ses non-excédances $\operatorname{Nexc}\sigma=\{2,4,6,7,8,9\}$. Les restrictions de σ à $\operatorname{Exc}\sigma$ et à $\operatorname{Nexc}\sigma$ et les tables d'inversions des images de ces restrictions apparaissent dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_l \\ \sigma(i_1) & \dots & \sigma(i_l) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} \\
t(i_1)\ \dots\ t(i_l) & = & 0\ 1\ 0 \\
\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_l \\ \sigma(j_1) & \dots & \sigma(j_{n-l}) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\
t(j_1)\ \dots\ t(j_{n-l}) & = & 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0
\end{array}$$

Par ailleurs, $\operatorname{Exc}\sigma \cap \operatorname{Nexc}'\sigma = \{1,3\}$ (ce sont les pas montants) ; $\operatorname{Exc}'\sigma \cap \operatorname{Nexc}\sigma = \{7,9\}$ (les pas descendants) ; $\operatorname{Nexc}\sigma \cap \operatorname{Nexc}'\sigma = \{2,4,6,8\}$ (les paliers bleus, en trait continu) ; $\operatorname{Exc}\sigma \cap \operatorname{Exc}'\sigma = \{5\}$ (le seul palier rouge, en pointillé). Le chemin de Motzkin qui correspond à σ est représenté dans la Fig. 33.

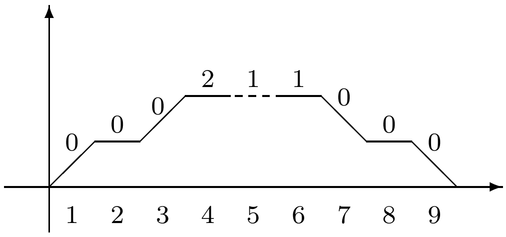


Fig. 33

Revenons au cas général. Supposons que l'on ait construit les k premiers pas du chemin et que l'on ait atteint le point de coordonnées (k,i) $(0 \le k \le n-1)$. Si $i=0$, alors les quatre sous-ensembles $\operatorname{Exc}\sigma$, $\operatorname{Exc}'\sigma$, $\operatorname{Nexc}\sigma$ et $\operatorname{Nexc}'\sigma$ ont le *même nombre* d'éléments inférieurs ou égaux à k. De là, $\sigma(h) = k+1$ pour un certain $h \ge k+1$. Si donc $\sigma(k+1) = k+1$, on a $(k+1) \in \operatorname{Nexc}\sigma \cap \operatorname{Nexc}'\sigma$ et le $k^{\text{ième}}$ pas est un palier bleu. Si $\sigma(h) = k+1$ pour $h \ge k+2$, on a $(k+1) \in \operatorname{Exc}\sigma \cap \operatorname{Nexc}'\sigma$ et le $k^{\text{ième}}$ pas est montant. Par conséquent, la ligne polygonale que l'on construit est un chemin de Motzkin et il n'y a aucun palier rouge à la hauteur 0.

Maintenant, si le $k^{\text{ième}}$ pas est descendant ou est un palier rouge, on a $i_r < \sigma(i_r) = k$ pour un certain r $(1 \le r \le l)$. On peut redéfinir v_k comme étant

$$v_k := |\{q : q < i_r < \sigma(i_r) < \sigma(q)\}|. \tag{20.2}$$

Considérons l'ensemble des entiers $q < k = \sigma(i_r)$ tels que $q < \sigma(q)$. Ils correspondent aux pas montants ou aux paliers rouges situés à gauche du pas numéroté k. Notons leurs nombres : $m(k)+r(k)$. Ils se répartissent en deux classes :

(i) ceux qui satisfont l'inégalité : $\sigma(q) \le \sigma(i_r)$;

(ii) ceux qui satisfont l'inégalité : $\sigma(i_r) < \sigma(q)$.

Soit $r(k)+d(k)$ le nombre de pas descendants ou de paliers rouges situés à gauche du pas numéroté k. Alors le nombre d'entiers q satisfaisant (ii) est égal à : $r(k)+d(k)+1$. Soit $v_k^{\max}$ le nombre d'entiers dans la classe (ii). On a alors $v_k \le v_k^{\max}$ et $m(k)+r(k) = r(k)+d(k)+1+v_k^{\max}$. D'où $v_k^{\max} = m(k)-d(k)-1$. Or $m(k)-d(k) = i$ est la hauteur de l'origine du $k^{\text{ième}}$ pas. On a donc bien

$$0 \le v_k \le v_k^{\max} = i-1. \tag{20.3}$$

On montre, de la même façon, que si le $k^{\text{ième}}$ pas est montant aboutissant à la hauteur i ou est un palier bleu sis à la hauteur i, on a

$$0 \le v_k \le i. \tag{20.4}$$

Réciproquement, si l'on part d'un chemin de Motzkin coloré (γ, v), de longueur n, où les valuations v_k satisfont les inégalités (20.3) (resp. (20.4)), lorsque le $k^{\text{ième}}$ pas est descendant ou un palier rouge (resp. montant ou un palier bleu), on reconstruit immédiatement les quatre ensembles $\operatorname{Exc}\sigma$, $\operatorname{Exc}'\sigma$, $\operatorname{Nexc}\sigma$, $\operatorname{Nexc}'\sigma$. D'autre part, chaque entier k est accompagné de sa valuation v_k. Si le $k \in \operatorname{Exc}'\sigma$, alors sa valuation v_k satisfait les inégalités : $0 \le v_k \le v_k^{\max} = m(k)-d(k)-1 \le m(k)+r(k)$. Or, ce dernier nombre est précisément le nombre d'éléments $\sigma(h)$ tels que $\sigma(h) \in \operatorname{Exc}'\sigma$ et $h < k$. Par conséquent, de l'ensemble $\operatorname{Exc}'\sigma$ et de la suite des v_k tels que $k \in \operatorname{Exc}'\sigma$, on construit, de façon unique, la restriction de σ à $\operatorname{Exc}\sigma$.

On procède de façon analogue pour $\operatorname{Nexc}\sigma$.

20.3. *Une application aux fractions continues.* — Dans un chemin de Motzkin coloré de longueur n, la valuation maxima d'un pas montant issu de la hauteur i et celle d'un pas descendant aboutissant à la hauteur i sont toutes deux égales à i. Comme ces deux classes de pas peuvent être mises en bijection, on peut aussi attribuer la valuation 1 à tout pas montant et une valuation comprise entre 1 et $(i+1)^2$ à tout pas descendant aboutissant à la hauteur i. Enfin, on peut attribuer la valuation $1, 2, \ldots, i+1$ à tout palier bleu sis à la hauteur i et la valuation $i+2, \ldots, 2i+1$ à tout palier rouge sis à cette même hauteur. En utilisant la bijection précédente, on obtient le théorème qui suit

Théorème 20.2. — *Les substitutions $p(i) \leftarrow 2i-1$, $q(i) \leftarrow i^2$ dans la fraction continue* $\operatorname{Jac}(p,q)$ *du Théorème* 19.3 *fournissent la fonction* *génératrice de la suite* $(n!)$

$$\cfrac{1}{1-u-\cfrac{u^2}{1-3u-\cfrac{4u^2}{\ddots\, 1-(2i-1)u-\cfrac{i^2u^2}{\ddots}}}} = 1+u+2u^2+6u^3+24u^4 + \cdots + n!\,u^n + \cdots$$

Notes

Comme dit en début de chapitre, l'étude qui est faite ici sur les nombres de Bernoulli contient essentiellement la démonstration du théorème de von Staudt-Clausen (voir [Ca61]) et le résultat sur le signe de ces nombres, tel qu'il est exposé dans Carlitz-Scoville [CaSco73], Mordell [Mo73] et Uspensky-Heaslet [UsHe39] (voir les exercices 1–4). Le traité de Nielsen [Ni23] passe en revue les propriétés classiques de ces nombres. Nous n'avons pas reproduit l'étude sur leur croissance (par exemple, pour $n \geq 8$, on a $B_{2n} > (2n+1)/3$, voir [Ni23], p. 247), ni les résultats sur les suites d'entiers A_{2n} dans la formule (4.1) de von Staudt-Clausen, donnés par Buckholtz-Knuth [BuKn76].

Le paragraphe 2 est entièrement consacré aux nombres de Stirling de seconde espèce. Toutes les identités de la Fig. 2 peuvent être établies analytiquement, par des manipulations simples (voir l'ouvrage de Comtet [Com70]). Nous avons préféré ne donner que des arguments de nature combinatoire. Les propriétés de congruence sur les nombres de Stirling sont classiques et reposent sur la p-divisibilité des coefficients binomiaux (voir [Lu91], p. 420).

Les nombres factoriels centraux (Tambs [Ta58], Lohne [Lo58], Carlitz et Riordan [CaRi63], Riordan [Ri68], p. 212–217) ont une définition très proche de celle des nombres de Stirling et interviennent dans un calcul ultérieur sur les nombres de Genocchi. Leur fonction génératrice exponentielle est particulièrement simple : $\exp(2v\,\mathrm{sh}(u/2))$ (voir (5.9)). On peut aussi leur donner une interprétation combinatoire intéressante (voir Proposition 5.1 et l'Exercice 6).

L'étude des nombres de Genocchi, $G_{2n} = 2(2^{2n}-1)B_{2n}$, a été remise à l'honneur dans les années soixante-dix grâce à une conjecture les concernant proposée par Gandhi [Ga70], une conjecture qui fut aussitôt démontrée par Riordan et Stein [RiSt72] et par Carlitz [Ca72]. La démonstration, donnée ici dans le paragraphe 7, reprend la méthode de Barsky [Ba81].

On doit à Dumont [Du72], [Du74], d'avoir su exploiter la génération des nombres de Genocchi, à l'aide des polynômes de Gandhi (voir § 8), pour en tirer les premières interprétations combinatoires en termes de surjections excédantes appelées ici *pistolets de Dumont* (voir § 9).

On doit également à Dumont [Du74] d'avoir réussi à transférer les propriétés combinatoires des nombres de Genocchi en termes de classes de permutations (voir Proposition 11.1). Pour obtenir le transfert des pistolets aux groupes de permutations, il a fallu utiliser toute une batterie de bijections entre fonctions excédantes et permutations, dont le schéma est reproduit dans la Fig. 12. Dans ce schéma, on retrouve à la fois des bijections se rapportant à la structure du groupe, comme la transformation fondamentale (§ 10.1), à des codages en termes d'arbres et à des opérations de nature purement géométrique, comme les rotations du groupe diédral.

L'étude de la matrice de Seidel des nombres de Genocchi est l'occasion d'introduire les nombres de Genocchi médiants, qui ont des propriétés combinatoires très proches de celles des nombres de Genocchi (voir les travaux de Randrianarivony [Ra97]).

L'étude combinatoire des nombres tangents et sécants remonte à Désiré André [An79], [An81]. Leur matrice de Seidel a une propriété caractéristique remarquable (voir § 14). On peut également donner une interprétation combinatoire à tous les coefficients de cette matrice (Entringer [En66]).

Les nombres tangents et sécants apparaissent aussi comme comptages d'orbites de groupes de transformation, comme décrit dans les paragraphes 15 et 16, comptages qui ont été mis en évidence dans les travaux de Strehl [St74], [FoSt74].

Les fractions continues formelles de Stieltjes et de Jacobi doivent être vues comme des opérations à l'intérieur de l'algèbre des séries formelles. On doit à Flajolet [Fl80] d'avoir su interpréter les calculs sur la transformation $(p,q) \mapsto \mathrm{Jac}(p,q)$, qui fait passer du couple de deux séries formelles (p,q) à une nouvelle série formelle $\mathrm{Jac}(p,q)$, en termes de chemins polygonaux dans le plan, dits chemins de Motzkin. Pour permettre une utilisation plus globale de ce formalisme, il faut encore savoir envoyer ces chemins de Motzkin sur le groupe des permutations. Il existe plusieurs méthodes pour faire ce transfert. Nous en donnons une dans le dernier paragraphe.

Plusieurs exercices font appel à des techniques combinatoires originales, comme dans les Exercices 6, 7, 10 et 14. Les Exercices 16, 17, 18 sont tirés de [DuFo76]. L'Exercice 20 est dû à Dumont. Les Exercices 22 et 23 sont tirés de [FoSt76]. On y trouve des tables de statistiques déjà obtenues par Kermack et McKendrick [KeMcK37], David et Barton [BaDa62].

La notion de *permutation d'André* apparaît dans [FoSch73]. Le résultat de l'Exercice 25 est dû à Roselle [Ro68], non la méthode de démonstration. L'Exercice 27 est dû à Garsia [Ga78]. Les contractions de Rogers, traitées dans l'Exercice 28 sont classiques. Les Exercices 31 et 32 nous ont été fournis par Dumont. On trouve dans l'Exercice 33 un traitement de la transformation de Françon-Viennot [FrVi79], [Vi81], [Vi83]. On reprend, dans l'Exercice 34, un exposé sur une autre telle transformation [FoZe90]. La composition de ces deux transformations a été explicitée par Clarke, Steingrímsson, Zeng [ClStZe97].

D'autres correspondances entre chemins de Motzkin et groupes de permutations ont été mises en évidence par Biane [Bi93], de Médicis et Viennot [MeVi94]. On trouve dans le mémoire de Randrianarivony [Ra95] un exposé sur toutes ces transformations. Les Exercices 36 et 37 sont tirés de [FoZe90]. L'Exercice 38 est un classique, qui trouve son inspiration dans [Fl80].

BIBLIOGRAPHIE

[An79] André (Désiré). — Développements de $\sec x$ et de $\operatorname{tang} x$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **88**, 1879, p. 965-967.

[An81] André (Désiré). — Sur les permutations alternées, *J. Math. Pures Appl.*, t. **7**, 1881, p. 167–184.

[Ba81] Barsky (Daniel). — Congruences pour les nombres de Genocchi de deuxième espèce, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique (Y. Amice, G. Christol, P. Robba), 8$^{\text{ième}}$ année, 1980/81, n$^{\text{o}}$ 34, 13 p. Secrétariat de math., Univ. Paris 7.

[BaDa62] Barton (D.E.) et David (F.N.). — *Combinatorial Chance*. — Hafner Publ. Co., 1962.

[Bi93] Biane (Philippe). — Permutations suivant le type d'excédance et le nombre d'inversions et interprétation combinatoire d'une fraction continue de Heine, *Europ. J. Combin.*, t. **14**, 1993, p. 277–284.

[BuKn67] Buckholtz (T.J.) et Knuth (D.E.). — Computation of tangent, Euler and Bernoulli numbers, *Math. Comp.*, t. **21**, 1967, p. 663–688.

[Ca61] Carlitz (Leo). — The Staudt-Clausen Theorem, *Math. Magazine*, t. **35**, 1961, p. 131–146.

[Ca72] Carlitz (Leo). — A conjecture concerning Genocchi numbers, *Koninkl. norske Vidensk. Selsk. Sk.*, t. **9**, 1972, p. 1–4.

[CaRi63] Carlitz (Leo) and Riordan (John). — The divided central differences of zero, *Canadian J. Math.*, t. **15**, 1963, p. 94–100.

[CaSco73] Carlitz (Leo) and Scoville (R.). — The sign of the Bernoulli and Euler numbers, *Amer. Math. Monthly*, t. **80**, 1973, p. 548–549.

[ClStZe97] Clarke (R. J.), Steingrímsson (Einar) et Zeng (Jiang). — New Euler-Mahonian Statistics on Permutations and Words, *Adv. Appl. Math.*, t. **18**, 1997, p. 237–270.

[Com70] Comtet (Louis). — *Analyse Combinatoire* (2 volumes). — Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP, "Le mathématicien," **4**, **5**).

[Du72] Dumont (Dominique). — Sur une conjecture de Gandhi concernant les nombres de Genocchi, *Discrete Math.*, t. **1**, 1972, p. 321–327.

[Du74] Dumont (Dominique). — Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math. J.*, t. **41**, 1974, p. 305–318.

[DuFo76] Dumont (Dominique) et Foata (Dominique). — Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull. Soc. Math. France*, t. **104**, 1976, p. 433–451.

[DuVi80] Dumont (Dominique) et Viennot (Gérard). — A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Combinatorial mathematics, optimal designs* [J. Srivastava, ed., Fort Collins. 1978], p. 77–87. Amsterdam, North-Holland, 1980 (*Annals of Discrete Math.* **6**).

[En66] Entringer (R.C.). — A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, *Nieuw. Arch. Wisk.*, t. **14**, 1966, p. 241–246.

[Fl80] Flajolet (Philippe). — Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.*, t. **32**, 1980, p. 126–161.

[FoSch73] Foata (Dominique) et Schützenberger (M.-P.). — Nombres d'Euler et permutations alternantes, University of Florida, prépublication, 1973, 71 p.

[FoSt74] Foata (Dominique) et Strehl (Volker). — Rearrangements of the symmetric group and enumerative properties of the tangent and secant numbers, *Math. Zeitschrift*, t. **137**, 1974, p. 257–264.

[FoSt76] Foata (Dominique) et Strehl (Volker). — Euler Numbers and Variations of Permutations, in *Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie* [1973. Roma], vol. 1, p. 119-131. Roma, Accademia dei Lincei, 1976 (Atti dei Convegni, 17).

[FoZe90] Foata (Dominique) et Zeilberger (Doron). — Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian, *Stud. Appl. Math.*, t. **83**, 1990, p. 31–59.

[FrVi79] Françon (Jean) et Viennot (Gérard). — Permutations selon les pics, creux, doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, *Discrete Math.*, t. **28**, 1979, p. 21–35.

[Ga70] Gandhi (J.M.). — A conjectured representation of Genocchi numbers, *Amer. Math. Monthly*, t. **77**, 1970, p. 505–506.

[Ga78] Garsia (Adriano). — Communication personnelle, 1978.

[KeMcK37] Kermack (W.O.) et McKendrick (A.G.). — Some distributions associated with a randomly arranged set of numbers, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, t. **67**, 1937, p. 332–376.

[Lo58] Lohne (J.). — Power sums of natural numbers, *Nord. Mat. Tidskrift*, t. **6**, 1958, p. 155–158.

[Lu91] Lucas (A.). — *Théorie des nombres* (vol. 1). — Paris, Gauthier-Villars, 1891.

[MeVi94] de Médicis (A.) et Viennot (X.G.). — Moments des q-polynômes de Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger, *Adv. Appl. Math.*, t. **15**, 1994, p. 262–304.

[Mo73] Mordell (L.J.). — The sign of the Bernoulli numbers, *Amer. Math. Monthly*, t. **80**, 1973, p. 547–548.

[Ni23] Nielsen (Niels). — *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli.* — Paris, Gauthier-Villars, 1923.

[Ra95] Randrianarivony (Arthur). — Correspondances entre les différents types de bijections entre le groupe symétrique et les chemins de Motzkin valués, *Sém. Lothar. Combinatoire*, t. **35**, 1995, p. B35h.

[Ra97] Randrianarivony (Arthur). — Fractions continues, q-nombres de Catalan et q-polynômes de Genocchi, *European. J. Combinatorics*, t. **18**, 1997, p. 75–92.

[Ri58] Riordan (John). — *An Introduction to Combinatorial Analysis.* — New York, J. Wiley, 1958.

[Ri68] Riordan (John). — *Combinatorial Identities.* — New-York, J. Wiley, 1968.

[RiSt72] Riordan (J.) and Stein (P.R.). — Proof of a conjecture on Genocchi numbers, *Discrete Math.*, t. **5**, 1972, p. 381–388.

[Ro68] Roselle (David). — Permutations by rises and successions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **19**, 1968, p. 8–16.

[Se77] Seidel (L.). — Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, *Sitzungsberichte math.-phys. Classe Bayer. Akad. Wiss. München*, 1877, p. 157–187.

[St74] Strehl (Volker). — Geometrische und arithmetische Eigenschafter der André-Polynome, Doct. Dissertation, Univ. Erlangen, 1974.

[Ta58] Tambs Lyche (R.). — Supplement to the preceding article, *Nord. Mat. Tidskrift*, t. **6**, 1958, p. 159–161.

[UsHe39] Uspensky (J.V.) et Heaslet (M.A.). — *Elementary Number Theory*. — McGraw-Hill, New York, 1939.

[Vi81] Viennot (Gérard). — Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi, Université de Bordeaux I, Séminaire de Théorie des Nombres, 1980-81, exposé no. 11, 1981, 94 p.

[Vi83] Viennot (Gérard). — Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, Université du Québec à Montréal, Notes de conf., 1983, 219 p.

COMPLÉMENTS ET EXERCICES

1. — Montrer que le développement de $u/(e^u-1)$ peut s'écrire comme indiqué dans la formule (1.1), autrement dit qu'il n'y a pas de terme impair de rang supérieur ou égal à 3.

2. — On a l'identité :

$$\frac{u}{e^u+1}=\frac{u}{e^u-1}-\frac{2u}{e^{2u}-1}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{u^r}{r!}(1-2^r)\beta_r\,;$$

d'où en multipliant par $u/(e^u-1)$:

$$\frac{u^2}{e^{2u}-1}=\frac{u}{2}\frac{2u}{e^{2u}-1}=\frac{u}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\beta_n 2^n=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{u^r}{r!}(1-2^r)\beta_r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{u^s}{s!}\beta_s.$$

Or pour $n\ge 1$, le nombre β_{2n+1} est nul, de sorte que la comparaison des coefficients dans les deux membres de la dernière équation fournit l'identité

$$0=\sum_{r,s}\frac{1}{r!}(1-2^r)\beta_r\frac{1}{s!}\beta_s,$$

où la somme est sur tous les couples (r,s) tels que $r+s=2n$, $r\ge 0$, $s\ge 0$. On peut prendre en fait $r\ge 2$ et $s\ge 0$, le terme sommatoire disparaissant pour $r=0,1$. Cette dernière identité peut encore se récrire :

$$0=\frac{1}{(2n)!}(1-2^{2n})\beta_{2n}+\sum_{r,s}\frac{1}{r!\,s!}(1-2^r)\beta_r\beta_s,$$

où la dernière somme est faite sur tous les couples (r,s) d'entiers *pairs* tels que $r\ge 2$, $s\ge 2$ et $r+s=2n$. En supposant par récurrence $(-1)^{m+1}\beta_{2m}>0$ pour $1\le m\le n-1$, ce qui est vrai pour $m=1$, on voit que *chaque* terme de la dernière sommation est égal à $(-1)^{n+1}$. On en tire donc $(-1)^{n+1}\beta_{2n}>0$.

3. — Établir la formule (1.3). [Noter que $\mathcal{P}_n(k-1)$ est le coefficient de u^{n+1} dans le développement de $n!\,u(1+e^u+e^{2u}+\cdots+e^{(k-1)u})$.] Retrouver les expressions de $\mathcal{P}_1(k)$, $\mathcal{P}_2(k)$ et $\mathcal{P}_3(k)$.

4. — Montrer que

$$\big(\mathcal{P}_n(k-1)\big)^2=\sum_{l=1}^{k-1}\big(2l^n\mathcal{P}_n(l-1)+l^{2n}\big).$$

En déduire l'identité

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{P}_n(k-1)\big)^2&=\frac{2}{n+1}\mathcal{P}_{2n+1}(k-1)\\&\quad+2\sum_{1\le s\le n/2}\frac{(-1)^{s+1}}{n+1}\binom{n+1}{2s}B_{2s}\mathcal{P}_{2n-2s+1}(k-1).\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de k^2, montrer que tous les B_{2s} sont positifs.

5. — En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, retrouver l'identité (2.3).

6. — Les formules (2.7) et (5.4) peuvent aussi être démontrées combinatoirement. C'est l'objet du présent exercice. Soit $\mathcal{C}(n,k)$ l'ensemble de toutes les suites $(c_1,c_2,\ldots,c_k)$ d'entiers *positifs* tels que $c_1+c_2+\cdots+c_k=n-k$.

a) Construire une bijection f entre les deux ensembles $\mathcal{C}(n,k)$ et $\mathcal{C}(n-1,k-1)+\mathcal{C}(n-1,k)$. [Considérer les cas $c_k=0$ et $c_k\ge 1$.]

b) Soit $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. Elle peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{C}(n,k)$ dans $\mathbb{R}$, en posant : $E(c_1,c_2,\ldots,c_k)=E(1)^{c_1}E(2)^{c_2}\ldots E(k)^{c_k}$. Montrer que pour $c=(c_1,c_2,\ldots,c_k)$ on a :

$$\frac{E(c)}{E(f(c))}=\begin{cases}1, & \text{si } f(c)\in\mathcal{C}(n-1,k-1)\,;\\ E(k), & \text{si } f(c)\in\mathcal{C}(n-1,k).\end{cases}$$

c) On pose $t(n,k)=\displaystyle\sum_{c\in\mathcal{C}(n,k)}E(c)$. Montrer que $t(n,1)=E(1)^{n-1}$ pour $n\ge 1$, $t(1,k)=0$ pour $k\ge 2$ et que pour $n,k\ge 2$ on a : $t(n,k)=t(n-1,k-1)+E(k)t(n-1,k)$.

d) Retrouver les identités :

(i) $\binom{n-1}{k-1}=|\mathcal{C}(n,k)|\,;$

(ii) $S(n,k)=\displaystyle\sum_{c\in\mathcal{C}(n,k)}1^{c_1}2^{c_2}\ldots k^{c_k}.$

(iii) $T(2n,2k)=\displaystyle\sum_{c\in\mathcal{C}(n,k)}(1^{c_1}2^{c_2}\ldots k^{c_k})^2.$

7. — Pour toute permutation σ de la suite $(1, 2, \ldots, m)$, autrement dit, pour tout élément σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$, on note $\mathrm{Fix}(\sigma)$ l'ensemble des points fixes de σ. Établir combinatoirement l'identité

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} |\mathrm{Fix}(\sigma)|^n = \sum_{k \leq m} S(n,k).$$

Lorsque $m \geq n$, l'identité s'écrit :

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} |\mathrm{Fix}(\sigma)|^n = B'_n \quad \text{(le nombre de Bell).}$$

On considérera l'ensemble des matrices à trois lignes

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m & m+1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(m) & & & \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m & t_{m+1} & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

où σ appartient à $\mathfrak{S}_m$ et vérifie $\mathrm{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$ et où $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est une suite de longueur n dont tous les termes appartiennent à $\mathrm{Fix}(\sigma)$. Le nombre de telles matrices est égal à $\sum_\sigma |\mathrm{Fix}(\sigma)|^n$. Construire alors une bijection $s \mapsto (v, u)$ de l'ensemble de ces matrices sur les paires (v, u), où v est une surjection de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$ et u est une injection de $[\,m-k\,]$ dans $[\,m\,]$.

8. — Établir le petit théorème de Fermat $a^p - a \equiv 0 \pmod p$ en utilisant le théorème multinomial.

9. — Établir, à partir de la définition (5.1) des nombres factoriels centraux $T(n,k)$, les identités (5.10) et (5.11).

10. — Établir l'identité : $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k k!\, S(n,k) = (-1)^n$, d'abord analytiquement en utilisant l'une des identités satisfaites par les nombres de Stirling.

Une première démonstration combinatoire consiste à évaluer la sommation $\sum 1^{|P|}(-1)^{|Q|}$ étendue à tous les couples (P, Q), où P est une permutation de $[\,n\,]$ et Q une quasi-permutation supradiagonale contenue dans P sous les deux formes $\sum_Q (-1)^{|Q|} \sum_{P \supset Q} 1^{|P|}$ et $\sum_P 1^{|P|} \sum_{Q \subset P} (-1)^{|Q|}$ et à interpréter l'identité obtenue à l'aide de la Proposition 2.1.

La seconde démonstration combinatoire utilise le principe de l'involution signée, comme dans le paragraphe 2.2. Soit $\mathrm{Surj}(n,k)$ l'ensemble des surjections de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$ $(1 \leq k \leq n)$. On note Surj_n la réunion de tous les ensembles $\mathrm{Surj}(n,k)$ $(1 \leq k \leq n)$, privée de l'application identique de $\mathrm{Surj}(n,n)$. Construire une involution $f \mapsto g$ de Surj_n sur lui-même telle que si f est une surjection sur $[\,k\,]$, l'application g est une surjection sur $[\,k+1\,]$ ou sur $[\,k-1\,]$.

11. — Soit ${}^nS(x) = \sum_{k\ge 0} S(n,k)x^k$ $(n \ge 1)$ la fonction génératrice "horizontale" de la ligne n des nombres de Stirling de seconde espèce. Alors

$$\Bigl(x\frac{d}{dx}\Bigr)^n e^x = {}^nS(x)\cdot e^x.$$

12. — Établir les identités (2.5) et (2.6) à partir de (2.9) en appliquant à cette dernière la transformation de Laplace inverse.

13. — Soient $2 \le k \le p$ et $0 \le j \le p-k$. Alors

$$\binom{p-k}{j} \equiv (-1)^j \frac{(j+1)(j+2)\ldots(j+k-1)}{(k-1)!} \pmod p.$$

14. — Dans cet exercice, les indices $0,1,\ldots,n-1$ sont pris modulo n. A toute permutation σ de l'intervalle $[0,n-1]=\{0,1,\ldots,n-1\}$, on fait correspondre la fonction τ définie, pour tout $j=0,1,\ldots,n-1$, par :

$$\tau(j) \equiv \sigma(j+1)-1 \pmod n.$$

a) L'application $\delta:\sigma\mapsto\tau$ est une bijection de l'ensemble $\mathfrak{S}_{[0,n-1]}$ des permutations de $[0,n-1]$ sur lui-même. De plus, $\delta^k\sigma(j)\equiv\sigma(j+k)-k$ et $\delta^n =$ l'application identique.

b) L'application δ envoie l'ensemble $C_{[0,n-1]}$ des permutations *circulaires* de $[0,n-1]$ sur lui-même. [Indication : vérifier que : $\tau^k(0)\equiv\sigma^k(1)-1$ pour tout $k\ge 0$.]

c) Soient $n=p$ un nombre premier et k tel que $1\le k\le p-1$. Alors $\delta^k\sigma=\sigma$, si et seulement si σ est de la forme

$$(\star)\quad (\sigma(0),\sigma(1),\ldots,\sigma(n-1)) = (m,m+1,\ldots,n-1,0,1,\ldots,m-1).$$

pour un certain entier m $(0\le m\le n-1)$. On a alors : $\sigma=\delta\sigma=\delta^2\sigma=\cdots=\delta^{p-1}\sigma$.

d) On a l'identité de Wilson : $(p-1)!\equiv p-1 \pmod p$ (p premier). [Considérer les orbites du groupe cyclique engendré par δ, agissant sur l'ensemble $C_{[0,n-1]}$.]

e) Le nombre d'*excédances larges* $\operatorname{exc}_0\sigma$ (resp. d'*excédances* $\operatorname{exc}\sigma$) d'une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_{[0,n-1]}$ est défini comme le nombre d'entiers j tels que $0\le j\le n-1$ et $\sigma(j)\ge j$ (resp. $0\le j\le n-1$ et $\sigma(j)>j$). Pour toute permutation σ, on a $\operatorname{exc}_0\sigma=\operatorname{exc}_0\delta\sigma$. De plus, si σ et $\delta\sigma$ sont *circulaires*, on a $\operatorname{exc}\sigma=\operatorname{exc}\delta\sigma$

f) Le polynôme générateur du nombre des excédances strictes sur l'ensemble $C_{[0,n-1]}$ des permutations circulaires est congru, modulo un premier p, à : $t^{p-1}+t^{p-2}+\cdots+t$.

15. — Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$ sont définis par

$$s(n,0)=s(0,k)=0, \qquad \text{sauf } s(0,0)=1\,;$$
$$s(n,k)=s(n-1,k-1)-(n-1)s(n-1,k), \qquad \text{pour } n,k\ge 1.$$

Les premières valeurs de ces nombres sont données dans la table suivante :

k=	1	2	3	4	5	6	7
n=1	1						
2	−1	1					
3	2	−3	1				
4	−6	11	−6	1			
5	24	−50	35	−10	1		
6	120	274	−225	85	−15	1	
7	720	−1764	1624	−735	175	−21	1

a) Pour tout k,n on a : $\sum\limits_{n\ge j\ge k} s(n,j)S(j,k)=\sum\limits_{n\ge j\ge k} S(n,j)s(j,k)=\delta_{n,k}$.

b) Soit ${}^n s(x)=\sum\limits_{0\le k\le n} s(n,k)x^k$ le polynôme générateur des nombres de Stirling de première espèce (fonction génératrice horizontale). Alors ${}^n s(x)=x(x-1)\ldots(x-n+1)$.

c) Le nombre $c(n,k)=|s(n,k)|$ est égal au nombre de permutations de $1,2,\ldots,n$ ayant k cycles, de sorte que le polynôme générateur du groupe des permutations par nombre de cycles est $(x)_n=x(x+1)\ldots(x+n-1)$.

16. — Soit $(F_n(x,y,z))$ $(n\ge 1)$ la suite des polynômes en les trois variables x, y, z, définis par la relation de récurrence :

$$F_1(x,y,z)=1,$$
$$F_n(x,y,z)=(x+z)(y+z)F_{n-1}(x,y,z+1)-z^2F_{n-1}(x,y,z), \quad (n\ge 2).$$

Donner les expressions de $F_2(x,y,z)$ et $F_3(x,y,z)$, et montrer que :

(i) le polynôme $F_n(x,y,z)$ est symétrique ;

(ii) $F_n(1,1,1)=G_{2n+2}$ (le nombre de Genocchi).

On pose $F_n(x,y,z)=\sum\limits_{1\le i,j,k} a_{n,i,j,k}x^{i-1}y^{j-1}z^{k-1}$ $(n\ge 1)$. Vérifier que :

(iii) $a_{1,1,1,1}=1$ et $a_{1,i,j,k}=0$ si $(i,j,k)\ne(1,1,1)$;

(iv) pour $n\ge 2$, $1\le i,j,k\le n$, on a :

$$a_{n,i,j,k}=\sum_{k\le l\le n-1}\Bigl[\binom{l-1}{k-1}a_{n-1,i-1,j-1,l} + \binom{l-1}{k-2}(a_{n-1,i-1,j,l}+a_{n-1,i,j-1,l})+\binom{l-1}{k-3}a_{n-1,i,j,l}\Bigr].$$

17. — On note SE_n l'ensemble des surjections excédantes de $[\,2n\,]$ sur $2[\,n\,]$ (ou des *escaliers excédants d'ordre* $2n$, *cf.* § 9). Soient $f \in SE_n$ et $x \in [\,2n\,]$; on dit que le couple $(x, f(x))$ est un *point saillant* de f, si pour tout y tel que $1 \le y < x$ on a : $f(y) < f(x)$; que c'est un *point fixe*, si $f(x) = x$; que c'est un *point maximal*, si $x \le 2n-1$ et $f(x) = 2n$. Si $(x, f(x))$ est un point du graphe de f, on dit que x est la *position* du point, et $f(x)$ la *valeur* du point. On désigne par $I(f)$ (resp. $J(f)$, resp. $K(f)$) le nombre de points saillants (resp. fixes, resp. maximaux) de f.

(i) Pour chacun des 17 éléments $f \in SE_3$, déterminer $I(f)$, $J(f)$, $K(f)$.

(ii) On note $SE_{n,i,j,k}$ l'ensemble des éléments f de SE_n ayant $I(f) = i$ points saillants, $J(f) = j$ points fixes, $K(f) = k$ points maximaux. On utilisera aussi les notations évidentes : $SE_{n,*,*,k} = \bigcup_{i,j\ge 1} SE_{n,i,j,k}$, etc ... Construire une bijection $\Phi : f \mapsto \big((c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}), g\big)$ de $SE_{n,*,*,k}$ sur $\sum_{k-1\le l\le n-1} \binom{[l+1]}{k-1} \times SE_{n-1,*,*,l}$.

(iii) Vérifier que la bijection $\Phi : f \mapsto ((c_1, \ldots, c_{k-1}), g)$ (décrite dans les solutions) a les propriétés suivantes :

$$J(g) = \begin{cases} J(f), & \text{si } c_{k-1} = l+1\,; \\ J(f)-1, & \text{si } c_{k-1} < l+1\,; \end{cases} \qquad I(g) = \begin{cases} I(f), & \text{si } c_1 = 1\,; \\ I(f)-1, & \text{si } c_1 > 1\,; \end{cases}$$

où l'on a posé : $k = K(f)$ et $l = K(g)$.

(iv) Démontrer que $|SE_{n,i,j,k}|$ satisfait la récurrence de l'Exercice 16 (iv) et que, par conséquent, on a : $xyzF_n(x,y,z) = \sum_f x^{I(f)} y^{J(f)} z^{K(f)}$ $(f \in SE_n)$.

18. — Il résulte des exercices 16 et 17 que le triplet (I, J, K) a une distribution *symétrique* sur l'ensemble SE_n des escaliers excédants d'ordre n. Construire, à l'aide de la bijection Φ une *involution* $f \mapsto f'$ de SE_n ayant les propriétés : $I(f') = J(f)$, $J(f') = I(f)$, $K(f') = K(f)$.

19. — A l'aide de l'involution $f \mapsto f'$ décrite dans la solution de l'exercice 18, donner l'image f' de la surjection excédante : $f = 4, 2, 6, 8, 6, 8, 8, 8$.

20. *Une interprétation combinatoire de l'identité de Riordan-Stein.* — Il s'agit d'interpréter combinatoirement l'identité (2.1), qu'on peut récrire

$$G_{2n+2} = \sum_{1\le k\le n} (-1)^{n-k} (k!)^2 T(2n, 2k),$$

en faisant usage de la proposition 5.1 du chap. 1. On dit qu'une permutation P de $[\,n\,]$ est *excédante stricte* en x $(1 \le x \le n-1)$, si l'on a : $x < P(x)$. Montrer que G_{2n+2} dénombre les couples de permutations (P_1, P_2) de $[\,n\,]$ tels que P_1 et P_2 ne soient jamais excédantes strictes en même temps, i.e., si pour tout $x = 1, \ldots, n-1$, on a $x < P_1(x)$, si et seulement si $x \geq P_2(x)$.

21. — Un *escalier gauche* E d'ordre $2n$ est défini comme une suite d'entiers positifs $(E_1, E_2, \ldots, E_{2n} = 1)$ telle que

$$E_i - E_{i+1} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ est impair}\,; \\ 0 \text{ ou } 1, & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble de tous les escaliers gauches d'ordre $2n$. Tout escalier gauche E peut être identifié à son graphe, $\mathrm{Gr}(E)$, défini comme le sous-ensemble suivant de $[2n] \times 2\,[n]$:

$$\mathrm{Gr}(E) = \{(i, 2j) \mid 1 \leq i \leq 2n, n - E_i + 1 \leq j \leq n\}.$$

On appelle, ensuite, *évaluation* de l'escalier E l'application

$$V_E : \mathrm{Gr}(E) \to \{1, x, y, z\},$$

qui consiste à donner à chaque case $(i, 2j)$ un poids 1, x, y ou z, selon les règles suivantes :
(i) $(x, x, \ldots, x, x, 1, 1)$ pour la première ligne $\{(i, 2n) \mid 1 \leq i \leq 2n\}$;
(ii) $(1, 1, \ldots, 1, 1, z, y)$ pour les autres lignes.

Par exemple, $E = (3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ est un escalier gauche d'ordre 10. L'évaluation associée V_E est représentée dans la Fig. 1.

$$V_E \quad = \quad \begin{array}{r|cc|cc|cc|cc|cc|}
\cline{2-11}
10 & x & x & x & x & x & x & x & x & 1 & 1 \\
\cline{2-11}
8 & 1 & 1 & 1 & 1 & z & y & \multicolumn{4}{l}{} \\
\cline{2-7}
6 & z & y & \multicolumn{8}{l}{} \\
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10
\end{array}$$

Fig. 1

Une *application* f définie sur E est un sous-ensemble $f \subset \mathrm{Gr}(E)$ tel que, dans chaque colonne de $\mathrm{Gr}(E)$, il y a exactement une seule case dans f. Si $(i, 2j) \in f$, on écrit $f(i) = 2j$. On note $\mathcal{F}_E$ l'ensemble de toutes les applications sur E. L'évaluation d'une application f sur E est définie par :

$$V_E(f) = (-1)^{n-E_1} \prod_{c \in \mathrm{Gr}(E)} V_E(c).$$

a) Démontrer que l'on a :

$$F_n(x,y,z) = \sum_{E\in\mathcal{E}_n} \sum_{f\in\mathcal{F}_E} V_E(f).$$

b) Une application $f \in \mathcal{F}_E$ est dite *surjective* sur E si, dans chaque ligne de $\mathrm{Gr}(E)$, il y a au moins une case dans f. L'ensemble des surjections sur E est noté $\mathcal{S}_E$. L'escalier *ordinaire* est le seul escalier gauche $\bar{E}$ tel que $\bar{E}_1 = n$. Démontrer que l'on a :

$$F_n(x,y,z) = \sum_{f\in\mathcal{S}_{\bar{E}}} V_{\bar{E}}(f).$$

c) Soient f une application sur $\bar{E}_n$ et i un élément de $[2n-2]$; on dit que i est un *point saillant* de f, si $1 \le k < i$ implique $f(k) < f(i) < 2n$; un *point fixe* si $f(i) = i$; un *point surfixe* si $f(i) = i+1$; et un *point maximal* si $f(i) = 2n$. On désigne par $\mathrm{sai}(f)$ (resp. $\mathrm{fix}(f)$, $\mathrm{sur}(f)$, $\max(f)$) le nombre de points saillants (resp. fixes, surfixes et maximaux) de l'application f. Montrer que l'on a :

$$\sum_{f\in\mathcal{S}_{\bar{E}_n}} x^{\max(f)} y^{\mathrm{fix}(f)} z^{\mathrm{sur}(f)} = F_n(x,y,z).$$

d) Soit d un mot dont les lettres sont prises dans l'alphabet $\{0,1\}$. Sa longueur et le nombre de lettres α dans d sont notés respectivement $|d|$ et $|d|_\alpha$. Pour chaque entier n, notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de toutes les suites de mots $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$ satisfaisant les conditions

C1) $|d_1| = 2$;
C2) $|d_i| = |d_{i-1}|_1 + 2$ pour $2 \le i \le n-1$;
C3) $|d_i|_0 \ge 1$ pour $1 \le i \le n-1$.

Vérifier que la suite $(10, 011, 0101)$ est un élément de $\mathcal{D}_4$.

Construire une bijection $f \mapsto (d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$ entre $\mathcal{S}_{\bar{E}_n}$ et $\mathcal{D}_n$ satisfaisant les conditions suivantes dans lesquelles α est une lettre et m un mot :

1) $\max(f) = |d_{n-1}|_1$;
2) $\mathrm{fix}(f) = \#\{i \mid d_i = m0\}$;
3) $\mathrm{sur}(f) = \#\{i \mid d_i = m0\alpha\}$;
4) $\mathrm{sai}(f) = \#\{i \mid d_i = 0m\}$.

e) Construire une involution $f \mapsto \hat{f}$ sur $\mathcal{S}_{\bar{E}_n}$ telle que :

1) $\max(f) = \max(\hat{f})$;
2) $\mathrm{fix}(f) = \mathrm{fix}(\hat{f})$;

3) $\operatorname{sur}(f) = \operatorname{sai}(\hat{f})$;
4) $\operatorname{sai}(f) = \operatorname{sur}(\hat{f})$.
En déduire l'égalité suivante :

$$\sum_{f \in \mathcal{F}\bar{E}_n} x^{\max(f)} y^{\operatorname{fix}(f)} z^{\operatorname{sai}(f)} = F_n(x, y, z).$$

22. — On reprend les notations de la Proposition 15.1. Soient $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ une permutation et i un entier tel que $1 \le i \le n$. Par convention, posons $x_0 = x_{n+1} = 0$. On dit que x_i est un *pic* si x_i est supérieur à la fois à x_{i-1} et x_{i+1}, que c'est un *creux* si x_i est inférieur à la fois à x_{i-1} et x_{i+1}, que c'est une *descente* si $x_{i-1} > x_i > x_{i+1}$ et qu'enfin c'est une *montée* si $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$.

a) Soit (w_1, w_2, x, w_4, w_5) la x-factorisation d'une permutation w. Alors x est un pic (resp. un creux, resp. une descente, resp. une montée) si w_2 et w_4 sont vides (resp. w_2 et w_4 sont non-vides, resp. w_2 est non-vide et w_4 vide, resp. w_2 est vide et w_4 non-vide).

b) Si v est un mot, on note $\max v$ (resp. $\min v$) la lettre *maxima* (resp. *minima*) du mot v. Soit (w_1, w_2, x, w_4, w_5) la x-factorisation d'une permutation w, on dit que x est un creux *de première espèce* (resp. *de seconde espèce*) de w si $\max w_2 < \max w_4$ (resp. $\max w_4 < \max w_2$).

On introduit maintenant cinq variables commutatives X_p, X_f, X_s, X_d, X_r ("*p*" pour pic, "*f*" pour "first", "*s*" pour seconde, "*d*" pour descente, "*r*" pour "rise"). On pose alors $V_x(w) := X_p$, X_f, X_s, X_d, X_r, suivant que x est, respectivement, un pic, un creux de première espèce, un creux de seconde espèce, une descente, une montée dans la permutation w. On définit, ensuite, la *variation* d'une permutation w d'ordre n par :

$$V(w) := \prod_{1 \le x \le n} V_x(w).$$

Soit φ_x l'involution du groupe $\mathfrak{S}_n$ définie au § 15. Alors
(i) $\varphi_x(w) = w$ si et seulement si x est un pic ;
(ii) x est un creux de première espèce de w si et seulement si x est un creux de seconde espèce de $\varphi_x(w)$;
(iii) x est une montée de w si et seulement si x est une descente de $\varphi_x(w)$;
(iv) $V_y(w) = V_y \varphi_x(w)$ pour tout $y \in [\,n\,] \setminus \{x\}$.

c) Soit G_n le groupe engendré par les φ_x (*cf.* Corollaire 15.4). Si une permutation w a exactement k pics, le polynôme générateur de l'orbite Θ qui la contient, par la variation V, est donné par :

$$\sum_{w \in \Theta} V(w) = X_p^k (X_f + X_s)^{k-1} (X_r + X_d)^{n-2k+1}.$$

d) Notons $p(w)$, $f(w)$, $s(w)$, $d(w)$, $r(w)$, respectivement le nombre de pics, de creux de première espèce, de creux de seconde espèce, de descentes, de montées de la permutation w. Soient X et Y deux variables. Alors le polynôme $\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} X^{f(w)}(1-X)^{s(w)}Y^{r(w)}(1-Y)^{d(w)}$ est un nombre entier, égal au nombre tangent ou sécant D_n.

23. (Suite de l'exercice précédent). — D'après l'exercice 22, c), le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par la variation V, à savoir $P_n := \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} V(w)$, est de la forme :

$$P_n = \sum_{k\geq 1} d_{n,k}\, X_p^k (X_f+X_s)^{k-1}(X_r+X_d)^{n-2k+1},$$

où $d_{n,k}$ est le nombre d'orbites de G_n ayant k pics.

a) Alors $P_1 = X_p$, $P_2 = X_p(X_r+X_d)$ et la suite (P_n) $(n\geq 1)$ satisfait, pour $n \geq 1$, les récurrences :

$$P_{n+1} = (X_r+X_d)P_n + \sum_{1\leq i\leq n-1} \binom{n-1}{i} P_i\,(X_f+X_s)P_{n-i};$$

$$2\,P_{n+1} = 2(X_r+X_d)P_n + \sum_{1\leq i\leq n-1} \binom{n}{i} P_i\,(X_f+X_s)P_{n-i}.$$

b) Dans l'algèbre des séries formelles en une variable u et à coefficients dans l'algèbre des polynômes en les variables X_p, X_f, X_s, X_d, X_r, on a l'identité :

$$\sum_{n\geq 0} P_{n+1}\frac{u^n}{n!} = X_p \exp\Bigl((X_r+X_d)u + \sum_{n\geq 2}(X_f+X_s)\,P_{n-1}\frac{u^n}{n!}\Bigr).$$

c) D'après l'Exercice 22, c), dans toute orbite de G_n ayant k pics, il y a une et une seule permutation w de variation $V(w) = X_p^k X_f^{k-1} X_r^{n-2k+1}$, donc n'ayant aucune descente et seulement des creux de première espèce. Appelons une telle permutation une *permutation d'André de première espèce.* Donner la liste de toutes les permutations d'André de première espèce pour $n = 1,2,3,4,5$.

d) Disons maintenant que si (w_1, w_2, x, w_4, w_5) est la x-factorisation d'une permutation w et si x est un creux de w, on dit qu'il est *de type* I (resp. *de type* II) si $\min w_2 < \min w_4$ (resp. $\min w_4 < \min w_2$). On appelle alors *permutation d'André de seconde espèce* toute permutation sans descente, dont tous les creux sont *de type* II. Donner la liste de toutes les permutations d'André de seconde espèce pour $n = 1,2,3,4,5$.

e) Les permutations d'André de seconde espèce peuvent être engendrées, partant de l'unique permutation 1 d'ordre 1, par insertions successives de 2, 3, ..., n, ... *avant* chaque montée ou *après* chaque pic. Par exemple, à partir de la permutation d'André de seconde espèce $w = 3,1,2,4$, ayant la montée 2 et les deux pics 3, 4, on engendre les trois permutations d'André de seconde espèce : $3,1,5,2,4$, $\;3,5,1,2,4$, $\;3,1,2,4,5$. Comme $d_{n,k}$ est aussi le nombre de permutations d'André de seconde espèce, d'ordre n ayant k pics, cette propriété d'insertion entraîne la récurrence suivante sur les coefficients $d_{n,k}$:

$$d_{1,1} = 1, \quad d_{n,k} = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et } n+1 < 2k;$$
$$d_{n+1,k} = k\, d_{n,k} + (n+3-2k)\, d_{n,k-1}, \text{ pour } 1 \le k \le \lceil (n+1)/2 \rceil \text{ et } n \ge 1.$$

(Voir la Table 2 pour les premières valeurs des $d_{n,k}$.)

k=	1	2	3	4	$D_n = \sum d_{n,k}$
n=1	1				1
2	1				1
3	1	1			2
4	1	4			5
5	1	11	4		16
6	1	26	34		61
7	1	57	180	34	272
8	1	120	768	496	1385

Table 2
Tableau des coefficients $d_{n,k}$

f) Lorsqu'on pose $X_f = X_s = 1$ dans P_n, le polynôme se réduit à : $P_n = \sum_k 2^{k-1} d_{n,k} X_p^k (X_r + X_d)^{n-2k+1}$. Le coefficient $c_{n,k} := 2^{k-1} d_{n,k}$ est ainsi le nombre de permutations d'ordre n ayant k pics et $(n-2k+1)$ montées (resp. k pics et $(n-2k+1)$ descentes). D'après e) les coefficients $c_{n,k}$ satisfont la relation de récurrence :

$$c_{1,1} = 1, \quad c_{n,k} = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et } n+1 < 2k;$$
$$c_{n+1,k} = k\, c_{n,k} + 2(n+3-2k)\, c_{n,k-1}, \text{ pour } 1 \le k \le \lceil (n+1)/2 \rceil \text{ et } n \ge 1.$$

Voir la Table 3 pour les premières valeurs des $c_{n,k}$. Dans cette table, on observe que $c_{2k-1,k} = D_{2k-1}$ (le nombre tangent). C'est vrai !

g) Lorsqu'on pose $X_f = X_s = X_r = X_d = 1$ dans P_n, le polynôme se réduit à $\sum_k 2^{n-k} d_{n,k} X_p^k$. Le coefficient $t_{n,k} := 2^{n-k} d_{n,k}$ est ainsi le

k=	1	2	3	4
n=1	1			
2	1			
3	1	2		
4	1	8		
5	1	22	16	
6	1	52	136	
7	1	114	720	272
8	1	240	3072	3968

Table 3
Tableau des coefficients $c_{n,k}$

nombre de permutations d'ordre n ayant k pics. D'après e) les coefficients $t_{n,k}$ satisfont la relation de récurrence :

$$t_{1,1} = 1, \quad t_{n,k} = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et } n+1 < 2k;$$
$$t_{n+1,k} = 2k\, t_{n,k} + (n+3-2k)\, t_{n,k-1}, \text{ pour } 1 \leq k \leq \lceil (n+1)/2 \rceil \text{ et } n \geq 1.$$

Voir la Table 4 pour les premières valeurs des $t_{n,k}$. Dans cette table, on observe que $t_{2k-2,k-1} = t_{2k-1,k} = D_{2k-1}$ ($k \geq 2$) (le nombre tangent). C'est vrai aussi.

k=	1	2	3	4
n=1	1			
2	2			
3	4	2		
4	8	16		
5	16	88	16	
6	32	416	272	
7	64	1824	2880	272
8	128	7680	24576	7936

Table 4
Tableau des coefficients $t_{n,k}$

h) Ce qu'on a appelé "descente" au chap. 1, § 16 est ce qu'on appelle "descente" ou "pic" dans le présent exercice, à l'exclusion de la dernière lettre d'une permutation. Par conséquent, lorsqu'on fait les substitutions $X_p \leftarrow t$, $X_d \leftarrow t$ et $X_f = X_s = X_r = 1$ dans le polynôme P_n, on retrouve le polynôme $t\, A_n(t)$, où $A_n(t)$ est le *polynôme Eulérien*. On a donc :

$$t\, A_n(t) = \sum_k 2^{k-1} d_{n,k} t^k (1+t)^{n-2k+1} = \sum_k c_{n,k} t^k (1+t)^{n-2k+1}.$$

24. La dernière identité du précédent exercice entraîne que, pour tout $n \geq 1$, on a : $A_{2n}(-1) = 0$ et $(-1)^{n-1}A_{2n-1}(-1) = D_{2n-1}$ (le nombre tangent), une identité qui, dans l'interprétation du chap. 1, § 16, s'exprime en disant que la valeur en -1 du polynôme générateur de $\mathfrak{S}_{2n-1}$ par nombre d'excédances est égale au nombre tangent D_{2n-1}. A-t-on une identité analogue pour le nombre sécant D_{2n} ?

Se reportant au chap. 1, § 15 et en définissant le poids cardinal-compatible sur chaque permutation circulaire τ comme étant 0, si τ est de longueur 1 et $t^{\operatorname{exc}\tau}$ autrement, au lieu de trouver l'identité (16.1) du chap. 1, on obtient une identité de la forme :

$$\sum_{n\geq 0} B_n(t)\frac{u^n}{n!} = \exp \sum_{n\geq 2} A_{\mathfrak{C}_n}(t)\frac{u^n}{n!}.$$

Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des *dérangements* d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des permutations d'ordre n *sans points fixes* (ou encore des permutations σ telles que pour tout i on ait $\sigma(i) \neq i$). Le polynôme $B_n(t)$ est alors le *polynôme générateur de $\mathcal{D}_n$ par le nombre d'excédances.* En particulier, $B_0(t) = 1$, $B_1(t) = 0$, $B_2(t) = t$, $B_3(t) = t + t^2$, $B_4(t) = t + 7t^2 + t^3$. En utilisant les identités (16.2)–(16.4) du chap. 1 et l'expression de la fonction génératrice exponentielle des polynômes eulériens obtenue dans l'Exercice 33, (e) du chap. 1, on trouve : $B_{2n-1} = 0$ et $(-1)^n B_{2n}(-1) = D_{2n}$ $(n \geq 1)$.

25. Pour chaque $n \geq 1$ notons $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des permutations *sans successions*, ou encore des permutations σ satisfaisant $\sigma(1) \neq 1$ et, pour chaque $i = 1, \ldots, n-1$, la relation $1 + \sigma(i) \neq \sigma(i+1)$. Pour toute permutation σ d'ordre n, notons, par ailleurs, $\operatorname{rise}\sigma$ (resp. $\operatorname{exc}\sigma$) le nombre d'entiers i tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ [par convention, $\sigma(0) = 0$] (resp. tels que $1 \leq i \leq n-1$ et $i < \sigma(i)$). Alors le polynôme $B_n(t) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} t^{\operatorname{exc}\sigma}$ de l'exercice précédent est aussi égal à : $\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} t^{\operatorname{rise}\sigma}$. Pour établir ce résultat, on construit une bijection $\sigma \mapsto \sigma_3$ de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathcal{G}_n$ satisfaisant $\operatorname{exc}\sigma = \operatorname{rise}\sigma_3$.

26. Soit $D(u) = \sec u + \operatorname{tg} u = \sum_{n\geq 0} (u^n/n!)\, D_n$ la fonction génératrice exponentielle des permutations alternantes. On a les identités :

(a) $$0 = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k \binom{n}{k} D_k D_{n-k} \quad (n \geq 1);$$

(b) $$2^{2n} D_{2n} = \sum_{0\leq k \text{ impair } \leq 2n} 2^{n-k}\binom{2n}{k} D_k D_{2n-k};$$

$$\text{(c)} \qquad (2^{2n+1}-1)D_{2n+1} = \sum_{0\le k \text{ pair } \le 2n} 2^k \binom{2n+1}{k} D_k D_{2n+1-k};$$

$$\text{(d)} \qquad (-1)^n = \sum_{0\le k \text{ pair } \le 2n} (-1)^{k/2} \binom{2n+1}{k} D_{2n+1-k};$$

$$\text{(e)} \qquad 0 = \sum_{0\le k \text{ pair } \le 2n} (-1)^{k/2} \binom{2n}{k} D_{2n-k}.$$

27. *Le calcul de Garsia pour les permutations alternantes.* — Soit f une statistique définie sur l'ensemble $\mathfrak{P}(T)$ des parties d'un ensemble fini T.

(a) Alors

$$\sum_{\substack{S,R\\ S\subset R,\, R\subset T}} (-1)^{|T|-|R|} f(S) = f(T).$$

(b) A toute *permutation* $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, on fait correspondre son ensemble des positions de descentes $\mathrm{DES}(\sigma) := \{i : 1 \le i \le n-1,\, \sigma(i) > \sigma(i+1)\,\}$. Par ailleurs, à toute *partition ordonnée* $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_{k+1})$ de l'ensemble $[\,n\,]$ en blocs non-vides, on fait correspondre le sous-ensemble de $[n-1]$ défini par $S(\pi) := \{|B_1|, |B_1| + |B_2|, \ldots, |B_1| + \cdots + |B_k|\,\}$. Alors, pour tout sous-ensemble R de $[n-1]$, les deux ensembles $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{DES}(\sigma) \subset R\}$ et $\{\pi : S(\pi) = R\}$ ont même cardinal.

(c) Sur l'ensemble $\mathfrak{P}([n-1])$ on prend la statistique $f(R) := |\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{DES}(\sigma = R\}|$. Avec $n := 2m$ et $T := \{1, 3, 5, \ldots, 2m-1\}$, la statistique $f(T)$ n'est autre que le nombre D_{2m} des permutations alternantes (descendantes) d'ordre $2m$. Alors

$$D_{2m} = (-1)^m + \sum_{1\le k\le m} (-1)^{m+k} \sum_{\nu} \binom{2m}{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \nu_{k+1}},$$

où la dernière sommation est sur l'ensemble de toutes les suites $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \nu_{k+1})$ de $(k+1)$ entiers tels que $1 \le k \le m$, ν_1 impair, $\nu_2, \ldots, \nu_k$ pairs et $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k + \nu_{k+1} = 2m$.

(d) On en déduit : $\sum\limits_{m\ge 0} D_{2m}(u^{2m}/(2m)!) = \sec u$.

28. *Les contractions de Rogers.* — Pour chaque série formelle de la forme $c = 1 + \sum\limits_{n\ge1} c(n)u^n$ et tout entier $k \ge 0$, on pose $T^k c := 1 + \sum\limits_{n\ge1} c(n+k)\, u^n$. Avec la convention $\mathrm{Stiel}_1(c) = 1$, on a pour $n \ge 2$,

$$\mathrm{Stiel}_n(c) := \cfrac{1}{1 - \cfrac{c(1)u}{1 - c(2)u\ \mathrm{Stiel}_{n-2}(T^2c)}}$$

et pour $n \ge 3$,

$$\mathrm{Stiel}_n(c) := \cfrac{1}{1-\cfrac{c(1)u}{1-\cfrac{c(2)u}{1-c(3)u\ \mathrm{Stiel}_{n-3}(T^3c)}}}.$$

En “contractant” la fraction la plus basse dans ces deux expressions, on obtient :

$$\mathrm{Stiel}_n(c) = 1 + c(1)u\frac{1}{1-c(1)u-c(2)u\ \mathrm{Stiel}_{n-2}(T^2c)};$$

$$\mathrm{Stiel}_n(c) = \cfrac{1}{1-c(1)u-\cfrac{c(1)c(2)u^2}{1-c(2)u-c(3)u\ \mathrm{Stiel}_{n-3}(T^3c)}}.$$

De même, en prenant pour définition de $\mathrm{Jac}_n(p,q)$ (*cf.* § 19) la fraction rationnelle

$$\mathrm{Jac}_n(p,q) := \cfrac{1}{1-p(1)u-\cfrac{q(1)u^2}{\ddots\ 1-p(n-1)u-\cfrac{q(n-1)u^2}{1-p(n)u-q(n)u^2}}},$$

on a aussi :

$$\mathrm{Jac}_n(p,q) = \frac{1}{1-p(1)-q(1)u^2\ \mathrm{Jac}_{n-1}(Tp,Tq)};$$

$$\mathrm{Jac}_n(p,q) = \cfrac{1}{1-p(1)u-\cfrac{q(1)u^2}{1-p(2)u-q(2)u^2\ \mathrm{Jac}_{n-2}(T^2p,T^2q)}}.$$

A toute série formelle $c = 1 + \sum\limits_{n\ge 1} c(n)u^n$, associons les séries formelles $p := p(c)$, $q := q(c)$, $p' := p'(c)$, $q' := q'(c)$ définies par :

$$\begin{aligned}
p &:= 1 + \big(c(1)+c(2)\big)u + \cdots + \big(c(2n-1)+c(2n)\big)u^n + \cdots\\
q &:= 1 + c(2)c(3)u + \cdots + c(2n)c(2n+1)u^n + \cdots\\
p' &:= 1 + c(1)u + \big(c(2)+c(3)\big)u^2 + \cdots + \big(c(2n-2)+c(2n-1)\big)u^n + \cdots\\
q' &:= 1 + c(1)c(2)u + \cdots + c(2n-1)c(2n)u^n + \cdots
\end{aligned}$$

(a) On a $p(T^2c) = Tp(c)$ et $q(T^2c) = Tq(c)$,

(b) ainsi que $p(T^3c) = T^2p'(c)$ et $q(T^3c) = T^2q'(c)$.

(c) On a aussi $\mathrm{Stiel}_{2n}(c) = 1 + c(1)u\ \mathrm{Jac}_n(p(c), q(c))$,

(d) ainsi que $\mathrm{Stiel}_{2n-1}(c) = \mathrm{Jac}_n(p'(c), q'(c))$.

(e) D'où $\mathrm{Stiel}(c) = 1+c(1)u\ \mathrm{Jac}(p(c), q(c)) = \mathrm{Jac}(p'(c), q'(c))$. Les deux fractions continues de Jacobi ainsi définies sont dites les deux *contractions de Rogers* de la fraction continue de Stieltjes.

29. — Étant donnée une série formelle f, s'il existe une série c telle que $\mathrm{Stiel}(c) = f$ (on dit alors que f *possède un développement en fraction continue de Stieltjes*), cette série c est unique d'après le Théorème 17.1. Soit $f_\alpha := \sum_{n\ge 0} (\alpha)_n\, u^n$. Le développement en fraction continue de Stieltjes de f_α est $\mathrm{Stiel}\, c_\alpha$ avec $c_\alpha = 1 + \alpha\, u + u^2 + (\alpha+1)u^3 + 2\, u^4 + \cdots + (\alpha+n-1)u^{2n-1} + n\, u^{2n} + \cdots$ (Utiliser les techniques du précédent exercice.)

30. — Rappelons que si a et b sont deux séries formelles et que b est sans terme constant, on note $a \circ b$ la série obtenue par substitution de b dans a (*cf.* chap. 1, § 3). Soit $\mathrm{Jac}(p, q)$ une fraction continue de Jacobi. On a alors l'identité :

$$\big(u\ \mathrm{Jac}(p,q)\big) \circ (u/(1-u)) = u\ \mathrm{Jac}(p + u/(1-u), q).$$

31. — La fonction génératrice verticale des nombres de Stirling est donnée (*cf.* § 2.5) par :

$$S_k(u) = \sum_{n\ge k} S(n,k)u^n = \frac{u^k}{(1-u)(1-2u)\cdots(1-ku)} \quad (k \ge 1).$$

La suite $(S_k(u))$ $(k \ge 1)$ étant sommable, on peut former la série

$$f := u \sum_{k\ge 1} t^{k-1} S_{k-1}(u) = \sum_{k\ge 1} t^{k-1} \frac{u^k}{(1-u)(1-2u)\cdots(1-(k-1)u)},$$

où t est une nouvelle variable.

(a) La série f satisfait l'équation $f = u + t\, u\, f \circ (u/(1-u))$.

(b) En utilisant l'Exercice 28 (e), l'Exercice 30 et (a), on trouve que f admet un développement en fraction continue de Stieltjes. La série c telle que $f = \mathrm{Stiel}(c)$ est donnée par $c = 1 + \sum\limits_{n\ge 1} c(n)u^n$ avec $c(2n-1) = t$, $c(2n) = n$ $(n \ge 1)$.

32. — On se reporte à la matrice de Seidel des nombres tangents et sécants donnée dans le Tableau 19 du paragraphe 14. Les coefficients de la suite initiale sont les coefficients de $u^n/n!$ de la série $1 - \mathrm{th}$, où "th" est la série tangente hyperbolique. On peut aussi prendre la transformation de Laplace de cette série, les coefficients de u^n de la série $\mathcal{L}\,(1-\mathrm{th}) = 1 - u + 2u^3 - 16u^5 + 272u^7 + \cdots$ Les coefficients de la suite finale sont les coefficients de u^n de la série $\mathcal{L}\ \mathrm{sech} = 1 - u^2 + 5u^4 - 61u^6 + 1385u^8 + \cdots$, où $\mathrm{sech} = 1/\,\mathrm{ch}$ est la sécante hyperbolique.

(a) Connaissant le coefficient $a(0,0) = 1$ de la matrice de Seidel et utilisant le seul fait que la série "th" est impaire (i.e., a tous ses coefficients d'ordre pair nuls) et que la série "sech" est paire, on peut déterminer *tous* les coefficients de cette matrice de Seidel.

(b) Il existe une et une seule matrice de Seidel $(a(i,j))$ telle que $a(0,0) = 1$ et telle que, si on note $a(0,*)$ (resp. $a(*,0)$) la fonction génératrice ordinaire de sa suite initiale (resp. finale), la série $a(0,*) - 1$ soit impaire et la série $a(*,0)$ soit paire.

(c) On note que les coefficients de la suite initiale sont égaux à $a(0,0) = 1$ et, pour $n \geq 1$, à $a(0,2n-1) = (-1)^{n-1}D_{2n-1}$ (D_{2n-1} nombre sécant) et $a(0,2n) = 0$. En supposant qu'il existe une série c telle que $\mathcal{L}(1 - \mathrm{th}) = \mathrm{Stiel}(c)$, on peut appliquer l'algorithme de Stieltjes (*cf.* (18.1)) avec les conditions initiales $h(n,n) = a(0,n)$ $(n \geq 0)$ et déterminer les coefficients $h(n,k)$ et $c(n)$. Calculer la matrice $(h(n,k))$ pour $0 \leq k \leq n = 8$. Les coefficients $c(n)$ valent : $c(2n-1) = -n$, $c_{2n} = n$ $(n \geq 1)$.

(d) En utilisant une nouvelle fois les techniques de l'Exercice 28 (e), et la Proposition 12.1 du chap. 1, on peut déterminer les développements en fraction continue de Jacobi de "th" et de "sech".

Dans les trois exercices suivants, on introduit trois familles d'objets combinatoires et on se propose de démontrer qu'on peut construire des bijections entre elles qui conservent certaines propriétés remarquables.

33. *Les permutations chargées.* — Pour chaque couple d'entiers (n,m) tels que $0 \leq m \leq n$, on associe l'ensemble $Ch(n,m)$ des *permutations chargées* d'ordre (n,m). Par permutation chargée d'ordre (n,m), on entend un mot $w = x_1x_2\ldots x_{n+m}$, contenant une fois les lettres $1,2,\ldots,n$ et m lettres égales à ∞, ne contenant pas de facteur de la forme $\infty\,\infty$, enfin ne se terminant pas par ∞. Naturellement, $Ch(n,0) = \mathfrak{S}_n$.

En convenant que $x_0 = 0$ et que $x_{n+m+1} = \infty$, on voit que les notions de pic, creux, descente et montée, telles qu'elles ont été définies dans l'Exercice 22 restent valables pour chaque permutation chargée $w = x_1x_2\ldots x_{n+m}$ d'ordre (n,m). Avec cette convention, toute permutation chargée a le *même nombre de pics et de creux*. De plus, toutes les lettres infinies sont forcément des pics. D'autre part, $w = w_1x_2\ldots x_{n+m}$ admet une factorisation unique $B_1,B_2,\ldots,B_r$, obtenue en coupant w *juste après* chaque creux et *juste après* chaque montée. Chaque facteur B_i est ainsi, ou réduit à une seule lettre x_j qui est une montée de w, ou de la forme $x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+s}$ $(s \geq 1)$, où x_j est un pic, x_{j+s} un creux et les autres lettres des descentes.

Pour chaque lettre x_k du mot w, on désigne alors par $e_w(x_k)$ le nombre de facteurs $B_i = x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+s}$ de cette factorisation, de longueur au moins égale à 2, situés *à gauche de* x_k et tels que $x_j > x_k > x_{j+s}$. On note que $e_w(x_k) = 0$ si $x_k = \infty$ et on pose : $e(w) := e_w(1), e_w(2), \ldots, e_w(n)$.

Par exemple, $w = 2, \infty, 3, 6, \infty, 5, 1, 4$ est une permutation chargée d'ordre $(6, 2)$. Les entiers 2, 4 et 6 sont des montées, 1 et 3 des pics, 5 une descente et il y a des pics égaux à ∞ en seconde et cinquième positions. Matérialisons la factorisation en blocs B_i de w par des traits verticaux et écrivons les nombres $e_w(x_k)$ sous les lettres x_k elles-mêmes. On obtient :

$$\begin{array}{rl} k & = \\ x_k & = \\ e_w(x_k) & = \end{array} \left(\begin{array}{c|cc|c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & \infty & 3 & 6 & \infty & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

d'où l'on tire : $e(w) = 0, 0, 0, 2, 1, 1$.

(a) Le cardinal de $Ch(n, m)$ est égal à $\binom{n}{m} n!$

(b) Pour $1 \le m \le n$, on construit une bijection $p^{-1} : (w, j) \mapsto w'$ de $Ch(n, m) \times [0, m-1]$ sur $Ch(n+1, m-1)$ telle que $e(w')$ soit le produit de juxtaposition $e(w), j$ et $(n+1)$ soit un pic de w'.

(c) Pour $0 \le m \le n$, on construit une bijection $t^{-1} : (w, j) \mapsto w'$ de $Ch(n, m) \times [0, m]$ sur $Ch(n+1, m+1)$ telle que $e(w') = e(w), j$ et $(n+1)$ est un creux de w'.

(d) Pour $1 \le m \le n$, on construit une bijection $d^{-1} : (w, j) \mapsto w'$ de $Ch(n, m) \times [0, m-1]$ sur $Ch(n+1, m)$ telle que $e(w') = e(w), j$ et $(n+1)$ est une descente de w'.

(e) Pour $0 \le m \le n$, on construit une bijection $r^{-1} : (w, j) \mapsto w'$ de $Ch(n, m) \times [0, m-1]$ sur $Ch(n+1, m)$ telle que $e(w') = e(w), j$ et $(n+1)$ est une montée de w'.

(f) Un *chemin de Motzkin coloré allant de la hauteur 0 à la hauteur m en n pas* est défini comme un couple (γ, v), où $\gamma \in \Gamma_{0 \to m}(n)$ (dans les notations du paragraphe 19) et où $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une valuation satisfaisant les propriétés (20.1). On note $M(n, m)$ l'ensemble de tels chemins. Naturellement, pour $m = 0$, l'ensemble $M(n, 0)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin colorés de longueur n, décrits en § 20.2.

On construit alors une bijection $w \mapsto (\gamma, v)$ de $Ch(n, m)$ sur $M(n, m)$ telle que $e(w) = v$.

(g) Construire le chemin de Motzkin coloré associé à la permutation chargée $w = 2, \infty, 3, 6, \infty, 5, 1, 4$.

(h) La bijection $w \mapsto (\gamma, v)$ de $Ch(n, 0) = \mathfrak{S}_n$ sur $M(n, 0)$ n'est autre que la *transformation de Françon-Viennot*. Elle satisfait $e(w) = v$ et il y a correspondance entre pic et pas descendant, creux et pas montant, montée et palier continu (bleu), descente et palier pointillé (rouge).

34. *Les permutations plombées.* — Par *permutation plombée* d'ordre (n,m), on entend un mot $w = x_1x_2\ldots x_{n+m}$, contenant une fois les lettres $1,2,\ldots,n$ et m lettres ∞ apparaissant toutes parmi les n premières lettres du mot. Notons $Pl(n,m)$ l'ensemble de ces permutations. Naturellement, $Pl(n,0) = \mathfrak{S}_n$.

A partir d'une permutation plombée $w = x_1x_2\ldots x_{n+m}$ de $Pl(n,m)$, formons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \infty & \ldots & \infty \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x_{n+1} & \ldots & x_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Désignons par $\mathrm{Exc}(w) := \{a_1 < \cdots < a_l\}$ l'ensemble des *positions d'excédance*, i.e., des indices k tels que $1 \le k \le n$ et $k < x_k$, par $\mathrm{Exc}'(w)$ l'ensemble des *valeurs d'excédance*, i.e, de tous les entiers x_{a_k} $(1 \le k \le l)$ qui sont *finis* et par $\mathrm{Nexc}(w) := \{b_1 < \cdots < b_{n-l}\}$ l'ensemble $[\,n\,] \setminus \mathrm{Exc}(w)$ des *positions finies de non-excédance*, i.e., des indices k tels que $1 \le k \le n$ et $k \ge x_k$. Posons enfin, $\mathrm{Nexc}'(w) := \{x_{b_1},\ldots,x_{b_{n-l}},x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\}$, l'ensemble des *valeurs de non-excédance* et formons les deux sous-matrices :

$$A(w) := \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_l \\ x_{a_1} & \ldots & x_{a_l} \end{pmatrix}, \qquad B(w) := \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_{n-l} & \infty & \ldots & \infty \\ x_{b_1} & \ldots & x_{b_{n-l}} & x_{n+1} & \ldots & x_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Naturellement, le couple de matrices $(A(w),B(w))$ caractérise w. Notons $f_w(x_{a_1})\ldots f_w(x_{a_l})$ la table des inversions *de gauche à droite* du mot $x_{a_1}\ldots x_{a_l}$ et $f_w(x_{b_1})\ldots f_w(x_{b_{n-l}})\, f(x_{n+1})\ldots f(x_{n+m})$ la table des inversions *de droite à gauche* du mot $x_{b_1}\ldots x_{b_{n-l}}\, x_{n+1}\ldots x_{n+m}$. On peut donc définir le mot $f(w)$ comme étant : $f(w) := f_w(1), f_w(2),\ldots,f_w(n)$.

Par exemple, à la permutation plombée $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & 4 & \infty & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, on associe les matrices : $A(w) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \infty & 5 & \infty \end{pmatrix}$ et $B(w) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \infty & \infty \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{Exc}(w) = \{1,3,5\}$, $\mathrm{Exc}'(w) = \{5\}$, $\mathrm{Nexc}(w) = \{2,4,6\}$, $\mathrm{Nexc}'(w) = \{1,2,3,4,6\}$. Comme la table des inversions de gauche à droite de $\infty,5,\infty$ est $0,1,0$ et celle de droite à gauche de $1,4,2,6,3$ est $0,2,0,1,0$, on définit : $f(w) = 0,0,0,2,1,1$.

(a) Le cardinal de $Pl(n,m)$ est égal à $\binom{n}{m}n!$ (qui est aussi le cardinal de $Ch(n,m)$).

(b) Pour $1 \le m \le n$, on construit une bijection $\pi^{-1} : (w,j) \mapsto w'$ de $Pl(n,m) \times [0,m-1]$ sur $Pl(n+1,m-1)$ telle que $f(w') = f(w), j$ et $(n+1) \in \mathrm{Nexc}(w') \cap \mathrm{Exc}'(w')$.

(c) Pour $0 \le m \le n$, on construit une bijection $\tau^{-1} : (w,j) \mapsto w'$ de $Pl(n,m) \times [0,m]$ sur $Pl(n+1,m+1)$ telle que $f(w') = f(w), j$ et $(n+1) \in \mathrm{Exc}(w') \cap \mathrm{Nexc}'(w')$.

(d) Pour $1 \leq m \leq n$, on construit une bijection $\delta^{-1} : (w, j) \mapsto w'$ de $Pl(n, m) \times [0, m-1]$ sur $Pl(n+1, m)$ telle que $f(w') = f(w), j$ et $(n+1) \in \mathrm{Exc}(w') \cap \mathrm{Exc}'(w')$.

(e) Pour $0 \leq m \leq n$, on construit une bijection $\rho^{-1} : (w, j) \mapsto w'$ de $Pl(n, m) \times [0, m]$ sur $Pl(n+1, m)$ telle que $f(w') = f(w), j$ et $(n+1) \in \mathrm{Nexc}(w') \cap \mathrm{Nexc}'(w')$.

(f) On construit une bijection $w \mapsto (\gamma, v)$ de $Pl(n, m)$ sur l'ensemble $M(n, m)$ décrit dans l'exercice précédent en (f) telle que $f(w) = v$. Lorsque $m = 0$, cette bijection n'est autre que la bijection décrite en § 20.2.

(g) Soit w la permutation plombée d'ordre $(6, 2)$ décrite dans l'exemple donné juste avant (a) et telle que $f(w) = 0, 0, 0, 2, 1, 1$. Donner la description des permutations plombées : $w_1' := \pi^{-1}(w, 1)$, $w_2' := \tau^{-1}(w, 2)$, $w_3' := \delta^{-1}(w, 1)$, $w_4' := \rho^{-1}(w, 1)$.

35. (*Suite des Exercices* 33 *et* 34). — Soit $\Psi_{Ch\to M} : w \mapsto (\gamma, v)$ la bijection de $Ch(n, m)$ sur $M(n, m)$ telle que $e(w) = v$, décrite dans l'Exercice 33 ; soit $\Psi_{Pl\to M} : w \mapsto (\gamma, v)$ la bijection de $Pl(n, m)$ sur $M(n, m)$ telle que $f(w) = v$, décrite dans l'Exercice 34. Le produit $\Psi_{Ch\to Pl} := \Psi_{Pl\to M}^{-1} \circ \Psi_{Ch\to M}$ est alors une bijection $w \mapsto w'$ de $Ch(n, m)$ sur $Pl(n, m)$ telle que $e(w) = f(w')$.

(a) On peut donner une définition non récursive de la bijection $\Psi_{Ch\to Pl}$.

(b) La description de la bijection inverse $\Psi_{Pl\to Ch} := \Psi_{Ch\to Pl}^{-1}$ est itérative.

(c) Déterminer $\Psi_{Ch\to Pl}(w)$ pour $w = 2, \infty, 3, 6, \infty, 5, 1, 4$.

(d) Déterminer $\Psi_{Pl\to Ch}(w')$ pour $w' = \infty, 1, 5, 4, \infty, 2, 6, 3$.

Lorsque $m = 0$, la bijection $\Psi_{Ch\to Pl}$ et son inverse ont été explicités par Clarke, Steingrímsson et Zeng.

36. — Soit $(\gamma, v) := (\gamma_1 \ldots \gamma_n, v_1 \ldots v_n)$ un chemin de Motzkin coloré, allant de la hauteur 0 à la hauteur m en n pas, donc un élément de $M(n, m)$ dans les notations de l'Exercice 32 (f). On note $M(n, m, k)$ le sous-ensemble de $M(n, m)$ formé par ces chemins ayant exactement k pas qui sont, soit des pas montants, soit des paliers pointillés (rouges). Si (γ, v) est un tel chemin et si $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ est la suite croissante des γ_i tels que γ_i est un pas montant ou un palier pointillé, on définit l'*indice* de (γ, v) comme étant $\mathrm{ind}(\gamma, v) := i_1 + \cdots + i_k + v_1 + \cdots + v_n$. On note $P(n, m, k)$ le polynôme générateur de $M(n, m, k)$ par l'indice "ind", soit $P(n, m, k) := \sum q^{\mathrm{ind}(\gamma, v)} \quad ((\gamma, v) \in M(n, m, k))$. On utilise aussi la notation $[n]_q := (1 - q^n)/(1 - q)$.

(a) En posant $P(0, 0, 0) = 1$ et $P(n, m, k) = 0$ si $m < 0$, la suite des polynômes $P(n, m, k)$ satisfait la récurrence :

$$P(n, m, k) = [m+1]_q \, P(n-1, m, k) + q^n [m]_q \, P(n-1, m-1, k-1)$$

$$+ [m+1]_q\, P(n-1, m+1, k) + q^n [m]_q\, P(n-1, m, k-1).$$

[Classer les chemins de Motzkin suivant la nature de leurs derniers pas, qui peuvent être un palier continu, un pas montant, un pas descendant ou un palier pointillé.]

(b) Le but de l'exercice est de prouver que les polynômes $P(n,0,k)$ satisfont la récurrence des polynômes q-Eulériens, à savoir :

$$(*) \quad P(n,0,k) = [k+1]_q\, P(n-1,0,k) + q^k [n-k]_q\, P(n-1,0,k-1).$$

Comme $(*)$ ne s'interprète pas directement en termes de chemins de Motzkin colorés (allant de la hauteur 0 à la hauteur 0), l'idée est d'*imaginer* une identité plus générale, qui se réduit à $(*)$ pour $m=0$. En voici une :

$$(**)\ P(n,m,k) = [k+1]_q\, P(n-1,m,k) + q^k [n-k+m]_q\, P(n-1,m,k-1) + q^n [m]_q\, P(n-1,m-1,k-1).$$

Si $F(n,m,k)$ est une fonction dépendant des trois variables en nombres entiers n, m, k, on définit les opérateurs : $I\,F(n,m,k) := F(n,m,k)$, $\mathcal{K}\,F(n,m,k) := F(n,m,k+1)$, $\mathcal{M}\,F(n,m,k) := F(n,m+1,k)$, $\mathcal{N}\,F(n,m,k) := F(n+1,m,k)$. Pour $n \ge k \ge m \ge 0$, on pose :

$$\mathcal{P} := [m+1]_q\,(I+\mathcal{M}) + q^n [m]_q\, \mathcal{K}^{-1}(I+\mathcal{M}^{-1});$$

$$\mathcal{Q} := [k+1]_q\, I + q^k [n-k+m]_q\, \mathcal{K}^{-1} + q^n [m]_q\, \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}^{-1}.$$

Les récurrences de (a) et de $(**)$ se récrivent :

$$(***) \qquad (I - \mathcal{P}\mathcal{N}^{-1})\, P(n,m,k) = \delta_{n,0}\delta_{m,0}\delta_{k,0};$$

$$(\text{iv}) \qquad (I - \mathcal{Q}\mathcal{N}^{-1})\, P(n,m,k) = 0 \qquad (n \ge 1).$$

On pose : $\mathcal{R} := \mathcal{Q} - \mathcal{P}$. Alors $\mathcal{R}\,P(n,m,k) = 0$ pour $n \ge 1$.

(c) On en déduit la récurrence $(**)$ et a fortiori la récurrence $(*)$.

37. — Se reportant à l'Exercice 33, on peut définir la statistique de Denert, $\operatorname{den} w$, d'une permutation $w = x_1 x_2 \ldots x_n \in \mathfrak{S}_n$ comme étant la somme de ses *valeurs d'excédances*, augmentée de la somme des éléments de $f(w)$. Autrement dit, si $\operatorname{Exc}(w) = \{a_1 < \cdots < a_l\}$ est l'ensemble des indices k tels que $1 \le k \le n$ et $k < x_k$, si $\operatorname{Nexc}(w) = [\,n\,] \setminus \operatorname{Exc}(w) = \{b_1 < \cdots < b_{n-l}\}$ est l'ensemble complémentaire et si on note $\operatorname{inv} v$ le nombre d'inversions d'un mot v, on pose :

$$\operatorname{den} w := x_{a_1} + \cdots + x_{a_l} + \operatorname{inv}(x_{a_1} \ldots x_{a_l}) + \operatorname{inv}(x_{b_1} \ldots x_{b_{n-l}}).$$

Alors, le polynôme générateur de $\mathfrak{S}_n$ par le couple $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ est donné par :
$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} t^{\mathrm{exc}\, w} q^{\mathrm{den}\, w} = \sum_{k\geq 0} t^k\, P(n,0,k),$$
où $P(n,0,k)$ est le polynôme satisfaisant la récurrence $(*)$ de l'exercice précédent. [Utiliser l'Exercice 34 (f) et l'exercice précédent.]

38. — Soient p, t, r, d quatre variables commutatives. A chaque permutation $w = x_1x_2\ldots x_n \in \mathfrak{S}_n$, on associe sa variation $V(w)$ obtenue à partir de w en remplaçant chaque lettre x_i par p, t, r, d, suivant que x_i est un pic, un creux, une montée, une descente de w. (Par convention, $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \infty$.)

(a) Utilisant le Théorème 19.3 et la transformation de Françon-Viennot (décrite dans l'Exercice 33 (f)), on peut obtenir le développement en fraction continue de Jacobi $\mathrm{Jac}(a,b)$ de la série $1 + \sum_{n\geq 1} u^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} V(w)$.

(b) On peut obtenir aussi le développement en fraction continue de Jacobi de la fonction génératrice ordinaire des nombres sécants.

(c) On envoie la permutation alternante montante $w = x_1x_2\ldots x_{2n+1}$, d'ordre $(2n+1)$, sur $w' := (2n+2)x_1x_2\ldots x_{2n+1}$, qui est alors une permutation alternante descendante, d'ordre $(2n+2)$. Le chemin de Motzkin coloré $(\gamma(w'), e(w'))$, qui lui correspond par la transformation de Françon-Viennot (Exercice 33 (f)), ne retourne sur l'axe horizontal qu'en fin de parcours. De plus, $e_{w'}(m) \geq 1$ si $m \leq 2n+1$ et si m est un pic de w'.

(d) On envoie ensuite chaque chemin de Motzkin coloré $(\gamma(w'), e(w'))$ sur un chemin allant de 0 en 0 en $2n$ pas, en supprimant le premier pas montant et le dernier pas descendant. On peut alors appliquer le Théorème 19.3 et en déduire le développement en fraction continue de Jacobi de la fonction génératrice ordinaire des nombres tangents.

Solutions des exercices du chapitre 3.

1. Poser $F(u)=(u/(e^u-1))+(u/2)$ et vérifier que $F(-u)=F(u)$.

3. On a :

$$\begin{aligned}n!\,u(1+e^u+e^{2u}+\cdots+e^{(k-1)u})&=n!\,u\frac{1-e^{ku}}{1-e^u}\\&=n!\,\frac{u}{e^u-1}\big(e^{ku}-1\big)=n!\sum_{r\ge0}\frac{u^r}{r!}\beta_r\sum_{s\ge1}\frac{u^s}{s!}k^s.\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{P}_1(k)=k(k+1)/2$; $\mathcal{P}_2(k)=k(2k^2+3k+1)/6$; $\mathcal{P}_3(k)=(k^4+2k^3+k^2).4=(\mathcal{P}_1(k))^2$.

4. Écrire $(\mathcal{P}_n(k-1))^2$ comme somme des éléments de la matrice $\big((i\,j)^n\big)$ $(i,j=1,\dots,(k-1))$. Faire ensuite la somme de ces éléments en calculant d'abord pour chaque $l=1,2,\dots,(k-1)$, la somme $\sum_{\max\{i,j\}=l}\big((i\,j)^n\big)$. On trouve, en effet, $2l^n\mathcal{P}_n(l-1)+l^{2n}$.
Partant de la première formule de l'exercice 3 ainsi démontrée et utilisant la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin, on obtient bien la seconde formule.

5. Soient $k\ge2$ et B_1, B_2, … , B_k des ensembles quelconques, éventuellement vides, mais finis. La formule du principe d'inclusion-exclusion s'écrit :

$$|B_1\cup\cdots\cup B_k|=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k}\big|B_{i_1}\cap\cdots\cap B_{i_j}\big|.$$

Pour tout entier k, posons $F_{[\,k\,]}=\{f:[\,n\,]\to[\,k\,]\}$ et pour tout $i=1,\dots,k$, définissons B_i comme le sous-ensemble de $F_{[\,k\,]}$ formé de toutes les fonctions à valeurs dans $[\,k\,]\setminus\{i\}$. Le nombre de surjections cherchées est alors : $\big|F_{[\,k\,]}\big|-|B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k|$, qui, d'après la formule précédente vaut :

$$\begin{aligned}&\big|F_{[\,k\,]}\big|-\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k}\big|B_{i_1}\cap\cdots\cap B_{i_j}\big|\\&\quad=\big|F_{[\,k\,]}\big|-\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k}(k-j)^n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.\end{aligned}$$

6. a) Soit $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathcal{C}(n,k)$; prendre

$$f(c) = \begin{cases} (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}), & \text{si } c_k = 0\,; \\ (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k - 1), & \text{si } c_k \geq 1. \end{cases}$$

b) Si $f(c) \in \mathcal{C}(n-1, k-1)$, on a $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, 0)$, d'où $E(c) = E(1)^{c_1}E(2)^{c_2}\ldots, E(k-1)^{c_{k-1}}E(k)^0 = E(f(c))$. Si $f(c) \in \mathcal{C}(n-1, k)$, alors $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k{+}1)$, d'où $E(c) = E(1)^{c_1}E(2)^{c_2}\ldots E(k-1)^{c_{k-1}}E(k)^{c_k+1} = E(f(c))E(k)$.

c) En effet, $\mathcal{C}(n,1) = \{(n-1)\}$, d'où $t(n,1) = E(1)^{n-1}$. D'autre part, $\mathcal{C}(1,k)$ est vide pour $k \geq 2$. Enfin,

$$\begin{aligned} t(n,k) &= \sum_{f(c)\in\mathcal{C}(n-1,k-1)} E(c) + \sum_{f(c)\in\mathcal{C}(n-1,k)} E(c) \\ &= \sum_{c'\in\mathcal{C}(n-1,k-1)} E(c') + \sum_{c'\in\mathcal{C}(n-1,k)} E(k)E(c') \\ &= t(n-1,k-1) + E(k)t(n-1,k). \end{aligned}$$

d) En prenant $E = 1$ identiquement, on obtient $t(n,k) = |\mathcal{C}(n,k)|$ et la récurrence $t(n,k) = t(n-1,k-1) + t(n-1,k)$ pour $n, k \geq 2$, avec les conditions initiales $t(n,1) = 1$, $t(1,k) = 0$ pour $k \geq 2$, c'est-à-dire la récurrence des coefficients binomiaux $\binom{n-1}{k-1}$ $(n, k \geq 1)$.
En prenant $E(x) = x$ pour tout x, alors les $t(n,k)$ satisfont la récurrence des nombres de Stirling de seconde espèce et on obtient l'identité (ii), puisque $E(c) = 1^{c_1}2^{c_2}\ldots k^{c_k}$.
En prenant $E(x) = x^2$ pout tout x, les $t(n,k)$ satisfont la récurrence des $T(2n, 2k)$.

7. Partant d'une telle matrice s à trois lignes, on note $\mathrm{Cont}(s)$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{Fix}(\sigma)$ qui apparaissent sur la troisième ligne de s. De la seconde ligne de s supprimons tous les termes appartenant à $\mathrm{Cont}(s)$. Si $\mathrm{Cont}(s)$ a k éléments, on obtient une suite $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-k})$. La matrice

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m-k \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{m-k} \end{pmatrix}$$

représente alors une *injection* de $[\,m-k\,]$ dans $[\,m\,]$. Maintenant pour $i = 1, \ldots, n$, posons $v_i = j$, si t_i est le j-ième plus petit élément de $\mathrm{Cont}(t)$. Alors la matrice

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$$

est une *surjection* de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$. L'application $\sigma \mapsto (v, u)$ est naturellement bijective. Comme le nombre d'injections de $[\,m-k\,]$ sur $[\,m\,]$ est égal à $m(m-1)\dots(k+1)$, et le nombre de surjections de $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$ à $k!\,S(n,k)$, on a bien démontré l'identité sous la forme :

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} |\mathrm{Fix}(\sigma)|^n = \sum_{k\le m} \big(k!\,S(n,k)\big)\, m(m-1)\dots(k+1).$$

8. Avec les notations de l'Exercice 6, on a :

$$\begin{aligned} a^p = (1+1+\dots+1)^p &= \sum_{c\in\mathcal{C}(p+a,a)} \binom{p}{c_1, c_2, \dots, c_a} 1^{c_1}1^{c_2}\dots 1^{c_a} \\ &= \sum_{c\in\mathcal{C}(p+a,a)} \binom{p}{c_1, c_2, \dots, c_a}. \end{aligned}$$

Si $c = (0,\dots,0,p,0,\dots,0)$, alors $\binom{p}{c_1,c_2,\dots,c_a} \equiv 1 \pmod p$; si c a au moins deux termes c_i et c_j $(i<j)$ non-nuls, alors $\binom{p}{c_1,c_2,\dots,c_a} \equiv 0 \pmod p$. Il n'y a donc que a suites c qui apportent (modulo p) une contribution non-nulle et égale à 1 à la somme précédente. D'où $a^p - a \equiv 0 \pmod p$.

9. Utiliser l'expression de la fonction génératrice exponentielle des nombres factoriels centraux. [Il faut imaginer d'autres preuves, et même combinatoires !]

10. Poser $x=-1$ dans l'identité (2.2). Ainsi le nombre de surjections de $[\,n\,]$ sur des ensembles de cardinaux *pairs* est égal au nombre de surjections de $[\,n\,]$ sur des ensembles de cardinaux *impairs*, plus ou moins un.

Pour la première démonstration combinatoire, la première sommation fournit précisément $\sum_k (-1)^{n-k} k!\,S(n,k)$ $(1\le k\le n)$. Dans la seconde sommation, on vérifie que $\sum\limits_{Q\subset P} (-1)^{|Q|}$ est égal à 1 ou à 0, suivant que P est la permutation identique ou non.

Pour la seconde démonstration combinatoire, la construction d'une *involution* $f\mapsto g$ de Surj_k permettant de démontrer l'identité se fait comme suit :
Soit f une surjection de Surj_n envoyant $[\,n\,]$ sur $[\,k\,]$ $(1\le k\le n)$. On dit qu'elle est de classe (A), si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour un certain entier i $(1\le i\le k)$, il existe une seule suite $x_{i+1} < \dots < x_k$ telle que : $f(x_{i+1}) = i+1$, $f(x_{i+2}) = i+2$, … , $f(x_k) = k$;

(ii) les valeurs $(i+1)$, $(i+2)$, … , k sont prises par f une seule fois ;

(iii) si x_i est la plus petite abscisse telle que $f(x_i) = i$, alors $x_i < x_{i+1}$ et la valeur i est prise au moins deux fois.

Notons que si dans les précédentes conditions on a $i = k$, les trois conditions se réduisent à dire que k est prise au moins deux fois par f.

On dit que f est de classe (B), si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées et si la condition (iii) est remplacée par

(iv) la valeur i n'est pas prise par f sur l'intervalle $[1, x_{i+1}]$.

Si f est de classe (A), on pose :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}\,; \\ f(x)+1, & \text{si } x \in \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}. \end{cases}$$

Si f est de classe (B), on pose :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin \{x_{i+1}, \dots, x_k\}\,; \\ f(x)-1, & \text{si } x \in \{x_{i+1}, \dots, x_k\}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que l'application $f \mapsto g$ est une involution envoyant une fonction de classe (A) sur une fonction de classe (B) et réciproquement. Par construction, on a $g \in \mathrm{Surj}(n, k-1)$ ou $g \in \mathrm{Surj}(n, k+1)$, de sorte que les parités des ensembles de valeurs prises par f et par g sont différentes. Enfin, on vérifie bien que la permutation identique de $[\,n\,]$ n'appartient ni à la classe (A), ni à la classe (B). Ceci démontre bien combinatoirement l'identité cherchée.

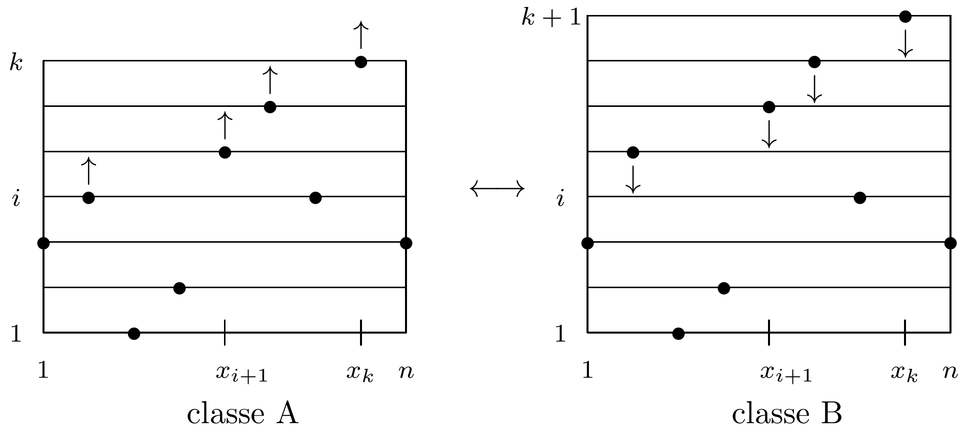


Fig. 1

11. La formule de récurrence (2.1) fournit immédiatement l'identité ${}^{n}S(x) = x({}^{(n-1)}S(x) + \dfrac{d}{dx}{}^{(n-1)}S(x))$, d'où l'on tire la relation demandée.

12. Décomposer le membre de droite de (2.9) en éléments simples et appliquer la transformation de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ se rappelant que $\mathcal{L}^{-1}((1-ju)^{-1}) = e^{ju}$.

13. Pour $2 \leq k \leq p$ et $j = 0$, la congruence est banale. Pour $k = 2$ et $j \geq 1$, elle résulte du lemme 3.1 et du triangle de Pascal. On la suppose enfin vraie pour tous les couples (j,k) tels que $j + k = l$. Comme elle est vraie aussi pour $(j,k) = (0, l+1)$, on procède par récurrence sur $j = 1, 2, \ldots, l+1$ sur les couples $(1,l)$, $(2,l-1)$, …, $(j, l+1-j)$, …, $(l-1, 2)$, en évaluant le membre de droite de :

$$\binom{p-(l+1-j)}{j} = \binom{p-(l-j)}{j} - \binom{p-(l+1-j)}{j-1}.$$

14. a) Si l'on avait $\tau(j) = \tau(j')$ pour $0 \leq j < j' \leq n-1$, on aurait $\sigma(j+1) = \sigma(j'+1)$, ce qui contredirait le fait que σ est une permutation. En effet, $\delta^k\sigma(j) = \delta(\delta^{k-1}\sigma)(j) \equiv \delta^{k-1}\sigma(j+1) - 1 = \delta(\delta^{k-2}\sigma)(j+1) \equiv \delta^{k-2}\sigma(j+2) - 2 \equiv \cdots \equiv \sigma(j+k) - k$.

b) On a $\tau^k(j) = \sigma^k(j+1) - 1$ pour $k = 0$, trivialement, et pour $k = 1$, par définition de τ. Par récurrence sur k, on peut écrire, en utilisant successivement la définition de τ, puis l'hypothèse de récurrence : $\tau^{k+1}(j) = \tau(\tau^k(j)) \equiv \sigma(\tau^k(j)+1) - 1 \equiv \sigma(\sigma^k(j+1)) - 1 \equiv \sigma^{k+1}(j+1) - 1$. Si donc tous les éléments $\sigma(0)$, $\sigma^2(0)$, … , $\sigma^{n-1}(0)$ sont distincts, les éléments $\tau(0)$, $\tau^2(0)$, … , $\tau^{n-1}(0)$ le sont aussi. Ainsi la permutation τ est circulaire, quand σ l'est. Les deux questions a) et b) deviennent banales, si l'on écrit τ comme le produit $\rho^{-1}\sigma\rho$, où ρ est la permutation qui envoie j sur $(j+1)$ modulo n.

c) D'après a), on a $\delta^k\sigma(j) \equiv \sigma(j)$, si et seulement si $\sigma(j+k) \equiv \sigma(j)+k$. Comme $n = p$ est un nombre premier, à tout nombre l tel que $1 \leq l \leq p-1$, correspond un nombre unique a tel que $1 \leq a \leq p-1$ et $l \equiv ak \pmod p$. On en tire : $\sigma(l) = \sigma((a-1)k + k) \equiv \sigma((a-1)k) + k \equiv \sigma((a-2)k + k) + k \equiv \sigma((a-2)k) + 2k \equiv \cdots \equiv \sigma(0) + ak \equiv \sigma(0) + l \pmod p$. Réciproquement, si $\sigma(l) \equiv \sigma(0) + l \pmod p$ $(l = 1, 2, \ldots, p-1)$, alors $\sigma(l) \equiv (\sigma(0)+l-1)+1 \equiv \sigma(l-1)+1$ et donc $\sigma(l+1) \equiv \sigma(l) + 1$ $(l = 1, 2, \ldots, p-1)$, soit $\delta\sigma = \sigma$.

d) D'après la question précédente, les permutations de la forme $(\star)$ sont toutes circulaires, à l'exclusion de la permutation correspondant à $m = 0$, qui est l'application identique. Elles forment chacune une orbite réduite à un seul élément. Si σ n'est pas une permutation de ce type, toutes les permutations σ, $\delta\sigma$, $\sigma^2\sigma$, … , $\delta^{p-1}\sigma$ sont distinctes et $\delta^p\sigma = \sigma$. L'orbite $O(\sigma)$ contenant σ est donc de cardinal p. On en déduit que $C_{[0,n-1]}$ peut s'écrire comme la réunion de l'ensemble des permutations circulaires ($\star$) (au nombre de $(p-1)$) et d'orbites $O(\sigma)$ de cardinal p. L'identité de Wilson en découle.

e) Pour tout $j = 0, 1, \ldots, n-1$, posons $v_j = (\sigma(j) - j + 1)_+$ et $w_j = (\delta\sigma(j) - j + 1)_+$. Supposant $\sigma(k) = 0$, les suites des $\delta\sigma(j)$ et des w_j sont données par $(\sigma(1) - 1, \sigma(2) - 1, \ldots, \sigma(k-1) - 1, n - 1, \sigma(k+1) - 1, \sigma(k+2) - 1, \ldots, \sigma(n-1) - 1, \sigma(0) - 1)$ et par $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, n-k+1, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{n-1}, 0)$. Comme $v_0 \geq 1$, on en déduit que les suites des v_j et des w_j ont le même nombre de termes positifs. D'où $\mathrm{exc}_0\, \delta\sigma = \mathrm{exc}_0 \sigma$.

Posons $v'_j = (\sigma(j) - j)_+$. Si σ est circulaire, le nombre des v_j *positifs* est égal au nombre des v'_j positifs. Comme ce dernier nombre est précisément le nombre d'excédances (strictes) de σ, on en déduit bien le résultat requis.

f) La propriété résulte de c) et e).

15. a) L'identité est vraie pour $n = 1, 2$ et se vérifie par récurrence.

b) L'expression de ${}^n s(x)$ s'obtient immédiatement à partir de la relation de récurrence des $s(n, k)$.

c) La relation de récurrence des $c(n, k)$ est donc : $c(n, 0) = c(0, k) = 0$, sauf $c(0, 0) = 1$ et $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$ pour $n, k \geq 1$, puisque $\operatorname{sgn} s(n, k) = (-1)^{n+k}$. Or une permutation d'ordre n, produit de k cycles disjoints, ou bien, possède le point fixe (n) (par récurrence, il y a $c(n-1, k-1)$ telles permutations), ou bien, ne le possède pas. Dans ce dernier cas, le retrait de n de sa décomposition en cycles fournit une permutation π d'ordre $(n-1)$ ayant k cycles. Il est de plus clair qu'il y a exactement $(n-1)$ permutations d'ordre n qui sont envoyées sur une telle permutation π par ce retrait.

16. (i) En utilisant les notations classiques sur les polynômes symétriques : $F_2(x, y, z) = xy + xz + yz = \sum xy$; $F_3(x, y, z) = \sum xy + \sum x^2 y + 2xyz$.

Le polynôme est évidemment symétrique en x, y. Il suffit donc de vérifier l'identité : $F_n(x, z, y) - F_n(x, y, z) = 0$. Une récurrence itérée suffit.

(ii) On sait que $G_{2n+2} = L_n(1)$, où $(L_n(z))$ est la suite des polynômes définis par : $L_1(z) = z^2$ et $L_n(z) = z^2(L_{n-1}(z+1) - L_{n-1}(z))$ $(n \geq 2)$. On vérifie alors que : $z^2 F_n(1, 1, z) = L_n(z)$.

(iii) Rien d'autre que : $F_1(x, y, z) = 1$.

(iv) C'est la traduction de la relation de récurrence des $F_n(x, y, z)$ en les coefficients $a_{n,i,j,k}$.

17. i) On a :

f	I	J	K	f	I	J	K	f	I	J	K
224466	3	3	1	246466	3	2	2	264666	2	1	3
244466	3	2	1	264466	2	2	2	266466	2	2	3
424466	2	3	1	424666	2	2	2	426666	2	2	3
224666	3	2	2	426466	2	3	2	624666	1	2	3
226466	2	3	2	624466	1	3	2	626466	1	3	3
244666	3	1	2	246666	3	1	3				

où $f = 224466$ signifie $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

(ii) La bijection a été déjà décrite dans le paragraphe 9 (*cf.* Proposition 9.2). Donnons une description fonctionnelle : d'abord, $g(x) = \min(2n-2, f(x))$; désignons ensuite par $(t_1 < \cdots < t_l = 2n-3)$ la suite des points maximaux de g et posons $t_{l+1} = 2n-2$. La suite $(s_1 < \cdots < s_{k-1})$ des points maximaux de f inférieurs ou égaux à $2n-2$ est alors *strictement* contenue dans $(t_1, \ldots, t_l, t_{l+1})$, d'où $k-1 < l-1$. Comme g est surjective, on a : $(l+1)+(n-2) \leq 2n-2$, et donc $l \leq n-1$. La suite $(c_1, \ldots, c_{k-1})$ est simplement définie par : $s_i = t_{c_i}$ $(1 \leq i \leq k-1)$. Notons que, si $k = 1$, la suite des c est vide. Il est facile de vérifier que Φ est bien bijective et de construire la bijection inverse.

Exemple.

$$\begin{array}{rcccccccc} x = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ f(x) = & 6 & 2 & 4 & 8 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ g(x) = & 6 & 2 & 4 & 6 & 6 & 6 & & \\ & t_1 & & & t_2 & t_3 & t_4 & & \\ & & & & s_1 & & s_2 & & \end{array}$$

D'où $l = 3$, $k = 3$ et $(c_1, c_2) = (2, 4)$.

(iii) Les relations pour J sont faciles à vérifier. Donnons la démonstration pour les relations sur le nombre I de points saillants. D'abord, f et g ont les mêmes points saillants de valeur inférieure ou égale à $(2n-4)$. En outre, f a un point saillant de valeur $2n$, à savoir $(s_1, f(s_1))$, mais non g. Enfin, g a un point saillant de valeur $(2n-2)$, à savoir $(t_1, g(t_1))$. Si $c_1 > 1$, on a aussi $f(t_1) = 2n-2$ et il est clair que $(t_1, f(t_1))$ est un point saillant de f. D'où $I(g) = I(f) - 1$. Si $c_1 = 1$, alors $f(t_1) = 2n$ et f ne peut avoir de point saillant de valeur $(2n-2)$. D'où $I(f) = I(g)$.

(iv) D'abord $|SE_{1,1,1,1}| = a_{1,1,1,1} = 1$. D'après (iii), l'ensemble $SE_{n,i,j,k}$, pour $n \geq 2$, est envoyé bijectivement par Φ sur l'ensemble des couples $((c_1, \ldots, c_{k-1}), g)$, où l'on a, ou bien $1 < c_1 \leq c_{k-1} < l+1$ et $g \in SE_{n-1,i-1,j-1,l}$, ou bien $1 < c_1 \leq c_{k-1} = l+1$ et $g \in SE_{n-1,i-1,j,l}$, ou bien $1 = c_1 \leq c_{k-1} < l+1$ et $g \in SE_{n-1,i,j-1,l}$, ou bien encore

$1 = c_1 \le c_{k-1} = l+1$ et $g \in SE_{n-1,i,j,l}$, l'entier l variant dans l'intervalle $[k-1, n-1]$. Les nombres $|SE_{n,i,j,k}|$ satisfont donc bien la récurrence des $a_{n,i,j,k}$.

18. L'application $c = (c_1, \dots, c_{k-1}) \mapsto c' = (c'_1, \dots, c'_{k-1})$, où $c'_i = l+2-c_{k-i}$ $(1 \le i \le k-1)$ est une involution de $\binom{[l+1]}{k-1}$. Il suffit alors de considérer la suite :

$$f \overset{\Phi}{\longmapsto} ((c_1, \dots, c_{k-1}), g) \longmapsto ((c'_1, \dots, c'_{k-1}), g') \overset{\Phi^{-1}}{\longmapsto} f',$$

où l'on définit par récurrence : $g \mapsto g'$.

19.

$I\ J\ K$	$x =$	1 2 3 4 5 6 7 8	$c_1, \dots, c_{k-1}$	$l+1$
3 2 3	$f(x) =$	4 2 6 8 6 8 8 8		
2 2 3	$g(x) =$	4 2 6 6 6 6	2, 4	4
1 2 2		4 2 4 4	2, 3	3
1 2 2		2 2	1	2
			$c'_1, \dots, c'_{k-1}$	
1 1 1		2 2	2	2
2 1 2		2 4 4 4	1, 2	3
2 2 3		2 6 6 4 6 6	1, 3	4
2 3 3	$f'(x) =$	2 8 6 4 8 6 8 8		

20. D'après la proposition 5.1 du chap. 1, l'identité de Riordan-Stein se récrit :

$$G_{2n+2} = \sum (-1)^{|\mathrm{pr}_y(Q_1)|} 1^{|P_1|} 1^{|P_2|},$$

où la somme porte sur tous les quadruplets (Q_1, Q_2, P_1, P_2), tels que Q_1 et Q_2 soient des quasi-permutations supra-diagonales, puis P_1 et P_2 des permutations de $[\,n]$, enfin $Q_i \subset P_i$ $(i = 1, 2)$ et $\mathrm{pr}_y(Q_1) = \mathrm{pr}_y(Q_2)$. Notons E_i l'ensemble des couples $(x, P_i(x))$ tels que $x < P_i(x)$ $(i = 1, 2)$ et fixons-nous le couple (P_1, P_2). Si $\left|\mathrm{pr}_y(E_1) \cap \mathrm{pr}_y(E_2)\right| = p$, la somme $\sum (-1)^{|\mathrm{pr}_y(Q_1)|}$ étendue à tous les couples (Q_1, Q_2) vaut $\sum (-1)^k \binom{p}{k}$ $(0 \le k \le p)$. Elle est donc nulle si $p \ne 0$ et vaut 1 si $p = 0$. Par conséquent

$$G_{2n+2} = \sum 1^{|P_1|} 1^{|P_2|},$$

la somme étant étendue à tous les couples (P_1, P_2) tels que $\mathrm{pr}_y(E_1) \cap \mathrm{pr}_y(E_2) = \emptyset$.

21. a) Le seul escalier gauche possible d'ordre 2 est $(1, 1)$; le résultat est donc vrai pour $n = 1$. Pour $n \ge 2$, on décompose l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des escaliers gauches en deux sous-classes $\mathcal{E}_n^1$ et $\mathcal{E}_n^2$ distinctes : on pose $E \in \mathcal{E}_n^1$, si $E_{2n-2} = 2$ et $E \in \mathcal{E}_n^2$, si $E_{2n-2} = 1$. Les diagrammes des Fig. 2 et 3 donnent la clé de la démonstration.

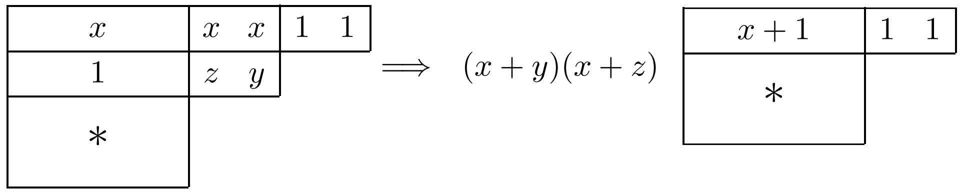


Fig. 2

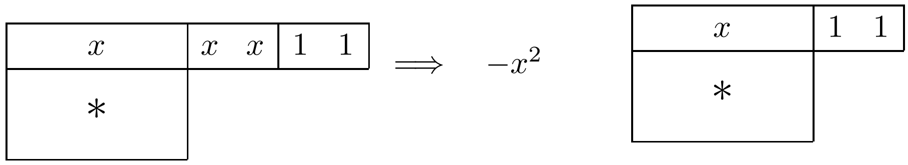


Fig. 3

La Fig. 2, par exemple, montre que tout escalier gauche E d'ordre $2n$ tel que $E_{2n-2} = 2$ est envoyé sur un escalier gauche E' d'ordre $(2n-2)$ donné par $E' = (E_1 - 1, E_2 - 1, \cdots, E_{2n-5} - 1, E_{2n-4} - 1, E_{2n-1}, E_{2n})$. De plus, l'application $E \mapsto E'$ est une bijection de $\mathcal{E}'_n$ sur $\mathcal{E}_{n-1}$. En imposant la valeur $(x+1, x+1, \cdots, x+1, x+1, 1, 1)$ à la première ligne de E' et $(1, 1, \cdots, 1, 1, z, y)$ aux autres lignes, on obtient une nouvelle évaluation V' pour E', d'où une évaluation $V'_{E'}(g)$ pour toute application g sur $\mathcal{F}_{E'}$. Comme $(-1)^{n-1-(E_1-1)} = (-1)^{n-E_1}$, on a bien $V_E(f) = (x+y)(x+z)V'_{E'}(g)$. D'où

$$\begin{aligned}\sum_{E \in \mathcal{E}'_n} \sum_{f \in \mathcal{F}_E} V_E(f) &= (x+y)(x+z) \sum_{E' \in \mathcal{E}_{n-1}} \sum_{g \in \mathcal{F}_{E'}} V'_{E'}(g) \\ &= (x+y)(x+z)F_{n-1}(x+1, y, z).\end{aligned}$$

b) Un escalier gauche E d'ordre $2n$ peut se décomposer en deux parties E^b et E^h : on prend pour E^b le plus grand escalier ordinaire pair dans le coin inférieur gauche de E. Autrement dit, ou bien $E_2 = E_3$ et $E^b = \emptyset$, ou bien, dans le cas contraire, $E^b = (E_1, E_2, \cdots, E_{2m})$, où m est le plus petit entier satisfaisant $1 \le m \le n-1$ et $E_{2m+2} = E_{2m+3}$. Naturellement, E^h est la partie haute restante : $E^h = E \setminus E^b$.

On décompose alors l'ensemble des couples (E, f), où E est un escalier gauche d'ordre $2n$ et f un élément de $\mathcal{F}_E$ en trois classes $\mathcal{F}^1_n$, $\mathcal{F}^2_n$ et $\mathcal{F}^0_n$. Dans la première, on range tous les couples (E, f) tels que $E^h \neq \emptyset$ et f est surjective sur E^b ; dans la seconde, ceux des couples où f n'est pas surjective sur E^b ; et dans la troisième, E est

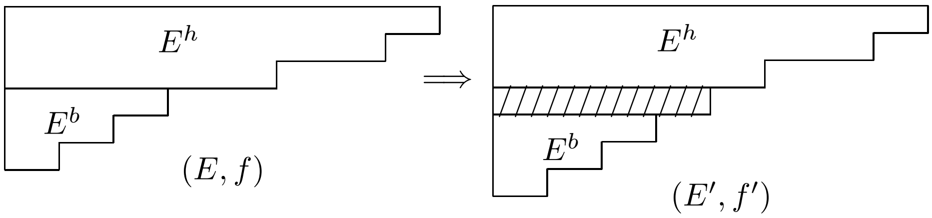


Fig. 4

l'escalier ordinaire pair et f une application appartenant à $\mathcal{F}_{\bar{E}_n}$. On définit une bijection de $\mathcal{F}_n^1$ sur $\mathcal{F}_n^2$, comme indiqué dans la Fig. 4

L'escalier gauche E' est obtenu en incluant une ligne vide dont la longueur est égale à l'ordre de E^b plus 2 entre E^b et E^h. On obtient bien encore un escalier gauche d'ordre $2n$, puisque la longueur de la dernière ligne de E^h surpasse au moins de quatre unités la longueur de la première ligne de E^b. De la même façon, on obtient le graphe de l'application f' en incluant une ligne vide dans le graphe de f. De plus, $(E')^b$ contient strictement E^b et donc (au moins) une ligne vide. L'application f' n'est donc pas surjective sur $(E')^b$, de sorte que le nouveau couple (E', f') appartient à $\mathcal{F}_n^2$.

On passe, réciproquement, de (E', f') à (E, f) par une définition évidente. On a enfin $V(E'; f') = -V(E; f)$, puisque E' a une ligne de plus que E. D'après a), on a

$$F_n(x, y, z) = \sum_{E \in \mathcal{E}_n} \sum_{f \in \mathcal{F}_E} V_E(f) = \sum_{f \in \mathcal{S}_{\bar{E}_n}} V_{\bar{E}_n}(f).$$

c) Banal à vérifier.

d) Par exemple, le codage de l'application $f = 42686888$ est la suite $\mathbf{d} = (10, 011, 0101)$. Le codage est construit de la façon suivante :

(1) On dessine le graphe de l'application f dans un escalier pair en mettant des lettres 0 sur les points $(i, f(i))$.

(2) On ajoute, ensuite, des lettres 1 de sorte que chaque colonne lue de haut en bas contienne une suite maximale de la forme $011\ldots1$.

(3) Enfin, on lit les nombres écrits, ligne par ligne, de bas en haut et de gauche à droite. Pour $1 \le i \le n-1$, d_i correspond à la ligne de hauteur i. (Voir Fig. 5.)

e) Définissons une involution $m \mapsto \mathbf{m}$ sur $\{0,1\}^*$ de la façon suivante : si $|m| = 2$, on pose $\mathbf{m} = m$; sinon, m peut s'écrire sous la forme $m = \alpha m' \beta \gamma$ où $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1, m' \in \{0,1\}^*$; on pose alors $\mathbf{m} = \beta m' \alpha \gamma$. Remarquons que cette involution ne change pas la

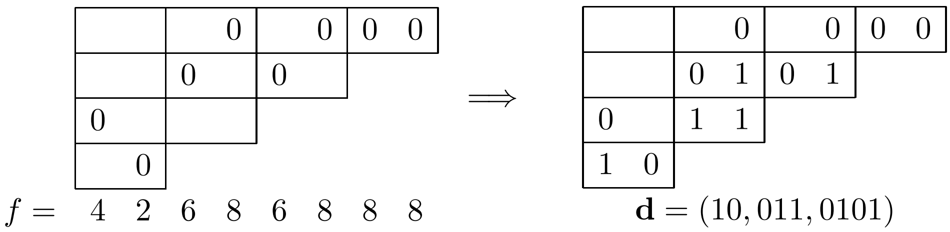


Fig. 5

longueur et le nombre d'occurrences de 1. Cette définition peut être prolongée à tout l'ensemble $\mathcal{D}_n$ d'une façon naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n & \longrightarrow & \mathcal{D}_n \\ \mathbf{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}) & \longmapsto & \hat{\mathbf{d}} = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \cdots, \hat{d}_{n-1}) \end{array}$$

Soient $f \in \mathcal{F}_{\bar{E}_n}$ et $\mathbf{d} \in \mathcal{D}_n$ le codage de f. Par l'involution précédente, on obtient une autre suite $\hat{\mathbf{d}}$; l'application $\hat{f}$ vient alors du codage $\hat{\mathbf{d}}$. D'après d), on peut vérifier que les quatre relations pour les statistiques sont satisfaites.

22. a) Le résultat découle de la définition-même de la x-factorisation. Le mot w_2 (resp. w_4) est vide si et seulement si la lettre précédant (resp. suivant) x dans w (si elle existe) est plus petite que x.

b) Les trois propriétés (i)–(iii) résultent de a). Soient (w_1, w_2, y, w_4, w_5) et $(w'_1, w'_2, y, w'_4, w'_5)$ les y-factorisations de w et $w' := \varphi_x(w)$, respectivement. Pour prouver (iv), il suffit de vérifier que w'_2 (resp. w'_4) est un réarrangement de w_2 (resp. w_4). Notons $C(w_2, w_4)$ (resp. $C(w'_2, w'_4)$) l'ensemble des couples (z_2, z_4) tels que z_2 est une lettre de w_2 (resp. de w'_2) et z_4 une lettre de w_4 (resp. de w'_4). Par définition de la fonction μ (donnée après (15.1)), l'ensemble $C(w_2, w_4)$ (resp. $C(w'_2, w'_4)$) est composé des couples (z_2, z_4) tels que y, z_2, z_4 sont distincts, avec $w(z_2, z_4)$ et $\mu_w(z_2, z_4) = y$ (resp. avec $w'(z_2, z_4)$ et $\mu_{w'}(z_2, z_4) = y$). Comme $y \neq x$ et $\mu_{w'} = \mu_w$, on déduit de (15.2) l'implication : $w(z_2, z_4)$ & $\mu_w(z_2, z_4) = y \Rightarrow w'(z_2, z_4)$ & $\mu_{w'}(z_2, z_4) = y$, soit $C(w_2, w_4) \subset C(w'_2, w'_4)$. Comme $w = \varphi_x \varphi_x(w)$, on a aussi l'inclusion inverse et donc $C(w_2, w_4) = C(w'_2, w'_4)$.

c) D'après b), les permutations dans une même orbite Θ de G_n ont les mêmes pics, disons $x_1, \ldots, x_k$, les mêmes creux, disons $x_{k+1}, \ldots, x_{2k-1}$ (il y a toujours un creux de moins), les autres entiers $x_{2k}, \ldots, x_n$ pouvant être soit des descentes, soit des montées. Appelons-les des *descentes-montées*. D'après la Proposition 16.2, on a : $\{\mu_w\} = \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ et si $w_0 \in \Theta$, alors Θ est constituée des 2^{n-k} permutations $\varphi_X(w_0)$ telles que $X \subset \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Considérons la somme formelle $\sum_{w\in\Theta} w$ de l'algèbre du groupe $\mathfrak{S}_n$ et le produit $(1+\varphi_{x_{k+1}})\cdots(1+\varphi_{x_n})$ de l'algèbre du groupe G_n. Alors $\sum_{w\in\Theta} w = (1+\varphi_{x_{k+1}})\cdots(1+\varphi_{x_n})(w_0)$. En prolongeant la définition de V à l'algèbre du groupe, on peut écrire : $\sum_{w\in\Theta} V(w) = V\sum_{w\in\Theta} w = V(1+\varphi_{x_{k+1}})\cdots(1+\varphi_{x_n})(w_0) = V_{x_1}\cdots V_{x_n}(1+\varphi_{x_{k+1}})\cdots(1+\varphi_{x_n})(w_0) = V_{x_1}(w_0)\cdots V_{x_k}(w_0)\,(V_{x_{k+1}}(1+\varphi_{x_{k+1}})(w_0))\cdots(1+\varphi_{x_n})(w_0)) = X_p^k(X_f+X_s)^{k-1}(X_d+X_r)^{n-2k+1}$.

d) La variation d'une permutation s'écrit : $V(w) = X_p^{p(w)}X_f^{f(w)}X_s^{s(w)}X_d^{d(w)}X_r^{r(w)}$. En faisant les substitutions $X_p \leftarrow 1$, $X_f \leftarrow X$, $X_s \leftarrow (1-X)$, $X_d \leftarrow Y$, $X_r \leftarrow (1-Y)$ dans l'identité de c), on obtient $\sum_{w\in\Theta} V(w) = 1$; sommant ensuite sur toutes les orbites de G_n et faisant usage du Théorème 16.3, on obtient bien D_n.

23. a) A l'aide de la relation $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ dans la seconde identité, on voit que celle-ci est la somme de deux fois la première. Il suffit donc d'établir la seconde. Posons $s := X_d + X_r$, $t := X_p$ et $u := X_f + X_s$. Pour $0 \le i \le n$ et $n \ge 1$, notons $\mathfrak{S}_{n+1,i}$ l'ensemble des permutations d'ordre $(n+1)$ telles que 1 apparaît en $(i+1)^{\text{ième}}$ position. Pour $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$, posons aussi $V'(w) := V(w)/V_1(w)$. Alors $V(\mathfrak{S}_{n+1,i}) + V(\mathfrak{S}_{n+1,n-i}) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1,i}}(V(w) + V(\varphi_1(w)) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1,i}} V(1+\varphi_1)(w) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1,i}} V_1(1+\varphi_1)(w)\,V'(w)$. Or,

$$V_1(1+\varphi_1)(w) = \begin{cases} X_d + X_s = s, & \text{si } i = 0 \text{ ou } n\,; \\ X_f + X_s = u, & \text{si } 1 \le i \le n-1. \end{cases}$$

D'où l'on tire $2\,V(\mathfrak{S}_{n+1}) = \sum_{0\le i\le n}(V(\mathfrak{S}_{n+1,i}) + V(\mathfrak{S}_{n+1,n-i})) = sV'(\mathfrak{S}_{n+1,0}) + sV'(\mathfrak{S}_{n+1,n}) + u\sum_{1\le i\le n-1} V'(\mathfrak{S}_{n+1,i})$. Maintenant $V'(\mathfrak{S}_{n+1,0}) = V'(\mathfrak{S}_{n+1,n}) = P_n$. D'autre part, quand $1 \le i \le n-1$ et $w = x_1x_2\ldots x_{n+1} \in \mathfrak{S}_{n+1,i}$, posons $w' := x_1\ldots x_i$, $w'' := x_{i+2}\ldots x_{n+1}$. Comme $x_{i+1} = 1$, on a $V'(w) = \prod\limits_{1\le j\le i} V_{x_j}(w') \times \prod\limits_{i+2\le j\le n+1} V_{x_j}(w'')$. Soit I un sous-ensemble de $\{2,\ldots,n+1\}$, de cardinal i. Alors la somme $\sum V'(w)$, sur tous les $w \in \mathfrak{S}_{n+1,i}$ dont le facteur gauche w' a toutes ses lettres dans I, est égale à P_iP_{n-i}. D'où $V'(\mathfrak{S}_{n+1,i}) = \binom{n}{i}P_iP_{n-i}$. Par suite $2V'(\mathfrak{S}_{n+1}) = 2sP_n + \sum\limits_{1\le i\le n-1}\binom{n}{i}P_iuP_{n-i}$, qui est l'identité à prouver.

b) Par récurrence, on peut vérifier que les polynômes P_n $(n \ge 1)$ sont divisibles par X_p. Posons $P_n := X_p\,Q_n$ $(n \ge 1)$. La première identité de a) peut se récrire :

$$Q_{n+1} = (X_f + X_s)P_{n-1} + \sum_{1\le j\le n-2}\binom{n-1}{j}(X_f+X_s)Q_{j+1}P_{n-1-j} + \binom{n-1}{n-1}(X_r + X_d)Q_n,$$

une identité, qui, d'après le Théorème 13.1 du chap. 1, peut se récrire

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{u^n}{n!}Q_{n+1}=\exp((X_r+X_d)u+\sum_{n\geq 2}\frac{u^n}{n!}(X_f+X_s)P_{n-1}),$$

d'où l'on déduit l'identité à prouver par multiplication par X_p.

c) 1 ; $1,2$; $1,2,3$, $2,1,3$; $1,2,3,4$, $1,3,2,4$, $2,3,1,4$; $2,1,3,4$; $3,1,2,4$; $1,2,3,4,5$; $1,2,4,3,5$; $1,3,4,2,5$; $2,3,4,1,5$; $1,3,2,4,5$; $1,4,2,3,5$; $3,4,1,2,5$; $2,4,1,3,5$; $2,3,1,4,5$; $2,1,3,4,5$; $4,1,2,3,5$; $3,1,2,4,5$; $2,1,4,3,5$; $3,2,4,1,5$; $4,1,3,2,5$; $3,1,2,4,5$.

d) 1 ; $1,2$; $1,2,3$; $3,1,2$; $1,2,3,4$; $1,4,2,3$; $3,4,1,2$; $4,1,2,3$; $3,1,2,4$; $1,2,3,4,5$; $1,2,5,3,4$; $1,4,5,2,3$; $3,4,5,1,2$; $1,5,2,3,4$; $1,4,2,3,5$; $3,4,1,2,5$; $4,5,1,2,3$; $3,5,1,2,4$; $5,1,2,3,4$; $4,1,2,3,5$; $3,1,2,4,5$; $5,1,4,2,3$; $5,3,4,1,2$; $4,1,5,2,3$; $3,1,5,2,4$.

e) La génération des permutations de seconde espèce par insertion avant chaque montée ou après chaque pic est évidente. Soit $A_{n,k}$ l'ensemble des permutations d'André d'ordre n, de seconde espèce, ayant k pics. Alors l'ensemble $A_{n+1,k}$ s'obtient à partir de $A_{n,k}$ après insertion de $(n+1)$ après l'un des k pics et à partir de $A_{n,k-1}$ après insertion de $(n+1)$ avant l'une des $n-(k-1)-(k-2)=n+3-2k$ montées. Ce qui établit la récurrence. Noter que $\sum_k d_{n,k}=D_n$ d'après le Théorème 16.3.

f) La récurrence des $c_{n,k}$ s'obtient directement de celle des $d_{n,k}$. Maintenant $c_{2k-1,k}$ est le nombre de permutations d'ordre $(2k-1)$ ayant k pics et donc aussi $(k-1)$ creux. Ces permutations ont été appelées *permutations alternantes décroissantes* dans le paragraphe 13. D'après le Théorème 13.1, leur nombre est égal à D_{2k-1}.

g) La récurrence des $t_{n,k}$ est aussi banale à établir. Ensuite, $t_{2k-1,k}=2^{k-1}d_{2k-1,k}=c_{2k-1,k}=D_{2k-1}$, d'après e). Maintenant, $t_{2k-2,k-1}$ est le nombre de permutations d'ordre $(2k-2)$ ayant $(k-1)$ pics et $(k-2)$ creux, plus une montée ou une descente. Pour obtenir une telle permutation, on part d'une permutation alternante σ, descendante (donc satisfaisant $(\sigma(1)>\sigma(2))$, d'ordre $(2k-1)$ et on retire $(2k-1)$ du mot $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(2k-1)$. Soit $\sigma\mapsto\sigma'$ l'application ainsi définie. Si $\sigma(1)=2k-1$, alors σ' est une permutation alternante d'ordre $(2k-2)$, montante, donc satisfaisant $\sigma'(1)<\sigma'(2)$. Elle contient donc $(k-1)$ pics, $(k-2)$ creux et une montée. Si $\sigma(2k-1)=2k-1$, alors σ' est alternante descendante, donc satisfait $\sigma'(1)>\sigma'(2)$. Elle contient $(k-1)$ pics, $(k-2)$ creux et une descente. Enfin, si $\sigma(2i+1)=2k-1$ avec $1\leq i\leq k-2$, alors σ' contient $(k-1)$ pics, $(k-2)$ creux et une descente (resp. et une montée), suivant que $\sigma(2i) > \sigma(2i+2)$ ou $\sigma(2i) < \sigma(2i+2)$. Réciproquement, si on part d'une permutation σ', d'ordre $(2k-2)$, ayant $(k-1)$ pics, $(k-2)$ creux et une descente (resp. et une montée), on insère $(n+1)$ *après* (resp. *avant*) l'unique descente (resp. montée), pour obtenir une permutation alternante descendante, d'ordre $(2k-1)$. D'où $t_{2k-2,k-1} = D_{2k-1}$.

24. Dans les notations de l'Exercice 23, on retrouve $(-1)\,A_{2n-1}(-1) = c_{2n-1,n}\,(-1)^n$ et on a remarqué que $c_{2n-1,n}$ était le nombre de permutations alternantes décroissantes d'ordre $(2n-1)$, qui vaut D_{2n-1}. En utilisant les identités indiquées, on obtient : $\sum\limits_{n\ge 0} B_n(t)(u^n/n!) = \exp \sum\limits_{n\ge 2} t\,A_{n-1}(t)(u^n/n!) = e^u \sum\limits_{n\ge 0} A_n(t)(u^n/n!) = e^u(1-t)/(-t+\exp(u(t-1))) = (1-t)/(-te^u+e^{ut}))$. D'où $\sum\limits_{n\ge 0} B_n(-1)(u^n/n!) = 2/(e^u+e^{-u}) = \sec(iu) = \sum\limits_{n\ge 0} D_{2n}\,(-1)^n(u^{2n}/(2n)!)$. Les identités en résultent en identifiant terme à terme.

25. On considère la chaîne : $\sigma \mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_2 \mapsto \sigma_3$, où l'on définit $\sigma_1(1)\ldots\sigma_1(n-1)\sigma_1(n) := \sigma(2)\ldots\sigma(n)\sigma(1)$, puis $\sigma_2 := \check{\sigma}_1$ (la transformation fondamentale, *cf.* § 10.1), et enfin $\sigma_3 := \mathbf{r}\,\sigma_2$ (l'image-miroir, *cf.* § 10.3). Le caractère injectif de $\sigma \mapsto \sigma_3$ est évident. Reste à vérifier que cette application envoie bien $\mathcal{D}_n$ sur $\mathcal{G}_n$ et que l'on a : $\operatorname{exc}\sigma = \operatorname{rise}\sigma_3$.

26. On utilise : $(\sec u + \operatorname{tg} u)(\sec u - \operatorname{tg} u) = 1$ pour (a) ; $(1 - \operatorname{tg}(u/2))(\sec u + \operatorname{tg} u) = 1 + \operatorname{tg} u/2$ pour (b) et (c) ; $\operatorname{tg} u \cdot \cos u = \sin u$ et $\sec u \cdot \cos u = 1$ pour (d) et (e).

27. (a) On a : $\displaystyle\sum_{\substack{S,R\\ S\subset R,\, R\subset T}} (-1)^{|T|-|R|} f(S) = \sum_{S\subset T} f(S) \sum_{S\subset R\subset T} (-1)^{|T|-|R|} = \sum_{S\subset T} (-1)^{|T|-|S|} f(S) \sum_{R'\subset T\setminus S} (-1)^{|R'|} = \sum_{S\subset T} (-1)^{|T|-|S|} f(S)(1-1)^{|T\setminus S|} = f(T)$.

(b) Soit $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_{k+1})$ une partition ordonnée de $[\,n\,]$ en blocs non-vides. Si $B_i = \{b_1 < \cdots < b_j\}$ est un tel bloc, on note $\overline{B}_i$ le mot croissant $b_1 \ldots b_j$ et σ_π le produit de juxtaposition (qui est donc une permutation d'ordre n) $\sigma_\pi := \overline{B}_1\overline{B}_2\ldots\overline{B}_{k+1}$. Comme les descentes de σ_π ne peuvent se produire qu'entre deux blocs successifs B_i et B_{i+1}, on a : $\mathrm{DES}\,\sigma \subset S(\pi)$. Par conséquent, pour tout $R \subset [n-1]$, l'application $\pi \mapsto \sigma_\pi$ est une bijection de l'ensemble $\{\pi : S(\pi) = R\}$ sur l'ensemble $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{DES}(\sigma) \subset R\}$.

(c) D'après (a), (b), on a : $f(T) = \sum_{S\subset R,\, R\subset T} (-1)^{|T|-|R|}\,|\{\mathrm{DES}(\sigma) = S\}| = \sum_{R\subset T} (-1)^{|T|-|R|}\,|\{\mathrm{DES}(\sigma) \subset R\}| = \sum_{R\subset T} (-1)^{|T|-|R|}\,|\{\pi : S(\pi) = R\}|$.
Or, tout sous-ensemble $R \subset T$ est ou vide, ou de la forme $\{\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \ldots, \nu_1 + \cdots + \nu_k\}$ avec $1 \le k \le m$, ν_1 impair, $\nu_2, \ldots, \nu_k$ pairs et $\nu_{k+1} := 2m-(\nu_1+\cdots+\nu_k) \ge 1$. Par ailleurs, le nombre de partitions ordonnées π telles que $S(\pi) = R$ est égal au coefficient multinomial $\binom{2m}{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}}$. On a donc $D_{2m} = f(T) = \sum_{R\subset T} (-1)^{|T|-|R|}\,|\{\pi : S(\pi) = R\}| = (-1)^m + \sum_{1\le k\le m} (-1)^{m+k} \sum_{\nu} \binom{2m}{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}}$.

(d) En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{m\ge 0} D_{2m}\frac{u^{2m}}{(2m)!} &= 1 + \sum_{m\ge 1}(-1)^m \frac{u^{2m}}{(2m)!}\Big(1 + \sum_{1\le k\le m}(-1)^k \sum_{\nu}\binom{2m}{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}}\Big)\\
&= 1 + \sum_{m\ge 1}\frac{(iu)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{k\ge 1}(-1)^k \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_{k+1})}\frac{(iu)^{\nu_1}}{\nu_1!}\cdots\frac{(iu)^{\nu_{k+1}}}{\nu_{k+1}!}\\
&= 1 + \sum_{m\ge 1}\frac{(iu)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{k\ge 1}(-1)^k\Big(\sum_{\nu_1 \text{ impair}}\frac{(iu)^{\nu_1}}{\nu_1!}\Big)\\
&\qquad \times \Big(\sum_{\nu_2 \text{ pair}}\frac{(iu)^{\nu_2}}{\nu_2!}\Big)\cdots\Big(\sum_{\nu_k \text{ pair}}\frac{(iu)^{\nu_k}}{\nu_k!}\Big)\Big(\sum_{\substack{\nu_{k+1}\\ \text{impair}}}\frac{(iu)^{\nu_{k+1}}}{\nu_{k+1}!}\Big)\\
&= \cos u + \sum_{k\ge 1}(-1)^k(i\sin u)(\cos u - 1)^{k-1}(i\sin u)\\
&= \frac{1}{\cos u} = \sec u.
\end{aligned}$$

28. (a) En effet, $p(T^2c) = 1 + (c(3) + c(4))u + \cdots = Tp(c)$ et $q(T^2c) = 1 + c(4)c(5)u + \cdots = Tq(c)$.
(b) De même, $pT^3(c) = 1 + (c(4) + c(5))u + \cdots = T^2p'(c)$ et $qT^3(c) = 1 + c(5)c(6)u + \cdots = T^2q'(c)$.
(c) La relation est banale pour $n = 0, 1$. Pour $n \ge 2$, on a $\mathrm{Stiel}_{2n}(c)$

$$\begin{aligned}
&= 1 + c(1)u\frac{1}{1 - c(1)u - c(2)u\ \mathrm{Stiel}_{n-2}(T^2c)}\\
&= 1 + c(1)u\frac{1}{1 - c(1)u - c(2)u(1 + c(3)u\ \mathrm{Jac}_{n-1}(Tp(c), Tq(c))}\\
&= 1 + c(1)u\frac{1}{1 - p(1)u - q(1)u^2\ \mathrm{Jac}_{n-1}(Tp(c), Tq(c))}\\
&= 1 + c(1)u\ \mathrm{Jac}_n(p(c), q(c))
\end{aligned}$$

(d) La relation est banale pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, on a : $\mathrm{Stiel}_{2n-1}(c)$
$$= \cfrac{1}{1 - c(1)u - \cfrac{c(1)c(2)u^2}{1 - c(2)u - c(3)u\ \mathrm{Stiel}_{2n-4}(T^3c)}}$$
$$= \cfrac{1}{1 - c(1)u - \cfrac{c(1)c(2)u^2}{1 - c(2)u - c(3)u(1 + c(4)u\ \mathrm{Jac}_{n-2}(p(T^3c), q(T^3c)))}}$$
$$= \cfrac{1}{1 - p'(1)u - \cfrac{q'(1)u^2}{1 - p'(2)u - q'(2)u^2\ \mathrm{Jac}_{n-2}(p(T^3c), q(T^3c))}}$$
$$= \cfrac{1}{1 - p'(1)u - \cfrac{q'(1)u^2}{1 - p'(2)u - q'(2)u^2\ \mathrm{Jac}_{n-2}(T^2p'(c), T^2q'(c))}}$$
$= \mathrm{Jac}_n(p'(c), q'(c))$.

(e) Un simple passage à la limite.

29. Comme $f_\alpha = 1 + \alpha\, u\, f_{\alpha+1}$, la série c_α (si elle existe), satisfaisant $f_\alpha = \mathrm{Stiel}\, c_\alpha$, doit aussi satisfaire : $1 + \alpha\, u\, f_{\alpha+1} = 1 + c_\alpha(1)u\ \mathrm{Jac}(p(c_\alpha), q(c_\alpha))$ et $f_\alpha = \mathrm{Jac}(p'(c_\alpha), q'(c_\alpha))$. D'où $c_\alpha(1) = \alpha$, $\mathrm{Jac}(p(c_\alpha), q(c_\alpha)) = \mathrm{Jac}(p'(c_{\alpha+1}), q'(c_{\alpha+1}))$ et donc $p(c_\alpha) = p'(c_{\alpha+1})$, $q(c_\alpha) = q'(c_{\alpha+1})$. Le système $c_\alpha(1) = \alpha$, $c_\alpha(2n-1) + c_\alpha(2n) = c_{\alpha+1}(2n-2) + c_{\alpha+1}(2n-1)$, $c_\alpha(2n)c_\alpha(2n+1) = c_{\alpha+1}(2n-1)c_{\alpha+1}(2n)$ $(n \geq 1)$ se résout de proche en proche et donne bien : $c_\alpha(2n-1) = \alpha + n - 1$, $c_\alpha(2n) = n$ $(n \geq 1)$.

30. On utilise les notations de l'Exercice 28. D'abord
$(u\ \mathrm{Jac}_1(p, q)) \circ (u/(1-u)) = \dfrac{u/(1-u)}{1 - p(1)u/(1-u)} = \dfrac{u}{1 - (p(1)+1)u} =$ $\mathrm{Jac}_1(p + u/(1-u), q)$. Pour $n \geq 2$, on a : $(u\ \mathrm{Jac}_n(p, q)) \circ (u/(1-u)) =$
$$\frac{u/(1-u)}{1 - p(1)u/(1-u) - q(1)u/(1-u)(u\ \mathrm{Jac}_{n-1}(Tp, Tq)) \circ (u/(1-u))} =$$
$$\frac{u}{1 - (p(1)+1)u - q(1)u\ \mathrm{Jac}_{n-1}(Tp + u/(1-u), Tq)) \circ (u/(1-u))} =$$
$u\ \mathrm{Jac}_n(p + u/(1-u), q)$. D'où l'identité en faisant tendre n vers l'infini.

31. (a) simple vérification ; pour (b), supposons que l'on ait : $f = u\,\mathrm{Stiel}(c)$ pour une certaine série c. D'après l'Exercice 28 (e), on en tire : $f = u\ \mathrm{Jac}(p'(c), q'(c)) = u + c(1)u^2\ \mathrm{Jac}(p(c), q(c)) = u + t\, u\, f \circ (u/(1-u))$, d'où $c(1) = t$ et $u\ \mathrm{Jac}(p(c), q(c)) = f \circ (u/(1-u)) = (u\ \mathrm{Jac}(p'(c), q'(c))) \circ (u/(1-u)) = u\ \mathrm{Jac}(p'(c) + u/(1-u), q'(c))$. D'où, enfin, $p(c) = p'(c) + u/(1-u)$, $q(c) = q'(c)$, soit $c(1) + c(2) = c(1) + 1$, d'où $c(2) = 1$ et pour $n \geq 2$ la relation $c(2n-1) + c(2n) =$

$c(2n-2)+c(2n-1)+1$ et $c(2n)=n$. D'autre part, pour $n \geq 1$, on obtient : $c(2n)c(2n+1)=c(2n-1)c(2n)$ et donc $c(2n-1)=t$.

32. (a) Il y a des zéros dans toutes les positions impaires (sauf la première) de la suite initiale et dans les positions paires de la suite finale. Utilisant alors les seules règles de calcul des matrices de Seidel (*cf.* chap. 1, formule (12.1)), on voit qu'on peut engendrer la matrice comme indiqué dans le Tableau 6.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & -1 & \to & 0 & & 2 & \to & 0 & & -16 & \to & 0 \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
0 & & -1 & & 2 & & 2 & & -16 & & -16 & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
-1 & & 1 & & 4 & & -14 & & -32 & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
0 & & 5 & & -10 & & -46 & & & & & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
5 & & -5 & & -10 & & & & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
0 & & -61 & & & & & & & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
-61 & & & & & & & & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Tableau 6

(b) Ce n'est qu'une simple conséquence de (a).

(c) Le tableau de calcul des $h(n,k)$ est le suivant :

k=	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n=0	1								
1	1	−1							
2	1	0	0						
3	1	−2	−2	2					
4	1	0	−2	0	0				
5	1	−3	8	16	−16	−16			
6	1	0	−8	0	16	0	0		
7	1	−4	−20	60	136	−272	−272	272	
8	1	0	−20	0	136	0	−272	0	0

Tableau 7

On a, en particulier, $h(1,1)=-1$ et $h(n,1)=h(n-1,1)+c(n)h(n,0)=h(n-1,1)+c(n)$. D'où $c(2n-1)=-n$, $c_{2n}=n$ $(n \geq 1)$.

Notons qu'il faut un argument supplémentaire pour démontrer qu'on n'a jamais $h(n,1) = h(n-1,1)$ et donc qu'aucun coefficient $c(n)$ n'est nul.

(d) D'abord $\mathcal{L}(1-\mathrm{th}) = \mathrm{Stiel}(c) = 1 + c(1)u\ \mathrm{Jac}(p(c), q(c)) = 1 - u\ \mathrm{Jac}(p(c), q(c))$, d'où $\mathrm{th} = u\ \mathrm{Jac}(p(c), q(c))$. De même, $\mathcal{L}(1-\mathrm{th}) = \mathrm{Stiel}(c) = \mathrm{Jac}(p'(c), q'(c))$. D'après la Proposition 12.1 du chap. 1, on en tire : $u\,\mathcal{L}\ \mathrm{sech} = (u/(1-u))\,\mathcal{L}(1-\mathrm{th}) \circ (u/(1-u)) = (u/(1-u))\ \mathrm{Jac}(p'(c), q'(c)) \circ (u/(1-u)) = (u\ \mathrm{Jac}(p'(c), q'(c))) \circ (u/(1-u)) = u\ \mathrm{Jac}(p'(c) + u/(1-u), q'(c))$. D'où $\mathcal{L}\ \mathrm{sech} = \mathrm{Jac}(p'(c) + u/(1-u), q'(c))$. Or $p(c) = 1$, $q(c) = 1 - \sum_{n\ge1} n(n+1)u^n$, $p'(c) = 1 - \sum_{n\ge1} u^n$, $q'(c) = 1 - \sum_{n\ge1} n^2u^n$ et $p'(c) + u/(1-u) = 1$. On en tire :
$\mathrm{th} = u\ \mathrm{Jac}(1, 1 - \sum_{n\ge1} n(n+1)u^n)$ et $\mathrm{sech} = \mathrm{Jac}(1, 1 - \sum_{n\ge1} n^2u^n)$.

33. (a) Les m lettres infinies sont dans des positions $i_1, i_2, \ldots, i_m$ telles que $1 \le i_1 < i_1 + 1 < i_2 < i_2 + 1 < i_3 < \cdots < i_m \le n + m - 1$. On peut envoyer biunivoquement une telle suite sur $1 \le j_1 := i_1 < j_2 := i_2 - 1 < j_3 := i_3 - 2 < \cdots < j_m := i_m - (m-1) \le n + (m-1) - (m-1) = n$. Or le nombre de telles suites $(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_m)$ est $\binom{n}{m}$. Une fois les positions i_k occupées par les lettres infinies, on peut répartir les lettres finies de $n!$ manières.

(b) On définit w' comme étant le mot obtenu à partir de w en remplaçant la $(j+1)^{\text{ième}}$ occurrence de ∞ dans w par $(n+1)$. Dans $w \in Ch(n,m)$ il y a exactement m lettres infinies. On a $e_{w'}(x) = e_w(x)$ pour $x = 1, \ldots, n$, mais $e_{w'}(n+1) = j$, puisqu'il y a alors j lettres infinies dans w' à la gauche de $(n+1)$ qui sont des pics et tous associés à des creux inférieurs à $(n+1)$. Réciproquement, partant de $w' \in Ch(n+1, m-1)$, il suffit de remplacer $(n+1)$ par ∞ et de noter le nombre de lettres ∞ qui précédaient $(n+1)$ dans w'.

(c) On définit w' comme étant le mot obtenu à partir de w en insérant le facteur $\infty\,(n+1)$ *juste avant* la $(j+1)^{\text{ième}}$ occurrence de ∞ dans w, si $0 \le j \le m-1$, ou à la fin du mot w si $j = m$. Même commentaire que dans (b).

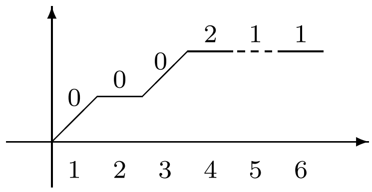
(d) On définit w' comme étant le mot obtenu à partir de w en insérant $(n+1)$ *juste après* la $(j+1)^{\text{ième}}$ occurrence de ∞ dans w. Même commentaire que dans (b).

(e) On définit w' comme étant le mot obtenu à partir de w en insérant $(n+1)$ *juste avant* la $(j+1)^{\text{ième}}$ occurrence de ∞ dans w, si $0 \le j \le m-1$, ou à la fin du mot w si $j = m$. Même commentaire que dans (b).

(f) Si w est une permutation chargée d'ordre (n,m), posons $\gamma_n = p$, t,

d, r, suivant que n est un pic, un creux, une descente ou une montée et $w_n := w$, puis : $\gamma_n(w_n) := (w_{n-1}, e_w(n))$. Comme la permutation chargée w_{n-1} a exactement $(n-1)$ lettres finies, on peut définir, par récurrence, $\gamma_k(w_k) := (w_{k-1}, e_w(k))$ pour $k = n, (n-1), \ldots, 1$, en prenant la convention $\gamma_1(1) = r(1) = \gamma_1(\infty, 1) = t(\infty, 1) = (\epsilon, 0)$, où ϵ = mot vide. La permutation chargée est ainsi complètement caractérisée par le couple $(\gamma(w), e(w))$, où $\gamma(w) = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Soit $c(k)$ le nombre de le nombre de lettres infinies dans w_k. Il résulte des précédentes questions que l'on a $0 \le e_w(k) \le c(k)$, si k est un creux ou une montée et $0 \le e_w(k) \le c(k)-1$ si k est un pic ou une descente. Donnons-nous quatre variables (non-commutatives) symbolisées par des traits : $\diagdown$, $\diagup$, - - - et $\underline{\quad}$. Dans le mot $\gamma(w)$ faisons les substitutions : $p \leftarrow \diagdown$, $t \leftarrow \diagup$, $d \leftarrow$ - - - et $r \leftarrow \underline{\quad}$ et reproduisons la ligne polygonale obtenue en mettant ces traits bout à bout dans le plan. Alors $c(k)$ définie ci-dessus n'est autre que la hauteur atteinte par la ligne polygonale lorsque les k premiers traits ont été reproduits. Les conditions (20.1) sont donc remplies et le couple $(\gamma(w), e(w))$ appartient à $M(n, m)$.

(g)



34. (a) Banal.

(b) On définit $A(w')$ en remplaçant dans la seconde ligne de la matrice $A(w)$ la $(j+1)^{\text{ième}}$ occurrence de ∞ dans $x_{a_1} \ldots x_{a_l}$ (lorsque ce mot est lu de gauche à droite) par $(n+1)$. Pour obtenir $B(w')$, on remplace la première occurrence dans $B(w)$ de ∞, sise en position $(n-l+1)$ sur la première ligne, par $(n+1)$. On a $f_{w'}(x) = f_w(x)$ pour $x = 1, \ldots, n$, mais $f_{w'}(n+1) = j$. Réciproquement, partant de $w' \in Pl(n+1, m-1)$, il suffit de remplacer l'unique occurrence de $(n+1)$ dans $A(w')$ (resp. dans $B(w')$) par ∞ et de noter $f_{w'}(n+1)$.

(c) On définit $A(w')$ en juxtaposant à la droite de $A(w)$ la colonne $\binom{n+1}{\infty}$ et $B(w')$ en insérant dans $B(w)$ la colonne $\binom{\infty}{n+1}$ à la $(j+1)^{\text{ième}}$ place (de droite à gauche). Noter que la première ligne de $B(w)$ a m lettres ∞ à son extrémité. Même commentaire que dans (b).

(d) Pour définir $A(w')$ on insére $(n+1)$ à la fin de la premiére ligne de $A(w)$. Comme on a supposé $m \ge 1$, il y a une occurrence de ∞ dans la seconde ligne de $A(w)$. On remplace alors la $j^{\text{ième}}$ occurrence de ∞ dans cette ligne par $(n+1)$ et on ajoute ∞ à la fin. On pose aussi : $B(w') := B(w)$. Même commentaire que dans (b).

(e) Pour définir $B(w')$, on insère $(n+1)$ dans la première ligne de $B(w)$ juste avant la première occurrence de ∞ (donc à la position $(n-l+1)$), puis également dans la seconde ligne de $B(w)$ à la $(j+1)^{\text{ième}}$ place en partant de la droite. On pose aussi : $A(w') := A(w)$. Même commentaire que dans (b).

(f) On reprend exactement la même démonstration que dans l'exercice précédent, dans la question (f). Si w est une permutation plombée d'ordre (n,m), posons $\gamma_n = \pi,\ \tau,\ \delta,\ \rho$, suivant que n appartient à $\mathrm{Nexc}(w) \cap \mathrm{Exc}'(w)$, $\mathrm{Exc}(w) \cap \mathrm{Nexc}'(w)$, $\mathrm{Exc}(w) \cap \mathrm{Exc}'(w)$, $\mathrm{Nexc}(w) \cap \mathrm{Nexc}'(w)$ et $w_n := w$, puis, $\gamma_n(w_n) := (w_{n-1}, f_w(n))$ et par récurrence $\gamma_k(w_k) := (w_{k-1}, f_w(k))$ pour $k = n, (n-1), \ldots, 1$, en prenant la convention $\gamma_1(1) = \rho(1) = \gamma_1(\infty, 1) = t(\infty, 1) = (\epsilon, 0)$, où $\epsilon =$ mot vide. Chaque permutation plombée w est complètement caractérisée par le couple $(\gamma(w), f(w))$, où $\gamma(w) = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, qui est un élément de $M(n,m)$.

(g) $A(w'_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \infty & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B(w'_1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & \infty \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; $f_{w'_1}(7) = 1$;

$A(w'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & 5 & \infty & \infty \end{pmatrix}$, $B(w'_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; $f_{w'_2}(7) = 2$;

$A(w'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & 5 & 7 & \infty \end{pmatrix}$, $B(w'_3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \infty & \infty \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; $f_{w'_3}(7) = 1$;

$A(w'_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \infty & 5 & \infty \end{pmatrix}$, $B(w'_4) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & \infty & \infty \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; $f_{w'_4}(7) = 1$.

35. (a) Partant de la permutation chargée $w \in Ch(n,m)$, on définit $\mathrm{Exc}(w') := \{a_1 < \cdots < a_l\}$ comme étant l'ensemble des creux et des descentes de w, puis $\mathrm{Exc}'(w') := \{a'_1 < \cdots < a'_{l-m}\}$ comme étant l'ensemble des descentes et des pics finis de w, puis encore $\mathrm{Nexc}(w') := \{b_1 < \cdots < b_{n-l}\}$ comme étant l'ensemble des montées et des pics finis de w, enfin $\mathrm{Nexc}'(w') := \{b'_1 < \cdots < b'_{n+m-l}\}$ comme étant l'ensemble des creux et des montées de w. Posons : $a'_{l-m+1} = a'_{l-m+2} = \cdots = a'_l = \infty$. Alors il existe un et un seul réarrangement $a'_{i_1}\, a'_{i_2} \ldots a'_{i_l}$ du mot $a'_1\, a'_2 \ldots a'_l$ dont la table d'inversions de gauche à droite soit $e_w(a'_{i_1})\, e_w(a'_{i_2}) \ldots e_w(a'_{i_l})$. De même, il existe un et un seul réarrangement $b'_{j_1}\, b'_{j_2} \ldots b'_{j_{n+m-l}}$ dont la table d'inversions de droite à gauche soit $e_w(b'_{j_1})\, e_w(b'_{j_2}) \ldots e_w(b'_{j_{n+m-l}})$. Posant $b_{n+1-l} = \cdots = b_{n+m-l} = \infty$, on définit alors la permutation plombée w' par :

$$A(w') := \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_l \\ a'_{i_1} & \ldots & a'_{i_l} \end{pmatrix}, \quad B(w') := \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_{n+m-l} \\ b'_{j_1} & \ldots & b'_{j_{n+m-l}} \end{pmatrix}.$$

On note que dans cette définition directe la difficulté est de prouver les inégalités $a_i < a'_i$ et $b_j \geq b'_j$.

(b) Partant de la permutation plombée $w \in Pl(n,m)$, on détermine d'abord le mot $\overline{\gamma}(w) := \overline{\gamma}_1\,\overline{\gamma}_2\,\ldots\,\overline{\gamma}_n$, où, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, on pose $\overline{\gamma}_i := \pi, \tau, \delta, \rho$, suivant que i appartient à $\mathrm{Nexc}(w) \cap \mathrm{Exc}'(w)$, $\mathrm{Exc}(w) \cap \mathrm{Nexc}'(w)$, $\mathrm{Exc}(w) \cap \mathrm{Exc}'(w)$, $\mathrm{Nexc}(w) \cap \mathrm{Nexc}'(w)$, puis on *latinise* toutes les lettres de $\gamma(w)$: on remplace donc π par p, τ par t, δ par d, ρ par r dans $\overline{\gamma}(w)$ pour obtenir un mot $\gamma(w) := \gamma_1\,\gamma_2\,\ldots\,\gamma_n$ dans l'alphabet $\{p, r, t, r\}$. Posons w_1, ∞ si $1 \in \mathrm{Exc}(w) \cap \mathrm{Nexc}'(w)$ et $w_1 := 1$ si $1 \in \mathrm{Nexc}(w) \cap \mathrm{Nexc}'(w)$. On définit récursivement : $w_k := \gamma^{-1}(w_{k-1}, f_w(k))$ pour $k = 2, \ldots, n$ et $\Psi_{Ch\to Pl}(w) := w_n$.

(c) L'ensemble des creux et des descentes de w est $\mathrm{Exc}(w') := \{1, 3, 5\}$; l'ensemble des descentes et des pics finis de w est $\mathrm{Exc}'(w') := \{5\}$; l'ensemble des montées et des pics finis de w est $\mathrm{Nexc}(w') := \{2, 4, 6\}$; enfin l'ensemble des creux et des montées de w est $\mathrm{Nexc}'(w') := \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Or $e(w) = 0, 0, 0, 2, 1, 1$. L'unique réarrangement des colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont la seconde ligne est précisément la table d'inversions (de gauche à droite) de la première ligne est $\begin{pmatrix} \infty & 5 & \infty \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose donc $A(w') := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \infty & 5 & \infty \end{pmatrix}$. L'unique réarrangement des colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dont la seconde ligne est précisément la table d'inversions (de droite à gauche) de la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose donc $B(w') := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) Comme $\mathrm{Exc}(w') = \{1, 3, 5\}$, $\mathrm{Exc}'(w') = \{5\}$, $\mathrm{Nexc}(w') = \{2, 4, 6\}$ et $\mathrm{Nexc}'(w') = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, on associe au mot w' le monôme $\gamma(w') = t\,r\,t\,r\,d\,r$. Enfin, comme $f_{w'} = 0, 0, 0, 2, 1, 1$, on obtient : $w_1 := \infty\,1$, $w_2 := r^{-1}(\infty\,1\,,\,0) := 2\,\infty\,1$, $w_3 := t^{-1}(2\,\infty\,1\,,\,0) = 2\,\infty\,3\,\infty\,1$, $w_4 := r^{-1}(2\,\infty\,3\,\infty\,1\,,\,2) = 2\,\infty\,3\,\infty\,1\,4$, $w_5 := d^{-1}(2\,\infty\,3\,\infty\,1\,4\,,\,1) = 2\,\infty\,3\,\infty\,5\,1\,4$ et $w := \Psi_{Pl\to Ch}(w') = r^{-1}(2\,\infty\,3\,\infty\,1\,5\,4\,,\,1) = 2\,\infty\,3\,6\,\infty\,5\,1\,4$.

36. (a) Si $(\gamma_1 \ldots \gamma_n, v_1 \ldots v_n) \in M(n, m, k)$, posons $\gamma' := \gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}$ et $v' := v_1 \ldots v_{n-1}$. Si γ_n est un palier continu, alors $(\gamma', v') \in M(n-1, m, k)$; si γ_n est un pas montant, alors $(\gamma', v') \in M(n-1, m-1, k-1)$; si γ_n est un pas descendant, alors $(\gamma', v') \in M(n-1, m+1, k)$; enfin, si γ_n est un palier pointillé, alors $(\gamma', v') \in M(n-1, m, k-1)$. Or, d'après (20.1) la valeur maxima de la valuation v_n est m si γ_n est un palier continu, $(m-1)$ si c'est un pas montant, m si c'est un pas descendant et enfin $(m-1)$ si c'est un palier pointillé. Le polynôme générateur pour les (γ, v) tels que v_n est un palier continu est donc :

$P(n-1,m,k)(1+q+\cdots+q^m) = [m+1]_q\, P(n-1,m+1,k)$. Celui pour les (γ, v) tels que v_n est un pas montant est : $P(n-1,m,k)(1+q+\cdots+q^{m-1})q^n = q^n[m]_q\, P(n-1,m-1,k-1)$. Celui pour les (γ, v) tels que v_n est un pas descendant est : $P(n-1,m+1,k)(1+q+\cdots+q^m) = [m+1]_q\, P(n-1,m+1,k)$. Celui pour les (γ, v) tels que v_n est un palier pointillé est : $P(n-1,m,k-1)(1+q+\cdots+q^{m-1})q^n = q^n[m]_q\, P(n-1,m,k-1)$.

(b) Il est banal de récrire la récurrence de (a) et $(**)$ à l'aide des opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sous la forme $(***)$ et (iv). La double inégalité $n \geq k \geq m \geq 0$ permet d'écrire $\mathcal{R} := \mathcal{Q} - \mathcal{P}$ sous la forme : $\mathcal{R} = q^{m+1}[k-m]_q\, I + q^k[n-k]_q\, \mathcal{K}^{-1} - [m+1]_q\, M$. Or, pour tout $n \geq 0$, on a : $\mathcal{R}\, P(n,0,0) = 0$. Lorsque $n \geq 1$, la récurrence $(***)$ implique $P(n,m,k) = \mathcal{P}\mathcal{N}^{-1}\, P(n,m,k) = \mathcal{P}\, P(n-1,m,k)$. Comme les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ commutent, on en tire : $\mathcal{R}\, P(n,m,k) = \mathcal{R}\,\mathcal{P}\, P(n-1,m,k) = \mathcal{P}\,\mathcal{R}\, P(n-1,m,k) = 0$, par récurrence sur n.

(c) En effet, $I - \mathcal{Q}\mathcal{N}^{-1} = I - (\mathcal{P}+\mathcal{R})\mathcal{N}^{-1} = (I - \mathcal{P}\mathcal{N}^{-1}) - \mathcal{R}\mathcal{N}^{-1}$. Pour $n \geq 1$, l'opérateur $I - \mathcal{P}\mathcal{N}^{-1}$ (resp. $\mathcal{R}\mathcal{N}^{-1}$) appliqué à $P(n,m,k)$ donne 0, d'après $(***)$ (resp. d'après (b)).

37. Considérons la bijection $w \mapsto (\gamma_1 \ldots \gamma_n, v_1 \ldots v_n)$ de $\mathfrak{S}_n$ sur $M(n,0)$, décrite dans l'Exercice 34. Alors $\mathrm{Exc}(w)$ est aussi l'ensemble des entiers k tels que γ_k est un pas montant ou un palier pointillé. De plus, la somme des éléments de $f(w)$ est simplement $v_1 + \ldots + v_n$. On a donc $\mathrm{ind}(\gamma, v) = \mathrm{den}\, w$ j ; de plus, le nombre de pas montant ou de paliers pointillés dans γ est égal à $\mathrm{exc}\, w$. On applique alors les conclusions de l'exercice précédent.

38. (a) Dans l'identité du Théorème 19.3, il faut faire les substitutions : $p(1) \leftarrow r$, $p(i) \leftarrow i\, r + (i-1)d$ $(i \geq 2)$ et $q(i) \leftarrow i\, p\, i\, t$ $(i \geq 1)$. Le développement en fraction continue de Jacobi est donc $\mathrm{Jac}(a,b)$, avec $a = 1 + \sum\limits_{i\geq 1}(i\, r + (i-1)d)u^i$ et $b = 1 + pt\sum\limits_{i\geq 1} i^2u^i$.

(b) Avec la convention $x_0 = 0$ et $x_{2n+1} = \infty$, une permutation alternante descendante $w = x_1x_2\ldots x_{2n}$, d'ordre $2n$, est une permutation qui a exactement n pics et n creux. La fonction génératrice ordinaire des nombres sécants D_{2n} a donc un développement en fraction continue de Jacobi $\mathrm{Jac}(a,b)$ avec $a = 1$ et $b = 1 + \sum\limits_{i\geq 1} i^2u^i$.

(c) La permutation $w' := (2n+2)x_1x_2\ldots x_{2n+1}$ contient $(n+1)$ pics et $(n+1)$ creux. Par la transformation de Françon-Viennot (Exercice 33 (f)), il lui correspond un chemin de Motzkin coloré $(\gamma(w'), e(w'))$, qui contient $(n+1)$ pas descendants et $(n+1)$ pas montants. Lors du déroulement de l'algorithme qui permet d'obtenir w' à partir du couple $(\gamma(w'), e(w'))$, on construit successivement les mots w_1, w_2, $\ldots$, $w_{2n+2} = w'$, par application des bijections p^{-1}, t^{-1} (*cf.* Exercice 33 (b) et (c)). En particulier, $w_1 = \infty\, 1$. Supposons que les mots w_1, $\ldots$, w_m débutent par ∞ pour un certain m tel que $1 \leq m \leq 2n-1$ et posons $v_{w'}(m+1) = j$. Si $(m+1)$ est un pic, le mot w_{m+1} se déduit de w_m par remplacement de la $j^{\text{ième}}$ occurrence de ∞ par $(m+1)$. Si l'on avait $j = 0$, on insèrerait $(m+1)$ au début du mot w_m, à la place de ∞. Les applications ultérieures des bijections p^{-1} et t^{-1} pour obtenir $w_{m+2}, \ldots$, w_{2n+1} n'insèreraient plus jamais de lettre ∞ au début et on ne pourrait obtenir, à la fin de permutation $w' = w_{2n+2}$ débutant par $(2n+2)$. Par conséquent, tous les mots intermédiaires w_1, w_2, $\ldots$, w_{2n+1} débutent par ∞ (ce qui équivaut à dire que le chemin ne retourne en 0 qu'en fin de parcours) et $e_{w'}(m) \geq 1$ si m est un pic de w'.

(d) Soit (γ'', v'') un chemin de Motzkin coloré allant de 0 en 0 en $2n$ pas, obtenu par le procédé décrit. Pour un pas montant *issu* de la hauteur i, la valuation peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, i$, tandis que pour un pas descendant *issu* de la hauteur i, la valuation peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, i$. On a $\sum_{n\geq 0} D_{2n+1} u^{2n+1} = u \operatorname{Jac}(a, b)$, où, pour chaque $i \geq 1$, on doit poser $a(i) = 0$ (pas de montée, ni de descente) et $b(i) = i(i+1)$, puisque, pour un pas montant ou descendant issu de la hauteur i, on a $(i+1)$ valeurs possibles pour un pas montant et i valeurs possibles pour un pas descendant, soit $a = 1$ et $b = 1 + \sum_{i\geq 1} i(i+1)\, u^i$.

CHAPITRE 4

L'ANNEAU DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Ce chapitre, qui contient les éléments de base de la théorie des fonctions symétriques culmine, en fait, avec l'introduction des fonctions de Schur, leurs interprétations combinatoires et l'identité de Cauchy sur la fonction génératrice des produits de fonctions de Schur. L'ouvrage de référence reste le superbe ouvrage de Macdonald (I. G.), *Symmetric Fnctions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1995, auquel il est vivement conseillé de se reporter.

Note ajoutée en 2008. — On trouvera, par ailleurs, une approche intéressante et beaucoup d'exercices dans le manuel d'Alain Lascoux, *Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence (CBMS no. 99, Conf. on Alg. Combin.), 268, p., 2003.

Sommaire

1. Partitions

Les partitions d'entiers restent les objets privilégiés de l'étude des fonctions symétriques. Par *partition* d'un entier $n \geq 1$, on entend une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ d'entiers positifs, où seulement un nombre fini d'entre eux sont non-nuls. Les éléments non-nuls de cette suite λ sont les *parts* de la partition. Le *nombre de parts* est noté $l(\lambda)$ et le *poids*, noté $|\lambda|$, de la partition λ est défini comme la somme

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$$

Lorsque $|\lambda| = n$, on dit que λ est la *partition* de l'entier n. On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions de n.

La *notation multiplicative* de la partition λ s'écrit $\lambda = 1^{m_1}2^{m_2}\dots$, où pour chaque $i = 1, 2, \dots$, l'exposant m_i est égal au nombre de parts de λ qui sont égales à i. L'entier $m_i = m_i(\lambda)$ est appelé la *multiplicité* de i dans λ.

Par exemple, $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$ est une partition de $n = 17$. Sa notation multiplicative s'écrit : $1^2 2^1 3^0 4^2 5^1$.

La *forme* d'une partition $\lambda = (\lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ ($\lambda_r \geq 1$) est l'ensemble de tous les $|\lambda|$ points $(1,1)$, $(1,2)$, ... , $(1, \lambda_1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, ... , $(2, \lambda_2)$, ... , $(r,1)$, $(r,2)$, ... , (r, λ_r) situés dans le premier quadrant $\mathbb{N}^2$. On représente également chaque forme par un ensemble de *boîtes* carrées justifiées à gauche, chaque point de la suite précédente étant le centre d'une boîte. Par exemple, la partition $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$ est représentée par la forme de la figure 1.

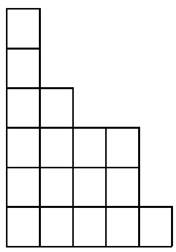


Fig. 1

Cette représentation géométrique est encore appelée *diagramme de Ferrers* et notée par le même symbole λ.

La partitition *conjuguée* d'une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ est la partition $\lambda' = 1^{\lambda_1 - \lambda_2} 2^{\lambda_2 - \lambda_3} \dots$ (en notation multiplicaltive). Son diagramme de Ferrers est obtenu à partir de celui de λ par une simple symétrie autour de la première bissectrice. Ainsi, dans le précédent exemple, on a : $\lambda' = 1^1 2^0 3^2 4^1 5^0 6^1 = (6, 4, 3, 3, 1)$. En particulier, $\lambda'_1 = l(\lambda)$ et $\lambda'_i = \text{card}\{j : \lambda_j \geq i\}$.

On utilise couramment les opérations *addition* et *union* sur les partitions définies de la façon suivante : $\lambda+\mu=(\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\dots)$, tandis que $\lambda\cup\mu$ est définie comme la partitions dont les parts sont celles de λ et μ réarrangées en ordre décroissant.

Par exemple, si $\lambda=(6,3,3)$ et $\mu=(5,5,1,1)$, alors $\lambda+\mu=(11,8,4,1)$ et $\lambda\cup\mu=(6,5,5,3,3,1,1)$. Les opérations sont duales :

PROPOSITION 1.1. — *On a :* $(\lambda\cup\mu)'=\lambda'+\mu'$.

Démonstration. — La part $(\lambda\cup\mu)'_i$ est la longueur de la i-ième colonne de $\lambda\cup\mu$, i.e., la somme des longueurs des i-ièmes colonnes de λ et de μ. ∎

2. Fonctions symétriques

Soit $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ l'anneau des polynômes en n variables à coefficients entiers. Un polynôme de cet anneau est dit *symétrique*, s'il est invariant par permutation des variables. Soit Λ_n le sous-anneau de $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ formé de tous les polynômes symétriques et pour tout $k\geq 0$ soit Λ_n^k l'ensemble de tous les polynômes homogènes symétriques de degré k, y compris le polynôme nul. On a alors :

$$\Lambda_n=\bigoplus_{k\geq 0}\Lambda_n^k.$$

Pour chaque $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ notons x^α le monôme $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ et pour toute partition λ de longueur $l(\lambda)\leq n$ désignons par $m_\lambda(x_1,\dots,x_n)=\sum x^\alpha$ la somme de tous les monômes (distincts) x^α, où α est une permutation de $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Le polynôme m_λ est appelé *polynôme monomial symétrique*. On utilise également la notation $\sum x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots$ au lieu de m_λ.

Par exemple, avec $n=4$ variables, on a :
$m_{(1)}=\sum x_1=x_1+x_2+x_3+x_4$;
$m_{(1,1)}=\sum x_1x_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;
$m_{(2,1)}=\sum x_1^2x_2=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1^2x_4+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_2^2x_4+x_3^2x_1+x_3^2x_2+x_3^2x_4+x_4^2x_1+x_4^2x_2+x_4^2x_3$.

Remarque. — Dans la définition de m_λ chaque monôme intervient avec le coefficient 1. Si deux permutations α et β de λ conduisent au même monôme, on ne retient qu'une seule occurrence de ce monôme dans l'expression de m_λ. Par exemple, pour $\lambda=1^2=(1,1,0,0)$, la transposition des deux premiers termes fournit le *même* monôme $x^\lambda=x_1x_2$. De même, le polynôme $m_{(1,1)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ci-dessus n'a que *six* termes distincts et non pas vingt-quatre.

Les polynômes monômiaux symétriques $m_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ forment une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n, lorsqu'on restreint λ à l'ensemble de toutes les partitions de longueur $l(\lambda) \le n$. D'autre part, les polynômes $m_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ ($l(\lambda) \le n$; $|\lambda| = k$) forment une $\mathbb{Z}$-base pour Λ_n^k. Lorsque $n \ge k$, c'est-à-dire, lorsque le nombre de variables est *grand*, l'ensemble de *tous* les polynômes m_λ tels que $|\lambda| = k$ forment une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k. Par conséquent, $\dim \Lambda_n^k = p(k)$, le nombre de partitions de k.

Dans la théorie des fonctions symétriques, on opère avec un *grand* nombre de variables ; certains auteurs préfèrent immédiatement traiter le cas où l'ensemble des variables est *infini*, mais l'énoncé de certaines propriétés devient moins commode. On adoptera ici le premier point de vue. Pour rendre la notion de grand nombre de variables plus précis, on opère non pas avec les polynômes, mais avec les suites de polynômes $f = (f_n)$ ($n \ge 0$), où chaque terme f_n appartient à Λ_n^k et où pour tout couple $m \ge n$ les polynômes f_m et f_n satisfont la condition de compatibilité :

$$f_m(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0) = f_n(x_1,\ldots,x_n).$$

On note Λ^k l'ensemble des suites $f = (f_n)$ où chaque terme f_n est un polynôme symétrique de degré k. On peut vérifier que pour $n \ge k$ l'application ρ_n^k de Λ^k dans Λ_n^k qui envoie $f = (f_n)$ sur f_n est en fait un *isomorphisme*. Par conséquent, Λ^k est de dimension $p(k)$ et admet une $\mathbb{Z}$-base (m_λ) formé par toutes les fonctions symétriques $m_\lambda = (m_\lambda(x_1,\ldots,x_n))$ ($n \ge 0$) telles que $|\lambda| = k$. On pose alors

$$\Lambda = \bigoplus_{\lambda \ge 0} \Lambda^k.$$

Les éléments de Λ sont les séries formelles à coefficients entiers en les fonctions m_λ. L'anneau Λ est appelé *anneau des fonctions symétriques*. Pour tout $n \ge 0$ l'application de Λ dans Λ_n qui envoie la série formelle $\sum_\lambda a_\lambda m_\lambda$ sur la fonction symétrique $\sum_\lambda a_\lambda m_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ est un homomorphisme surjectif pour $n \ge 0$ et envoie injectivement les séries formelles $\sum_\lambda a_\lambda m_\lambda$ telles que $|\lambda| \le n$ sur les séries correspondantes.

3. Fonctions symétriques élémentaires

Pour chaque $r \ge 1$ le polynôme

$$e_r = m_{1^r} = \sum x_1 x_2 \ldots x_r = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$$

est dit $r^{\text{ième}}$ *fonction symétrique élémentaire*. Par convention, $e_0 = 1$. La fonction génératrice des e_r est évidemment :

$$E(u) = \sum_{r \ge 0} e_r u^r = \prod_{i \ge 1} (1 + x_i u).$$

Pour chaque partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, on définit :

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$$

On note que si λ est écrite sous la forme multiplicative $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$, alors $e_\lambda = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots$

Définition. — On dit qu'une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$ est inférieure à une partition $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots)$ *pour l'ordre lexicographique inverse*, si la première différence $\lambda_i - \mu_i$ non nulle est négative. On écrira : $\lambda <_1 \mu$.

Par exemple, par rapport à l'ordre $<_1$ l'ensemble $\mathcal{P}_6$ est totalement ordonné comme suit :

$$1^6 < 21^4 < 2^2 1^2 < 2^3 < 31^3 < 321 < 3^2 < 41^2 < 42 < 51 < 6.$$

PROPOSITION 3.1. — *On a*

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_\mu c_{\lambda\mu} m_\mu,$$

où les coefficients $c_{\lambda\mu}$ sont des entiers positifs et où la sommation est étendue à toutes les partitions μ qui sont inférieures à λ pour l'ordre lexicographique inverse.

Démonstration. — Comme $e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$, on a $e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} \cdots = \sum_\alpha x^\alpha$, où

$$x^\alpha = (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{\lambda'_1}})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{i_{\lambda'_2}}) \cdots = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$$

et $i_1 < i_2 < \cdots < i_{\lambda'_1}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_{\lambda'_2}$, ... On peut donc placer les entiers $i_1, i_2, \dots, i_{\lambda'_1}$, puis $j_1, j_2, \dots, j_{\lambda'_2}$, ... dans les *colonnes* 1, 2, ... du diagramme de Ferrers de la partition λ. Soit $T(\alpha)$ le tableau obtenu. Pour chaque entier $l \geq 1$ tous les entiers au plus égaux à l se trouvent nécessairement dans les l premières lignes (les plus basses) du tableau $T(\alpha)$. Parmi tous ces tableaux il y en a un qui a λ_1 entiers 1 dans la première ligne, λ_2 entiers 2 dans la deuxième ligne, ... Il correspond au produit $(x_1 x_2 \dots x_{\lambda'_1})(x_1 x_2 \dots x_{\lambda'_2}) \cdots = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots = x^\lambda$. Il n'y a qu'une seule manière d'obtenir ce produit. Par conséquent, le coefficient de m_λ dans le développement de $e_{\lambda'}$ est 1. Enfin, pour chaque α le nombre d'entiers $l \geq 1$ qui apparaissent dans les l premières lignes de $T(\alpha)$ est $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l$ et il est inférieur ou égal au nombre maximum de tels entiers qu'on peut y insérer c'est-à-dire à $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ correspondant au tableau $T(\lambda)$. On a donc $\alpha \leq \lambda$. □

Il résulte de la proposition précédente que la matrice de passage des (m_λ) aux (e_λ) est triangulaire avec des 1 dans toute la diagonale. Par exemple, pour $n = 4$ la matrice de passage à l'allure suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 4 & 31 & 2^2 & 21^2 & 1^4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1^4 \\ 21^2 \\ 2^2 \\ 31 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & * & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Comme les m_λ forment une base de Λ, les fonctions symétriques e_λ sont elles aussi linéairement indépendantes. On dit encore que les fonctions e_r sont algébriquement indépendantes. Toute fonction symétrique s'exprime d'une et d'une seule façon comme combinaison linéaire des e_λ à coefficients entiers. Autrement dit, toute fonction symétrique est un polynôme en les variables e_1, e_2, ... En resumé

COROLLAIRE 3.2. — *Les fonctions e_λ forment une $\mathbb{Z}$ de Λ et on a :* $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$.

4. Les fonctions symétriques homogènes et les fonctions puissances

Pour chaque $r \geq 0$ définissons

$$h_r = \sum_\lambda m_\lambda \qquad (|\lambda| = r).$$

En particulier, $h_0 = 1$, $h_1 = e_1$, $h_2 = m_{(2)} + m_{(1,1)}$, $h_3 = m_{(3)} + m_{(2,1)} + m_{(1,1,1)}$.

La fonction génératrice des h_r est évidemment

$$H(u) = \sum_{r\geq 0} h_r u^r = \prod_{i\geq 1}(1 - x_i u)^{-1},$$

car $(1 - x_i u)^{-1} = \sum_{k\geq 0}(x_i u)^k$ et l'on a :

$$\begin{aligned}\prod_{i\geq 1}\sum_{k_i\geq 0}(x_i u)^{k_i} &= \sum_{r\geq 0} u^r \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m} \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m)\\ \Sigma\, k_i = r}} x_{i_1}^{k_1}\ldots x_{i_m}^{k_m} \\ &= \sum_{r\geq 0} u^r \sum_{|\lambda|=r} \sum_{(k_1,\ldots,k_m)} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m} x_{i_1}^{k_1}\ldots x_{i_m}^{k_m}\end{aligned}$$

[où $(k_1, \ldots, k_m)$ est un réarrangement de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$]

$$= \sum_{r\geq 0} u^r \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda = \sum_{r\geq 0} u^r h_r.$$

Pour toute permutation $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, on définit

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots$$

Les sommes de puissances p_r sont elles définies par :

$$p_r = m_{(r)} = \sum_i x_i^r.$$

On pose alors

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$$

La fonction génératrice des p_r définie par $P(u) = \sum_{r\geq 1} p_r u^{r-1}$ s'exprime encore par :

$$\begin{aligned} P(u) &= \sum_{i\geq 1}\sum_{r\geq 1} x_i^r u^{r-1} = \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{1-x_i u} = \sum_{i\geq 1} \frac{d}{du} \log \frac{1}{1-x_i u} \\ &= \frac{d}{du} \log \prod_i \frac{1}{1-x_i u} = \frac{d}{du} \log H(u) = \frac{H'(u)}{H(u)}. \end{aligned}$$

5. Relations entre les fonctions symétriques

Donnons tout d'abord une liste d'identités sur les fonctions génératrices des e_r, h_r et p_r.

Proposition 5.1. — *On a :*

(i) $$\prod_{i\geq 1}(1+x_i u) = \sum_{r\geq 0} e_r u^r = E(u)\,;$$

(ii) $$\prod_{i\geq 1}(1-x_i u)^{-1} = \sum_{r\geq 0} h_r u^r = H(u)\,;$$

(iii) $$H(u)E(-u) = 1\,;$$

(iv) $$\sum_{0\leq r\leq n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0 \qquad (n\geq 1)$$

(v) $$\frac{H'(u)}{H(u)} = \sum_{r\geq 1} p_r u^{r-1} = P(u)\,;$$

(vi) $$\frac{E'(u)}{E(u)} = P(-u)\,;$$

(vii) $$nh_n = \sum_{1\le r\le n} p_r h_{n-r}\,;$$

(viii) $$\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{n\ge 0}\sum_{|\lambda|=n} m_\lambda(x)h_\lambda(y)\,;$$

(ix) $$\prod_i \frac{1}{1-x_iu} = \exp\sum_{n\ge 1} p_n(x)\frac{u^n}{n}\,;$$

(x) $$\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j} = \exp\sum_{n\ge 1}\frac{p_n(x)p_n(y)}{n}\,;$$

Démonstration. — (i), (ii) ont été démontrés; (iii) est une simple conséquence de (i) et (ii). L'identité (iv) s'obtient en regardant le coefficient de t^r dans les deux membres de (iii). L'identité (v) a été démontrée et (vi) resulte de (iii) et de (v). Lorsqu'on écrit (v) sous la forme $H'(u) = H(u)P(u)$, on obtient (vii).

Pour démontrer (viii), on écrit :

$$\begin{aligned}
\prod_i\prod_j \frac{1}{1-x_iy_j} &= \prod_i\sum_{r\ge 0} x_i^r h_r(y) \qquad\qquad \text{[d'après (ii)]}\\
&= \sum_{n\ge 0}\sum_{(r_1,\ldots,r_n)} h_{r_1}(y)\ldots h_{r_n}(y)\sum_{1\le i_1<\cdots<i_n} x_{i_1}^{r_1}\ldots x_{i_n}^{r_n}\\
&= \sum_{n\ge 0}\sum_{|y|=n} h_\lambda(y)m_\lambda(x) = \sum_{n\ge 0}\sum_{|\lambda|=n} h_\lambda(x)m_\lambda(y).
\end{aligned}$$

Pour (ix) on écrit :

$$\begin{aligned}
\log\prod_i \frac{1}{1-x_iu} &= \sum_i \log\frac{1}{1-x_iu} = \sum_i\sum_{n\ge 1}\frac{x_i^n}{n}u^n\\
&= \sum_{n\ge 1}\frac{u^n}{n}\sum_i x_i^n = \sum_{n\ge 1}\frac{u^n}{n}p_n(x).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\log\prod_i\prod_j\frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_i\sum_{n\ge 1}\frac{x_i^n}{n}p_n(y) = \sum_n p_n(x)p_n(y)\frac{1}{n}. \quad \square$$

Remarque. — l'identité (iv) est importante pour la suite. Elle implique que toute relation algébrique sur les e_r et les h_r pert être récrite en remplaçant chaque e_r par h_r et réciproquement.

Certaines des identités précédentes peuvent s'exprimer comme des relations entre déterminants. D'abord (iv) implique les identités :

$$\begin{cases} h_1 - e_1 = 0 \\ h_2 - h_1 e_1 + e_2 = 0 \\ \qquad \dots \\ h_r - h_{r-1} e_1 + h_{r-2} e_2 - \cdots + (-1)^r e_r = 0 \end{cases}$$

Considérons ces identités comme un système de r équations en les r inconnues $-e_1$, e_2, $-e_3$, $\dots$ et résolvons le système à l'aide des déterminants. On obtient la solution :

$$(-1)^r e_r = \begin{bmatrix} 1 & & & & -h_1 \\ h_1 & 1 & & & -h_2 \\ h_2 & h_1 & 1 & & -h_3 \\ . & . & . & \dots & . \\ h_{r-1} & h_{r-2} & \dots & h_1 & -h_r \end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 1 & & & \\ h_2 & h_1 & 1 & & \\ . & . & . & & \\ h_{r-1} & h_{r-2} & h_{r-3} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

soit

$$e_r = \begin{bmatrix} h_1 & 1 & & & & \\ h_2 & h_1 & 1 & & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & 1 & & \\ . & . & . & . & & \\ h_{r-1} & h_{r-2} & . & \dots & h_1 & 1 \\ h_r & h_{r-1} & . & \dots & h_2 & h_1 \end{bmatrix} = \det(h_{1+i-j}),$$

avec la convention que $h_k = 0$, si $k \le -1$.

Par dualité (*cf.* remarque précédente), on a

$$h_r = \det(e_{1+i-j}) \qquad (1 \le i, j \le n).$$

De la même façon (vii) conduit au système

$$\begin{cases} h_1 - p_1 = 0 \\ 2h_2 - h_1 p_1 - p_2 = 0 \\ 3h_3 - h_2 p_1 - h_1 p_2 - p_3 = 0 \\ \qquad \dots \\ r h_r - h_{r-1} p_1 - h_{r-2} p_2 - \cdots - p_r = 0 \end{cases}$$

De là

$$p_r = \begin{bmatrix} 1 & & & & & h_1 \\ h_1 & 1 & & & & 2h_2 \\ h_2 & h_1 & 1 & & & 3h_3 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ h_{r-1} & h_{r-2} & h_{r-3} & \dots & h_1 & r h_r \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{r-1} \begin{bmatrix} h_1 & 1 & & & & \\ 2h_2 & h_1 & 1 & & & \\ 3h_3 & h_2 & h_1 & 1 & & \\ . & . & . & . & \dots & 1 \\ r h_r & h_{r-1} & h_{r-2} & h_{r-3} & \dots & h_1 \end{bmatrix}.$$

Le système peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} -h_1 = -p_1 \\ p_1h_1 - 2h_2 = -p_2 \\ p_2h_1 + p_1h_2 - 3h_3 = -p_3 \\ \qquad \cdots \\ p_{r-1}h_1 + \cdots + p_1h_{r-1} - rh_r = -p_r \end{cases}$$

d'où

$$h_r = \begin{bmatrix} -1 & & & & -p_1 \\ p_1 & -2 & & & -p_2 \\ p_2 & p_1 & -3 & & -p_3 \\ . & . & . & \cdots & . \\ p_{r-1} & p_{r-2} & p_{r-3} & \cdots & -p_r \end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ p_1 & -2 & & & \\ p_2 & p_1 & -3 & & \\ . & . & . & \cdots & \\ p_{r-1} & p_{r-2} & p_{r-3} & \cdots & -r \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{r!} \begin{bmatrix} p_1 & -1 & & & & \\ p_2 & p_1 & -1 & & & \\ p_3 & p_2 & p_1 & & & \\ . & . & . & . & & \\ p_{r-1} & p_{r-2} & . & \cdots & p_1 & -(r-1) \\ p_r & p_{r-1} & . & \cdots & p_2 & p_1 \end{bmatrix}.$$

Notons encore que l'identité $E'(u) = E(u)P(-u)$ conduit à l'identité :

$$ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r p_r e_{n-r},$$

soit

$$\begin{cases} e_1 - p_1 = 0 \\ 2e_2 - e_1p_1 + p_2 = 0 \\ 3e_3 - e_2p_1 + e_1p_2 - p_3 = 0 \\ \qquad \cdots \end{cases}.$$

D'où :

$$p_r = \begin{bmatrix} e_1 & 1 & & & & \\ 2e_2 & e_1 & 1 & & & \\ 3e_3 & e_2 & e_1 & 1 & & \\ . & . & . & . & \cdots & (r-1) \\ p_r & p_{r-1} & p_{r-2} & p_{r-3} & \cdots & p_1 \end{bmatrix};$$

$$e_r = \frac{1}{r!} \begin{bmatrix} p_1 & 1 & & & & \\ p_2 & p_1 & 2 & & & \\ p_3 & p_2 & p_1 & 3 & & \\ . & . & . & . & \cdots & (r-1) \\ p_r & p_{r-1} & p_{r-2} & p_{r-3} & \cdots & p_1 \end{bmatrix}.$$

6. L'involution ω

Puisque les e_r sont algébriquement indépendants, on peut définit un homomorphisme d'anneau $\omega : \Lambda \to \Lambda$ par :

$$\omega(e_r) = h_r \qquad (r \geq 0).$$

La relation (iv) de la proposition 4.1 montre que ω est en fait une *involution* : $\omega^2 = \text{l'application identique}$.

Proposition 6.1. — *Les h_λ forment une $\mathbb{Z}$-base de Λ. De plus, $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots]$ et les h_r sont algébriquement indépendants.*

Démonstration. — L'involution ω est aussi un automorphisme de Λ. Il résulte du corollaire 3.2 que les fonctions h_r sont aussi algébriquement indépendantes. $\square$

Proposition 6.2. — *Les p_λ forment une $\mathbb{Q}$-base de Λ. L'algèbre des fonctions symétriques à coefficients rationnels est encore l'algèbre des polynômes $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$. De plus, les p_r sont algébriquement indépendants.*

Démonstration. — Il résulte, en effet, de la proposition 4.1 (vii) et aussi des expressions déterminantales p(écédentes que h_n est dans $\mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n]$ et que p_n est dans $\mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_n]$. D'où $\mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n] = \mathbb{Q}[h_1, \ldots, h_n]$. $\square$

Notons enfin que les expressions déterminantales obtenues pour exprimer les p_r en fonction des e_r permettent d'écrire :

$$\omega(p_r) = \begin{bmatrix} \omega(e_1) & 1 & \\ 2\omega(e_2) & \omega(e_1) & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 1 & \\ 2h_2 & h_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} = (-1)^{r-1} p_r.$$

De là

$$\omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_\lambda.$$

7. Relations entre h_n, e_n et les p_λ

Si $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \ldots$ est une partition écrite sous forme multiplicative, on définit

$$z_\lambda = 1^{m_1} m_1!\, 2^{m_2} m_2! \,\ldots$$

Il est bon de noter que si C_λ désigne l'ensemble des permutations d'ordre n dont la structure de cycles est donnée par $1^{m_1} 2^{m_2} \ldots n^{m_n}$, autrement dit, si C_λ désigne l'ensemble de toutes les permutations ayant exactement m_1 cycles de longueur 1, m_2 cycles de longueur 2, … , alors $z_\lambda = n!/\,|C_\lambda|$.

Proposition 7.1. — *On a :*

$$H(u) = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda u^{|\lambda|}\,; \qquad E(u) = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda u^{|\lambda|}, ;$$

$$h_n = \sum_{|\lambda| = n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda\,; \qquad e_n = \sum_{|\lambda| = n} (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver la permière identité. Or $P(u) = (d/du)\log H(u)$ implique

$$H(u) = \exp\sum_{r\ge1} p_r\frac{u^r}{r} = \prod_{r\ge1}\exp\Bigl(p_r\frac{u^r}{r}\Bigr) = \prod_{r\ge1}\sum_{m_r\ge0}\frac{(p_r u^r)^{m_r}}{r^{m_r}}\frac{1}{m_r!}$$
$$= \sum_{\lambda} u^{\Sigma r m_r}\frac{\prod p_r^{m_r}}{\prod r^{m_r} m_r!} = \sum_{\lambda} u^{|\lambda|} p_\lambda \frac{1}{z_\lambda}. \quad \square$$

8. Relations déterminantales entre les h_r et les e_r

On a obtenu précédemment les relations $e_r = \det(h_{1+i-j})$ et $h_r = \det(e_{1+i-j})$. Nous nous proposons de déterminer deux expressions déterminantales sur les e_r et les h_r.

PROPOSITION 8.1. — *Soit λ, μ deux partitions de longeur au plus égale à p ; supposons que leurs conjuguées λ', μ' soient de longueur au plus égale à q. Alors*

$$\det(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})_{(1\le i,j\le p)} = \det(e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j})_{(1\le i,j\le q)}.$$

En particulier

$$\det(h_{\lambda_i-i+j})_{(1\le i,j\le p)} = \det(e_{\lambda'_i-i+j})_{(1\le i,j\le q)}.$$

Plusieurs lemmes classiques sont nécessaires pour démontrer cette proposition. Rappelons que l'*adjointe* $\operatorname{adj} A$ d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ $(1 \le i, j \le n)$ est la matrice transposée de la matrice des premiers mineurs signés. En d'autres termes, si $A_{i,j}$ est la sous-matrice obtenue de A par suppression de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne, alors $\operatorname{adj} A$ est la matrice

$$\operatorname{adj} A = \bigl((-1)^{i+j}\det A_{j,i}\bigr) \qquad (1 \le i, j \le n).$$

LEMME 8.2. — *On a* $\det\operatorname{adj} A = (\det A)^{n-1}$.

Démonstration. — Si $\det A \ne 0$, alors $A^{-1} = (1/\det A)\operatorname{adj} A$. D'où $\det A^{-1} = (1/\det A) = (1/\det A)^n \det\operatorname{adj} A$. Ainsi $\det\operatorname{adj} A = (\det A)^{n-1}$. Si A est singulière, alors la matrice produit $A.\operatorname{adj} A$ est égale à $\det A.I$, c'est-à-dire à la matrice nulle. De là, à la fois A et $\operatorname{adj} A$ sont singulières et l'identité du lemme 8.2 est démontrée. $\square$

LEMME 8.2 (Jacobi). — *Chaque mineur signé dans* $\operatorname{adj} A$ *d'ordre k est égal au mineur complémentaire de la matrice transposée ${}^tA$ de A, multiplié par* $(\det A)^{k-1}$.

Soit $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ et $J = \{j_1 < \cdots < j_k\}$ les deux ensembles d'indices pour les lignes et les colonnes d'un mineur M de la matrice $\operatorname{adj} A$. Notons $I' = \{i'_1 < \cdots < i'_{n-k}\}$ et $J' = \{j'_1 < \cdots < j'_{n-k}\}$ les ensembles complémentaires $[\,n\,] \setminus I$ et $[\,n\,] \setminus J$. Puis formons la matrice $B = (b_{i,j})$ définie par :

$b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{j,i}$, si $j \in J$ et i quelconque ;

$b_{i'_1,j'_1} = b_{i'_2,j'_2} = \cdots = b_{i'_{n-k},j'_{n-k}} = 1$;

le reste des coefficients étant nuls. Formons alors le produit matriciel $AB = C = (c_{i,j})$. Quand A est multiplié par la $j^{\text{ième}}$ colonne de B avec j appartenant à J, on obtient la $j^{\text{ième}}$ colonne $(0,\ldots,0,c_{j,j} = \det A, 0, \ldots, 0)^t$. Lorsque j appartient à J', disons $j = j'_r$, le produit de A par la $j^{\text{ième}}$ colonne de B donne une colonne qui est égale à la colonne de A indiciée par i'_r.

Maintenant $\det B = \det M\,(-1)^{i_1-1+\cdots+i_k-k+j_1-1+\cdots+j_k-k}$ et

$$\det C = (\det A)^k = \begin{vmatrix} a_{j'_1,i'_1} & \ldots & a_{j'_1,i'_{n-k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j'_{n-k},i'_1} & \ldots & a_{j'_{n-k},i'_{n-k}} \end{vmatrix}.$$

De là $\det A.\det B = \det C$, soit

$$\det A.\det\big((\operatorname{adj} A)_{i,j}\big)_{(i\in I, j\in J)}(-1)^{i_1-1+\cdots+i_k-k+j_1-1+\cdots+j_k-k} = \big(\det A\big)^k \det(a_{j,i})_{(j\in J', i\in I')}. \tag{8.1}$$ □

Illustrons la démonstration pour $n = 6$, $I = 1,2,6$, $J = 2,4,5$. Posons $D_{i,j} = (-1)^{i+j}A_{i,j}$. Rappelons-nous d'abord que

$$a_{k,1}D_{i,1} + a_{k,2}D_{i,2} + \cdots + a_{k,n}D_{i,n} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq i\,; \\ \det A, & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Le produit $A.B = C$ est alors, en posant $\det A = D$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \ldots & a_{6,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & D_{2,1} & . & D_{4,1} & D_{5,1} & . \\ . & D_{2,2} & . & D_{4,2} & D_{5,2} & . \\ 1 & D_{2,3} & . & D_{4,3} & D_{5,3} & . \\ . & D_{2,4} & 1 & D_{4,4} & D_{5,4} & . \\ . & D_{2,5} & . & D_{4,5} & D_{5,5} & 1 \\ . & D_{2,6} & . & D_{4,6} & D_{5,6} & . \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,3} & . & a_{1,4} & . & . & a_{1,5} \\ a_{2,3} & D & a_{2,4} & . & . & a_{2,5} \\ a_{3,3} & . & a_{3,4} & . & . & a_{3,5} \\ a_{4,3} & . & a_{4,4} & D & . & a_{4,5} \\ a_{5,3} & . & a_{5,4} & . & D & a_{5,5} \\ a_{6,3} & . & a_{6,4} & . & . & a_{6,5} \end{pmatrix}.$$

En prenant le déterminant de chacun des membres, on obtient :

$$D\,(-1)^{(2-1)+(4-2)+(5-3)+(1-1)+(2-2)+(6-3)}\begin{vmatrix} D_{2,1} & D_{4,1} & D_{5,1}\\ D_{2,2} & D_{4,2} & D_{5,2}\\ D_{2,6} & D_{4,6} & D_{5,6}\end{vmatrix}$$
$$= D^3\begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5}\\ a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5}\\ a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5}\end{vmatrix} = D^3\det(a_{j,i})_{(j\in J',i\in I')}.$$

Démontrons alors la proposition 8.1. Posons $p+q=N+1$ et formons les matrices :

$$H=(h_{i-j})\ (0\le i,j\le N) \quad \text{et} \quad E=\big((-1)^{i-j}e_{i-j}\big)\ (0\le i,j\le N),$$

avec la convention que $h_k=e_k=0$, lorsque $k\le -1$. Les matrices H et E sont triangulaires inférieures avec des 1 le long de leurs diagonales. De là $\det H=\det E=1$. Calculons les coefficients du produit $H.E$:

$$\sum_{k=0}^{N} h_{i-k}(-1)^{k-j}e_{k-j} = \sum_{j\le k\le i} h_{i-k}(-1)^{k-i}e_{k-j}$$
$$= \sum_{0\le l\le i-j} h_{i-j-l}(-1)^l e_l = \begin{cases} 0, & \text{si } i-j\ge 1 \text{ ou si } i-j\le -1\,;\\ 1, & \text{si } i-j=0,\end{cases}$$

d'après la proposition 4.1 (iv). Ainsi $H.E=I$ (la matrice identité) et $E^{-1}=H=(1/\det E)\operatorname{adj}E=\operatorname{adj}E$. Considérons le mineur de H dont les lignes ont les indices λ_i+p-i et les colonnes les indices μ_i-p-i $(1\le i\le p)$. Dans les notations du lemme 8.2, on a :

$$I=\{\lambda_1+p-1,\lambda_2+p-2,\dots,\lambda_p\}\,;\quad J=\{\mu_1+p-1,\mu_2+p-2,\dots,\mu_p\}.$$

Or on sait que

$$I'=[0,N]\setminus I=\{p-\lambda'_1,p+1-\lambda'_2,\dots,p+q-1-\lambda'_q\}\,;$$
$$J'=[0,N]\setminus J=\{p-\mu'_1,p+1-\mu'_2,\dots,p+q-1-\mu'_q\}.$$

Écrivons la formule (8.1) avec $A=E$ et $\operatorname{adj}E=H$. Le signe du mineur $\det(H_{i,j})_{(i\in I,j\in J)}=\det(h_{\lambda_i+p-i-(\mu_j+p-j)})=\det(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})_{(1\le i,j\le p)}$ est simplement $(-1)^{|\lambda|+|\mu|}$, car le nombre d'inversions nécessaires pour placer la ligne indicée λ_p en position 0 est λ_p, la ligne indicée $\lambda_{p-1}+1$ est $\lambda_{p-1}+1-1=\lambda_{p-1}$, etc... De là, le mineur complémentaire dans E est

$$\det(E_{j,i})_{(j\in J',i\in I')}=\det\big((-1)^{p+j-1-\mu'_j-(p+i-1-\lambda'_i)}e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\big)$$
$$=\det\big((-1)^{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\big)_{(1\le i,j\le q)}.$$

La formule (8.1) se récrit donc :

$$\det\bigl(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\bigr)_{(1\le i,j\le p)}(-1)^{|\lambda|+|\mu|} = \det\bigl((-1)^{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\bigr)_{(1\le i,j\le q)}.$$

D'où

$$\det\bigl(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\bigr)_{(1\le i,j\le p)} = \det\bigl(e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\bigr)_{(1\le i,j\le q)}. \qquad \square \tag{8.2}$$

9. Alternants

Un polynôme $P(x)$ en n variables est dit *alternant* ou *antisymétrique*, si pour toute permutation σ de $(1,2,\ldots,n)$, on a :

$$P(x_{\sigma 1},x_{\sigma 2},\ldots,x_{\sigma n}) = \varepsilon(\sigma)\,P(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

le symbole $\varepsilon(\sigma)$ désignant la signature de la permutation σ. Soit A_n (resp. A_n^k) l'espace de tous les alternants en n variables (resp. en n variables homogènes de degré k y compris le polynôme nul). Alors chaque alternant $P(x)$ appartenant à A_n^k peut s'écrire

$$P(x) = \sum_{\substack{\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_n\\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}} c(\alpha)\,\det\bigl(x_i^{\alpha_j}\bigr)_{(1\le i,j\le n)},$$

puisque, si $P(x)$ contient le terme $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ avec le coefficient $c(\alpha)$, il contient aussi le terme $x_{\sigma 1}^{\alpha_1}\ldots x_{\sigma n}^{\alpha_n}$ avec le coefficient $\varepsilon(\alpha)c(\alpha)$. D'autre part, les α_i sont tous distincts, car autrement chaque déterminant $\det\bigl(x_i^{\alpha_j}\bigr)$ serait nul. On note également que $c(\alpha)$ est le coefficient de x^α dans $P(x)$.

Comme $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_n$, on peut supposer : $\alpha_i=\lambda_i+n-i$ $(i=1,2,\ldots)$, de sorte que $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots>\lambda_n$ et $k=|\alpha|=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+n(n-1)/2$. Ainsi

$$P(x) = \sum_{|x|=k=n(n-1)/2} c(\lambda)\,\det\bigl(x_i^{\lambda_j+n-j}\bigr)_{(1\le i,j\le n)}.$$

Par conséquent, il n'existe pas d'alternant en n variables de degré (strictement) inférieur à $n(n-1)/2$.

Le déterminant $a_\delta=\det\bigl(x_i^{n-j}\bigr)$ $(1\le i,j\le n)$, où $\delta=(n-1,n-2,\ldots,1,0)$ est le déterminant de Vandermonde, égal à $\prod_{i<j}(x_i-x_j)$. Le déterminant $a_\alpha=\det\bigl(x_i^{\alpha_j}\bigr)$ peut s'écrire $a_\alpha=a_{\lambda+\delta}=\det\bigl(x_i^{\lambda_j+n-j}\bigr)$. Or si deux α_i sont égaux, il est nul. Il est donc *divisible* par (x_i-x_j) $(i\ne j)$ et de là par le produit $a_\delta=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$, c'est-à-dire par a_δ.

Définition. — Le quotient $s_\lambda(x_1,\dots,x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ est appelé *fonction de Schur* en les variables $x_1, \dots, x_n$ associée à la partition λ.

La fonction de Schur $a_{\lambda+\delta}$ est *symétrique* et *homogène* de degré k. Ceci résulte du fait qu'elle est le rapport de deux alternants. D'autre part, les alternants $a_{\lambda+\delta}$ ($|\lambda| = k$, $l(\lambda) \le n$) forment une base pour $A_n^{k+n(n-1)/2}$. L'application $A \mapsto a_\delta Q$ est un isomorphisme de Λ_n^k sur $A_n^{k+n(n-1)/2}$, son noyau étant nul, puisque $a_\delta Q = 0 \Rightarrow Q = 0$. On a donc prouvé la proposition suivante :

PROPOSITION 9.1. — *Les fonctions de Schur $s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ ($|\lambda| = k$, $l(\lambda) \le n$) forment une $\mathbb{Z}$-base pour Λ_n^k et les fonctions de Schur $s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ ($l(\lambda) \le n$) forment une $\mathbb{Z}$-base pour Λ_n.*

Comme pour les précédentes bases de Λ, on a besoin d'une relation de compatibilité, démontrée dans le lemme suivant.

LEMME 9.2. — *Soit $l(\lambda) = l$ et p, q deux entiers tels que $l \le p < q$. Alors*

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_p) = s_\lambda(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_q)\Big|_{x_{p+1}=\dots=x_q=0}.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier la proposition pour $q = p+1$. D'abord $a_{\lambda+\delta}(x_1,\dots,x_{p+1})$ est égal à :

$$\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p} & \dots & x_1^{\lambda_p+1} & x_1^{\lambda_{p+1}} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_p^{\lambda_1+p} & \dots & x_p^{\lambda_p+1} & x_p^{\lambda_{p+1}} \\ x_{p+1}^{\lambda_1+p} & \dots & x_{p+1}^{\lambda_p+1} & x_{p+1}^{\lambda_{p+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p} & \dots & x_1^{\lambda_p+1} & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_p^{\lambda_1+p} & \dots & x_p^{\lambda_p+1} & 1 \\ x_{p+1}^{\lambda_1+p} & \dots & x_{p+1}^{\lambda_p+1} & 1 \end{vmatrix},$$

puisque $\lambda_{p+1} = 0$. De là $a_{\lambda+\delta}(x_1,\dots,x_p,0)$ vaut

$$\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p} & \dots & x_1^{\lambda_p+1} & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_p^{\lambda_1+p} & \dots & x_p^{\lambda_p+1} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1\dots x_p \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p-1} & \dots & x_1^{\lambda_p} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_p^{\lambda_1+p-1} & \dots & x_p^{\lambda_p} \end{vmatrix}$$

$$= x_1\dots x_p\, a_{\lambda+\delta}(x_1,\dots,x_p).$$

De là

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_p,0) = \frac{x_1\dots x_p\, a_{\lambda+\delta}(x_1,\dots,x_p)}{x_1\dots x_p\, a_\delta(x_1,\dots,x_p)} = s_\lambda(x_1,\dots,x_p). \quad \square$$

On peut définir les fonctions de Schur comme des suites infinies $s_\lambda = \big(s_\lambda(x_1,\dots,x_n)\big)$ ($n \ge 0$). Ainsi les s_λ *forment une $\mathbb{Z}$-base pour Λ et les s_λ ($|\lambda| = k$) une $\mathbb{Z}$-base pour Λ^k.*

10. Autres expressions déterminantales

Les fonctions de Schur s'expriment encore comme de simples déterminants en les h_k et les e_k, comme indiqué dans la proposition suivante.

PROPOSITION 10.1. — *On a :*

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \det\big(h_{\lambda_i - i + j}\big)_{(1\le i,j\le n)} \quad (n \ge l(\lambda))\,; \\ x_\lambda &= \det\big(e_{\lambda'_i - i + j}\big)_{(1\le i,j\le m)} \quad (m \ge l(\lambda')\,; \end{aligned}$$

où l'on convient toujours que les coefficients sont nuls lorsque les indices des h_k ou des e_k sont strictement négatifs.

Démonstration. — De nouveau, on part de l'identité : $H(u)E(-u) = 1$. Soit $e_i^{(k)}$ la fonction symétrique élémentaire de $x_1, \ldots , x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots ,$ x_n et soit $E^{(k)}(u)$ la fonction génératrice $\sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(k)} u^r$. On a naturellement

$$\sum_{p\ge 0} h_p u^p \sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(k)} (-u)^r = (1 - x_k u)^{-1}.$$

Considérons alors une suite $(b_1, \ldots, b_n)$ d'entiers positifs et déterminons le coefficient de u^{b_m} dans les deux membres de l'équation précédente. On obtient

$$\sum_{r=0}^{n-1} h_{b_m - r} (-1)^r e_r^{(k)} = x_k^{b_m},$$

ou avec $r + j = n$

$$\sum_{r=1}^{n} h_{b_m - n + j} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)} = x_k^{b_m}.$$

Soit $\mathcal{E}$ la matrice $n \times n$ dont la $k^{\text{ième}}$ ligne est donnée par

$$\big((-1)^{n-1} e_{n-1}^{(k)}, \ldots, (-1) e_1^{(k)}, e_0^{(k)}\big)$$

et soit $\mathcal{H}$ la matrice dont la $m^{\text{ième}}$ colonne $\mathcal{H}_{\cdot,m}$ s'écrit

$$\mathcal{H}^t_{\cdot,m} = \big(h_{b_m - n + 1}, h_{b_m - n + 2}, \ldots, h_{b_m}\big).$$

Alors la dernière identité peur se récrire comme le produit de matrices :

$$\mathcal{H}\mathcal{E} = \big(x_k^{b_m}\big).$$

En prenant le déterminant de chaque membre, on obtient : $\det \mathcal{H}. \det \mathcal{E} = \det\bigl(x_k^{b_m}\bigr)$. Lorsque $b = \delta$, il en résulte : $1 \times \det \mathcal{E} = \det\bigl(x_k^{n-j}\bigr) = a_\delta$. On en tire : $\det\bigl(h_{b_j - n+i}\bigr)a_\delta = \det\bigl(x_i^{b_j}\bigr)$. Avec $b_i = \lambda_i + n - i$, cette identité devient :

$$\det\bigl(h_{\lambda_j+n-j-n+i}\bigr)a_\delta = \det\bigl(x_i^{\lambda_j+n-j}\bigr),$$

i.e.,

$$\det\bigl(h_{\lambda_j-j+i}\bigr) = \det\bigl(h_{\lambda_i-i+j}\bigr) = \det\bigl(x_i^{\lambda_j+n-j}\bigr).$$

La seconde identité découle de la proposition 8.1. $\square$

Les deux identités de la précédente proposition impliquent

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}.$$

De même

$$s_{(n)} = \det h_n = h_n\,.$$
$$s_{(1^n)} = \det e_n = e_n.$$

11. La fonction génératrice des produits de fonctions de Schur

On a déjà obtenu une expression pour le développement du produit $\prod(1 - x_i y_j)^{-1}$, à savoir :

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y). \tag{11.1}$$

Il en existe deux autres :

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(x)p_\lambda(y)\,; \tag{11.2}$$

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y). \tag{11.3}$$

Dans ces développements λ parcourt l'ensemble de toutes les partitions des entiers. D'abord (11.2) résulte de l'identité

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \exp \sum_{n\ge 1} p_n(x)p_n(y)\frac{1}{n},$$

puisque le membre de droite peut s'écrire

$$\begin{aligned}\prod_{n\ge1}\sum_{k_n\ge0} p_n(x)^{k_n}p_n(y)^{k_n}\frac{1}{n^{k_n}k_n!} &= \sum_{(n_i)}\sum_{(k_{n_i})}\prod_i \frac{p_{n_i}(x)^{k_{n_i}}\,p_{n_i}(y)^{k_{n_i}}}{n_i^{k_{n_i}}k_{n_i}!}\\ &= \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}p_\lambda(x)p_\lambda(y).\end{aligned}$$

Ceci démontre (11.2). La troisième identité repose sur l'identité de Binet-Cauchy, qui elle-même s'exprime par :

$$\det\bigl((1-x_iy_j)^{-1}\bigr)_{(1\le i,j\le n)} = a_\delta(x)a_\delta(y)\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-1}.$$

La démonstration de l'identité de Binet-Cauchy se fait comme suit. Multiplions la $i^{\text{ième}}$ ligne du déterminant $\det\bigl((1-x_iy_j)^{-1}\bigr)$ par le produit $\prod_{k=1}^{n}(1-x_iy_k)$ et faisons-le pour chaque $i=1,\ldots,n$. Le coefficient en (i,j) devient

$$\begin{aligned}\prod_{k\ne j}(1-x_iy_k) &= \sum_{r=0}^{n-1} x_i^r(-1)^r e_r^{(j)}(y) \qquad [e_r^{(j)}(y)=e_r(y_1,\ldots,\check{y}_j,\ldots,y_n)]\\ &= \sum_{r=1}^{n} x_i^{n-r}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(j)}(y).\end{aligned}$$

Ce qui s'interprète en produit de matrices comme

$$\Bigl(\prod_{k\ne j}(1-x_iy_k)\Bigr)_{(i,j)} = \bigl(x_i^{n-j}\bigr)_{(i,j)}\,\bigl((-1)^{n-i}e_{n-i}^{(j)}(y)\bigr)_{(i,j)}\,;$$

et en produit de déterminants comme

$$\begin{aligned}\det\Bigl(\prod_{k\ne j}(1-x_iy_k)\Bigr)\Bigl(&=\prod_{i,j}(1-x_iy_j)\det\bigl((1-x_iy_j)^{-1}\bigr)\Bigr)\\ &=\det\bigl(x_i^{n-j}\bigr)\det\bigl((-1)^{n-i}e_{n-i}^{(j)}(y)\bigr)\\ &=a_\delta(x)a_\delta(y),\end{aligned}$$

se rappelant que $a_\delta(x)=\det\bigl(x_i^{n-j}\bigr)$ et $\det\bigl((-1)^{n-i}e_{n-i}^{(j)}(y)\bigr)=\det\mathcal{E}=a_\delta(y)$, dans les notations de la section précédente.

Maintenant pour établir (11.3), on développe chaque terme $(1-x_iy_j)^{-1}$ dans le déterminant :

$$\begin{aligned}\det\bigl((1-x_iy_j)^{-1}\bigr) &= \det\Bigl(\Bigl(\sum_{m\ge0}x_i^my_j^m\Bigr)\Bigr)\\ &= \det\Biggl(\sum_{\alpha_1}\begin{pmatrix}x_1^{\alpha_1}y_1^{\alpha_1}\\ \vdots\\ x_n^{\alpha_1}y_1^{\alpha_1}\end{pmatrix},\ldots,\sum_{\alpha_n}\begin{pmatrix}x_1^{\alpha_n}y_n^{\alpha_n}\\ \vdots\\ x_n^{\alpha_n}y_n^{\alpha_n}\end{pmatrix}\Biggr)\\ &= \sum_{\alpha}\det\bigl(x_i^{\alpha_j}y_j^{\alpha_j}\bigr) \qquad [\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n]\end{aligned}$$

$$= \sum_\alpha \det\Bigl(y_1^{\alpha_1}\begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} \\ \vdots \\ x_n^{\alpha_1}\end{pmatrix}, \dots, y_n^{\alpha_n}\begin{pmatrix} x_1^{\alpha_n} \\ \vdots \\ x_n^{\alpha_n}\end{pmatrix}\Bigr)$$
$$= \sum_\alpha y^\alpha \det\bigl(x_i^{\alpha_j}\bigr) = \sum_\alpha y^\alpha a_\alpha(x).$$

Comme $a_\alpha(x) = 0$ si les α_i ne sont pas tous distincts, on en déduit :

$$\begin{aligned}\det\bigl((1-x_iy_j)^{-1}\bigr) &= \sum_{\beta_1>\cdots>\beta_n\geq 0}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} y^{\sigma\beta} a_{\sigma\beta}(x)\\ &= \sum_\beta \sum_{\sigma\in S_n} y^{\sigma\beta}\varepsilon(\sigma)a_\beta(x)\\ &= \sum_\beta a_\beta(x)a_\beta(y) = \sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x)a_{\lambda+\delta}(y),\end{aligned}$$

où $l(\lambda) \leq n$. De là

$$\prod_{i,j=1}^n (1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_n).$$

L'identité est aussi vraie pour une infinité de variable (x_i, y_j), car le coefficient de $x_{i_1}^{r_1}\dots x_{i_n}^{r_n}y_{j_1}^{r_1}\dots y_{j_n}^{r_n}$ $(i_1 < \cdots < i_n\,;\ j_1 < \cdots < j_n)$ dans le produit $\prod_{i,j\geq 1}(1-x_iy_j)^{-1}$ est égal au coefficient du même monôme dans le produit *fini* $\prod_{1\leq i,j\leq N}(1-x_iy_j)^{-1}$, où $i_n, j_n \leq N$. L'identité étant déjà vérifiée dans le cas fini, le précédent coefficient est égal au coefficient du même monôme dans $s_\lambda(x_1,\dots,x_N)s_\lambda(y_1,\dots,y_N)$, et aussi dans $s_\lambda(x_1,\dots,x_M)s_\lambda(y_1,\dots,y_M)$ pour tout $M \geq N$, à cause de la propriété de compatibilité des s_λ : $s_\lambda(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0) = s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$. $\square$

12. Relations entre les bases de l'algèbre des fonctions symétriques

On peut déterminer explicitement les formules de changement de base de l'algèbre des fonctions symétriques. Dans cette section, nous nous proposons simplement de donner des règles de calcul simples dans le cas où les partitions sont des partitions d'entiers peu élevés.

PROPOSITION 12.1. — *Si $h_\lambda = \sum_\mu K'_{\lambda\mu}s_\mu$, alors $s_\mu = \sum_\lambda K'_{\lambda\mu}m_\mu$. Si $s_\mu = \sum_\lambda H_{\lambda\mu}h_\lambda$, alors $m_\lambda = \sum_\mu H_{\lambda\mu}s_\mu$.*

Démonstration. — De la double identité

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y),$$

on déduit $\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \sum_\lambda m_\lambda(x)\sum_\mu K'_{\lambda\mu}s_\lambda(y)$, de sorte que $s_\mu = \sum_\lambda K'_{\lambda\mu}m_\mu$.

De la même façon, on a $\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \sum_\mu \sum_\lambda H_{\lambda\mu}h_\lambda(x)s_\mu(x) = \sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(x)$; d'où l'on tire $m_\lambda(x) = \sum_\mu H_{\lambda\mu}s_\mu(x)$. $\square$

Les coefficients $H_{\lambda\mu}$ peuvent se calculer en réexprimant les fonctions de Schur s_μ comme des rapports de deux déterminants : $a_{\mu+\delta}/a_\delta$. Multiplions, en effet, la relation $m_\lambda = \sum_\mu H_{\lambda\mu}s_\mu$ par $a_\delta = \sum \pm x_1^{n-1}x_2^{n-2}\dots x_{n-1}$. On obtient

$$\sum x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}\sum \pm x_1^{n-1}x_2^{n-2}\dots x_{n-1} = \sum_\mu H_{\lambda\mu}\sum \pm x_1^{\mu_1+n-1}\dots x_n^{\mu_n}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer quels sont les réarrangements des exposants $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ qui ajoutés terme à terme à la suite $(n-1,\dots,1,0)$ fournissent une suite d'entiers *distincts*. Si deux entiers sont égaux le déterminant correspondant est, en effet, nul. On réarrange ensuite les termes des suites obtenues en ordre décroissant en notant la signature de la permutation permettant ce réarrangement. Le coefficient $H_{\lambda\mu}$ est alors la somme des signatures de toutes ces permutations.

Exemple 12.2. — Considérons $m_{211} = \sum x_1^2x_2x_3$. Il suffit de prendre quatre variables ($n = 4$). Ici $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = (2,1,1,0)$. Tous les réarrangements de $(2,1,1,0)$ sont donc à ajouter à la suite $(n-1, n_2,\dots,0) = (3,2,1,0)$ et à déterminer ceux qui donnent une suite d'entiers distincts. On réarrange ensuite en ordre décroissant. On obtient ainsi :

3 2 1 0	somme	réarrangement	signature	s_λ
1 1 0 2	4 3 1 2	4 3 2 1	$-$	s_{1^4}
1 0 2 1	4 2 3 1	4 3 2 1	$-$	s_{1^4}
0 2 1 1	3 4 2 1	4 3 2 1	$-$	s_{1^4}
2 1 1 0	5 3 2 0	5 3 2 0	$+$	s_{21^2}

D'où $m_{21^2} = s_{21^2} - 3s_{1^4}$.

Exemple 12.3. — Pour m_{2^2}, on doit prendre : $\lambda = (2,2,0,0)$. D'où

3 2 1 0	somme	réarrangement	signature	s_λ
2 2 0 0	5 4 1 0	5 4 1 0	$+$	s_{2^2}
2 0 2 0	5 2 3 0	5 3 2 0	$-$	s_{21^2}
0 2 0 2	3 4 1 2	4 3 2 1	$+$	s_{1^4}

Soit $m_{2^2} = s_{2^2} - s_{21^2} + s_{1^4}$.

Exemple 12.4. — Pour m_{31}, on doit prendre : $\lambda = (3,1,0,0)$. D'où

3 2 1 0	somme	réarrangement	signature	s_λ
3 1 0 0	6 3 1 0	6 3 1 0	$+$	s_{31}
1 3 0 0	4 5 0 0	5 4 0 0	$-$	s_{2^2}
0 3 1 0	3 5 2 0	5 3 2 0	$-$	s_{21^2}
0 0 3 1	3 2 4 1	4 3 2 1	$+$	s_{1^4}
1 0 0 3	4 2 1 3	4 3 2 1	$+$	s_{1^4}

Soit $m_{31} = s_{31} - s_{21^2} - s_{2^2} + 2s_{1^4}$.

Exemple 12.5. — Pour m_4, on doit prendre : $\lambda = (4,0,0,0)$. D'où

3 2 1 0	somme	réarrangement	signature	s_λ
4 0 0 0	7 2 1 0	7 2 1 0	$+$	s_4
0 4 0 0	3 6 1 0	6 3 1 0	$-$	s_{31}
0 0 4 0	3 2 5 0	5 3 2 0	$+$	s_{21^2}
0 0 0 4	3 2 1 4	4 3 2 1	$-$	s_{1^4}

Soit $m_4 = s_4 - s_{31} + s_{21^2} - s_{1^4}$.

Tous ces calculs permettent de déterminer la matrice $(H_{\lambda\mu})$ pour $|\lambda| = |\mu| = 4$. On a ainsi :

$\mu =$	4	31	2^2	21^2	1^4
$\lambda = 4$	1	-1	0	1	-1
31		1	-1	-1	2
2^2			1	-1	1
21^2				1	-3
1^4					1

D'après la proposition 11.1, on peut exprimer les s_μ en fonction des h_λ à l'aide de la même matrice $(H_{\lambda\mu})$ de coefficients, soit $s_\mu = \sum_\lambda H_{\lambda\mu} h_\lambda$. On a ainsi : $s_{21^2} = h_{21^2} - h_{2^2} - h_{31} + h_4 = h_2 h_1^2 - h_2^2 - h_3 h_1 + h_4$, relation qui s'exprime aussi comme un déterminant :

$$\det(h_{\lambda_i - i + j}) = \begin{vmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & h_0 & h_1 \end{vmatrix}.$$

Cherchons enfin la relation entre les matrices $(H_{\lambda\mu})$ et $(K'_{\lambda\mu})$. On a : $h_\lambda = \sum_\mu K'_{\lambda\mu} s_\mu = \sum_\mu K'_{\lambda\mu} \sum_\nu H_{\nu\mu} h_\nu = \sum_\nu h_\nu \sum_\mu K'_{\lambda\mu} H_{\nu\mu}$. De là $\sum_\mu H_{\nu\mu} K_{\mu\lambda} = \delta_{\lambda\nu}$. Si donc $(K_{\lambda\mu})$ désigne la *transposée* de la matrice $(K'_{\lambda\mu})$, on a :

$$(H_{\lambda\mu})(K_{\lambda\mu}) = \mathrm{Id}.$$

En prenant l'inverse de la matrice $(H_{\lambda\mu})$ ci-dessus, on obtient ainsi :

$$
(K_{\lambda\mu}) = \begin{array}{rc} \mu = & \begin{array}{ccccc} 4 & 31 & 2^2 & 21^2 & 1^4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \lambda = 4 \\ 31 \\ 2^2 \\ 21^2 \\ 1^4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Les coefficients $K_{\lambda\mu}$ sont les *nombres de Kostka*. Ils possèdent des propriétés combinatoires intéressantes.

13. La définition des fonctions de Schur

Soient λ et μ deux partitions telles que le diagramme de Ferrers associé à μ soit contenu dans le diagramme de Ferrers associé à λ. La différence ensembliste $\lambda \setminus \mu$ est appelé *tableau gauche* et est notée λ/μ.

Un tableau gauche est appelé *bande horizontale*, si chaque colonne contient au plus une case de ce tableau gauche. Notons λ_i et μ_i les parts des partitions λ et μ, respectivement. Comme le montre la Fig. 1, le tableau gauche λ/μ est une bande horizontale si et seulement si, pour tout i, on a $\lambda_{i+1} \leq \mu_i$, soit

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$$

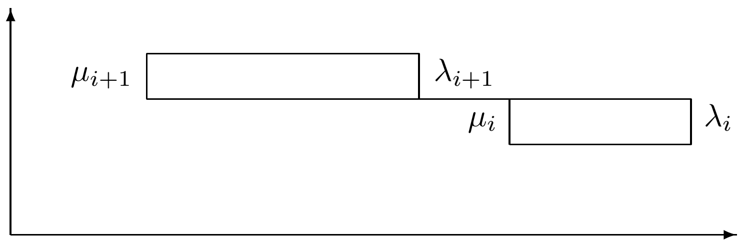


Fig. 1

On appelle *remplissage* d'un diagramme de Ferrers une application, qui à chaque case du diagramme fait correspondre, un nombre entier. Notons $l(\lambda)$ le nombre de parts non nulles de λ. Un *tableau semi-standard* T, de forme λ et de contenu $1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}$ $(m_1+m_2+\cdots+m_n = |\lambda| = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{l(\lambda)})$, est défini comme étant un remplissage du diagramme de Ferrers correspondant à λ, par m_1 entiers 1, m_2 entiers 2, … , m_n entiers n, de sorte que chaque ligne (resp. chaque colonne) du tableau, lue de gauche à droite (resp. de bas en haut), soit croissante au sens large (resp. croissante au sens strict). La *valuation* $v(T)$ du tableau T est définie par :

$$v(T) := x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}.$$

Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, le sous-ensemble des cases du tableau semi-standard T contenant un entier égal à i est une bande horizontale, puisque la croissance par colonne est stricte. En posant $\lambda_0 := \emptyset$, $\lambda^{(n)} := \lambda$ et $\lambda^{(i)}$ égal à la forme du tableau ne contenant que des entiers au plus égaux à i, cette bande horizontale peut être notée : $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$; désignons par $\lambda_j^{(i)}$ les parts de $\lambda^{(i)}$. Pour tout entier $i = 1, 2, \ldots, n$, on a donc les inégalités :

$$\lambda_1^{(i)} \geq \lambda_1^{(i-1)} \geq \lambda_2^{(i)} \geq \lambda_2^{(i-1)} \geq \lambda_3^{(i)} \geq \lambda_3^{(i-1)} \geq \cdots$$

Avec ces notations, la valuation du tableau T est donnée par :

$$v(T) = x_1^{|\lambda^{(1)}|-|\lambda^{(0)}|} x_2^{|\lambda^{(2)}|-|\lambda^{(1)}|} \ldots\ x_n^{|\lambda^{(n)}|-|\lambda^{(n-1)}|}.$$

Théorème (Définition combinatoire des fonctions de Schur). — *On a l'identité :*

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_T v(T),$$

où la somme est sur tous les tableaux semi-standard, de forme λ et de contenu $1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}$ tel que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = |\lambda|$. On peut encore écrire :

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\emptyset=\lambda^{(0)}\subset\lambda^{(1)}\subset\cdots\subset\lambda^{(n)}=\lambda \\ \lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)} \text{ bande horizontale}}} x_1^{|\lambda^{(1)}|-|\lambda^{(0)}|} x_2^{|\lambda^{(2)}|-|\lambda^{(1)}|} \ldots\ x_n^{|\lambda^{(n)}|-|\lambda^{(n-1)}|}.$$

La formule est certainement vraie pour $n = 1$, puisque les seules fonctions de Schur $s_\lambda(x_1)$, en une seule variable x_1, sont les monômes $x_1^{|\lambda|}$, avec $\lambda = \lambda^{(1)}$ réduit à une seule part. On peut récrire la seconde formule de l'énoncé du théorème précédent comme

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\lambda^{(n-1)}\subset\lambda} x_n^{|\lambda|-|\lambda^{(n-1)}|} \sum_{\lambda^{(0)}\subset\lambda^{(1)}\subset\cdots\subset\lambda^{(n-1)}} x_1^{|\lambda^{(1)}|-|\lambda^{(0)}|} \ldots\ x_{n-1}^{|\lambda^{(n-1)}|-|\lambda^{(n-2)}|},$$

gardant en mémoire que chaque tableau gauche $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ est une bande horizontale. Dans la seconde sommation, on retrouve la formule du théorème écrite pour $(n-1)$ variables. En utilisant l'hypothèse de récurrence et en posant $\mu := \lambda^{(n-1)}$, on est donc amené à démontrer l'identité suivante :

$$(\star) \qquad s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\mu \\ \lambda/\mu \text{ bande horizontale}}} x_n^{|\lambda|-|\mu|}\, s_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Pour démontrer $(\star)$, on procède comme suit. Considérons le déterminant $a_\lambda(x_1,\dots,x_n) := \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{(1\le i,j\le n)}$ et évaluons

$$a_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},1) = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_1^{\lambda_n+n-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1}^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_{n-1}^{\lambda_n+n-n} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Retranchons de chaque colonne d'indice inférieur ou égal à $(n-1)$ la colonne suivante. On obtient :

$$\begin{vmatrix} & & & x_1^{\lambda_n} \\ & E & & \\ & & & x_{n-1}^{\lambda_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

où E est la matrice $(x_i^{\lambda_j+n-j} - x_i^{\lambda_{j+1}+n-j-1})_{(1\le i,j\le n-1)}$. Or

$$\begin{aligned} x_i^{\lambda_j+n-j} - x_i^{\lambda_{j+1}+n-j-1} &= (x_i-1)\sum_{\lambda_{j+1}+n-j-1\le t\le\lambda_j+n-j-1} x_i^t \\ &= (x_i-1)\sum_{\lambda_{j+1}\le\mu_j\le\lambda_j} x_i^{\mu_j+n-j-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \det E &= \det\Big((x_i-1)\sum_{\lambda_{j+1}\le\mu_j\le\lambda_j} x_i^{\mu_j+n-j-1}\Big)_{(1\le i,j\le n-1)} \\ &= \prod_{1\le i\le n}(x_i-1)\times\sum_{\substack{(\lambda_{j+1}\le\mu_j\le\lambda_j)\\(1\le j\le n-1)}} \det(x_i^{\mu_j+n-j-1})_{(1\le i,j\le n-1)}. \end{aligned}$$

En divisant $\det E$ par $\Delta(x_1,\dots,x_{n-1},1) = \prod_{1\le i\le n}(x_i-1)\cdot\Delta(x_1,\dots,x_{n-1})$, on obtient la fonction de Schur $s_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},1)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},1) &= \sum_{\substack{(\lambda_{j+1}\le\mu_j\le\lambda_j)\\(1\le j\le n-1)}} \frac{\det(x_i^{\mu_j+n-1-j})_{(1\le i,j\le n-1)}}{\Delta(x_1,\dots,x_{n-1})} \\ &= \sum_{\substack{\mu\\ \lambda/\mu \text{ bande horizontale}}} s_\mu(x_1,\dots,x_{n-1}). \end{aligned}$$

Comme $s_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ est de degré $|\lambda|$ par rapport à l'ensemble des variables et que $s_\mu(x_1,\dots,x_{n-1})$ est de degré $|\mu|$, on obtient

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=\sum_{\substack{\mu\\ \lambda/\mu \text{ bande horizontale}}} x_n^{|\lambda|-|\mu|}\, s_\mu(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

qui est la formule $(\star)$. □

14. Fonctions de Schur ; une seconde approche

Un tableau semi-standard de forme λ est un remplissage du diagramme de Ferrers λ par des entiers 1, 2, … de telle manière qu'il y ait une croissance stricte dans les colonnes, de bas en haut, et une croissance large dans les lignes, de gauche à droite. Soit T un tel tableau. S'il contient m_1 coefficients égaux à 1, m_2 coefficients égaux à 2, … , on définit le poids $\mathbf{x}^T$ de T comme étant le monôme

$$\mathbf{x}^T = x_1^{m_1}\, x_2^{m_2}\dots$$

Théorème. *La fonction de Schur associée à λ en les variables $x_1, x_2, \dots,$ x_n est donnée par*

$$s_\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_T \mathbf{x}^T,$$

où la somme est sur tous les tableaux semi-standard T dont les coefficients sont pris dans l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$.

Si la partition λ est de longueur l, nous démontrons d'abord l'identité

$$\sum_T \mathbf{x}^T = \det(h_{\lambda_i-j-i})\ (1\le i,j\le l),$$

où la sommation est sur tous les tableaux semi-standard dont les ceofficients sont pris dans l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$. La démonstration donnée ci-dessous utilise la technique des chemins latticiels non-intersectants.

Considérons d'abord une suite croissante $1\le i_1\le i_2\le\dots\le i_m\le n$ d'entiers compris entre 1 et n. On peut lui faire correspondre un chemin latticiel allant de $(1,0)$ à (n,m). Si la suite $(i_1,i_2,\dots,i_m)$ s'écrit $1^{j_1}2^{j_2}\dots n^{j_n}$ en notation multiplicative, le chemin latticiel va de $(1,0)$ à $(1,j_1)$, puis de $(1,j_1)$ à $(2,j_1)$, puis de $(2,j_1)$ à $(2,j_1+j_2)$, puis de $(2,j_1+j_2)$ à $(3,j_1+j_2)$, … , de $(n-1,j_1+\dots+j_{n-1})$ à $(n,j_1+\dots+j_{n-1})$ et enfin de $(n,j_1+\dots+j_{n-1})$ à $(n,j_1+\dots+j_n)=(n,m)$.

On attache le poids 1 à chaque pas horizontal du chemin latticiel et le poids x_i à tout pas vertical, s'il est situé sur l'axe $x=i$. Le poids d'un chemin latticiel est défini comme le produit des poids de ses pas élémentaires. Avec les notations précédentes, le poids, poids(π), de la suite $(i_1, i_2, \ldots, i_m) = 1^{j_1}2^{j_2}\ldots n^{j_n}$ est donné par :

$$\text{poids}(\pi) = x_1^{j_1}\, x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}.$$

On note que tous les chemins latticiels allant de $(1,0)$ à (n,m) ont un poids qui est un monôme de degré m en les variables $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$. Réciproquement, si $x_1^{j_1}\, x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$ est un monôme de degré $j_1 + j_2 + \cdots + j_n = m$, il lui correspond un chemin latticiel unique allant de $(1,0)$ à (n,m). D'où

$$h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\pi} \text{poids}(\pi),$$

où la sommation est sur tous les chemins latticiels allant de $(1,0)$ à (n,m), ou, de façon équivalente, sur toutes les suites croissantes d'entiers compris entre 1 et n qui sont de longueur m.

Soit maintenant $T = (T_{i,j})$ un tableau semi-standard, de forme $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ tel que $l \leq n$ et dont les coeffcients sont pris dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Chaque ligne du tableau T est une suite $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m \leq n$. On peut donc faire correspondre à la i-ième du tableau T, qui est de longueur λ_i, un chemin latticiel allant de $(1,0)$ à (n, λ_i). Pour la construction qui va suivre, il est plus commode, pour chaque $i = 1, \ldots, l$, de faire correspondre à la i-ième du tableau T un chemin latticiel allant de $(0, l-i)$ à $(n, l+\lambda_i - i)$. Du fait que chaque colonne du tableau T est strictement croissante, ces chemins latticiels ne se rencontrent pas.

Considérons l'ensemble des épis de source $\{(1,0), (1,1), \ldots, (1, l-1)\}$ et de but $\{(n, \lambda_l), (n, \lambda_{l-1}+1), \ldots, (n, \lambda_1 + l - 1)\}$. Pour $i = 1, \ldots, l$ le i-ième chemin d'un épi E part du point $(1, l - \sigma(i))$ pour aboutir au point $(n, l+\lambda_i - i)$. Son poids, poids(E), est défini comme le produit des poids de ses chemins latticiels. On pose également $\varepsilon(E)$ comme étant la signature de la permutation σ. On se propose d'évaluer

$$G = \sum_{E} \varepsilon(E)\, \text{poids}(E).$$

Sur l'ensemble des épis, on définit une involution ϕ qui est d'abord l'application identique sur les épis non-intersectants. Si E a deux chemins latticiels qui se rencontrent, on considère le point (i,j) le plus grand (pour l'ordre lexicographique) où deux chemins latticiels se rencontrent. On échange alors les deux extrémités des chemins partant de ce point (i,j). On obtient un autre épi $\phi(E)$ dont la parité est différente de celle de E. En revanche, les poids de E et E' restent identiques, puisque tous les pas verticaux des chemins sont préservés. On a donc

$$2G = \sum_E \varepsilon(E)\,\mathrm{poids}(E) + \sum_E \varepsilon(\phi(E))\,\mathrm{poids}\,\phi(E),$$

d'où

$$G = \sum_{E \in \mathcal{N}} \mathrm{poids}(E),$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des épis non-intersectants. Or ceux-ci sont en correspondance biunivoque avec les tableaux semi-standard. On a donc

$$G = \sum_T \mathbf{x}^T.$$

D'autre part,

$$G = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \sum_{E \in \mathcal{E}(\sigma)} \mathrm{poids}(E),$$

où $\mathcal{E}(\sigma)$ désigne l'ensemble des épis de permutation sous-jacente σ. Si E est un tel épi, on a $\mathrm{poids}(E) = \prod_{i=1}^{l} \mathrm{poids}(\pi_i)$, où pour $i = 1, \ldots, l$, le chemin latticiel π_i va de $(1-, l - \sigma(i))$ à $(n, l + \lambda_i - i)$. On écrit pour simplifier : $\pi_i \in \{(1-, l - \sigma(i)) \to (n, l + \lambda_i - i)\}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
G &= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \sum_{(\pi_1,\ldots,\pi_l) \in \mathcal{E}(\sigma)} \prod_{i=1}^{l} \mathrm{poids}(\pi_i) \\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{l} \sum_{\pi_i \in \{(1-, l-\sigma(i)) \to (n, l+\lambda_i - i)\}} \mathrm{poids}(\pi_i) \\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{l} h_{l+\lambda_i - i - (l - \sigma(i))}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{l} h_{\lambda_i + \sigma(i) - i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \det(h_{\lambda_i + j - i}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_{(1 \le i, j, \le l)}.
\end{aligned}$$

15. Exercices et compléments

Les deux derniers exercices reproduisent une méthode de Jouanolou pour le calcul des déterminants du type Vandermonde. On pourrait ajouter bien d'autres exercices portant sur l'algèbre des fonctions de Schur (voir l'ouvrage d'Alain Lascoux, *Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence (CBMS no. 99, Conf. on Alg. Combin.), 268, p., 2003).

1. — Dessiner les ensembres ordonnés $\mathcal{P}_7$, $\mathcal{P}_8$ composés de toutes les partitions des entiers 7 et 8, respectivement, équipés de l'ordre naturel :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \geq \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$$

si pour tout $i \geq 1$ on a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$.

2. — Soient λ, μ deux partitions de n. Montrer que l'on a : $\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \mu' \geq \lambda'$.

3. — Établir l'identité

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} t^{l(\lambda)} u^{|\lambda|} = \frac{1}{(1-tu)(1-tu^2)(1-tu^3)\cdots}.$$

4. — Soit $\mathcal{P}_D$ l'ensemble des partitions de parts toutes distinctes. Établir l'identité

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_D} u^{|\lambda|} = (1+u)(1+u^2)(1+u^3)\cdots.$$

5. — Établir l'identité

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_D} t^{l(\lambda)} u^{|\lambda|} = (1+tu)(1+tu^2)(1+tu^3)\cdots.$$

En déduire que

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_D} (-1)^{l(\lambda)} u^{|\lambda|} = (1-u)(1-u^2)(1-u^3)\cdots.$$

6. — Soit $\mathcal{P}_I$ l'ensemble des partitions de parts toutes impaires. Établir l'identité

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_I} u^{|\lambda|} = \frac{1}{(1-u)(1-u^3)(1-u^5)\cdots}.$$

7. — Pour chaque entier positif k on note $\mathcal{P}^{(k)}$ l'ensemble des partitions dont toutes les parts sont inférieures ou égales à k. Montrer que l'on a

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^{(k)}} u^{|\lambda|} = \frac{1}{(1-u)(1-u^2)(1-u^3)\cdots(1-u^k)}.$$

8. — On note $\mathcal{P}^{3k\pm1}$ l'ensemble des partitions dont toutes les parts sont prises dans l'ensemble $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \cdots\} = \{3k \pm 1\}$. Montrer

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^{3k\pm1}} u^{|\lambda|} = \frac{1}{(1-u)(1-u^2)(1-u^4)(1-u^5)(1-u^7)(1-u^8)\cdots}.$$

9. — On note $\mathcal{P}^{\mathrm{mult}\leq 2}$ l'ensemble des partitions dont la multiplicité de chaque part est inférieure ou égale à 2. Montrer que

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_8} u^{|\lambda|} = (1+u+u^2)(1+u^2+u^4)(1+u^3+u^6)\cdots.$$

10. — Soit $\mathcal{P}_D$ (resp. $\mathcal{P}_I$) l'ensemble de toutes les partitions ayant des parts distinctes (resp. toutes impaires). Montrer

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_D} u^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_I} u^{|\lambda|}.$$

11. — Montrer

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^{3k\pm1}} u^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{mult}\leq 2}} u^{|\lambda|}.$$

12. — Pour chaque entier positif k on note $\mathcal{P}^{[k]}$ l'ensemble des partitions de longueur inférieure ou égale à k. Montrer

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^{[k]}} u^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^{(k)}} u^{|\lambda|}.$$

13. — Montrer que

$$(1+tu)(1+tu^2)(1+tu^3)\cdots = \sum_{l\geq 0} \frac{u^{l(l+1)/2}}{(1-u)(1-u^2)\cdots(1-u^l)} t^l.$$

En déduire que

$$(1+u)(1+u^2)(1+u^3)\cdots = \sum_{l\geq 0} \frac{u^{l(l+1)/2}}{(1-u)(1-u^2)\cdots(1-u^l)}.$$

14. — *Théorème pentagonal.* Montrer que

$$(1-u)(1-u^2)(1-u^3)\cdots = \sum_{n\geq 0} \epsilon_n u^n,$$

avec

$$\epsilon_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{s'il existe } k \text{ tel que } n = (3k^2 \pm k)/2\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

15. — Pour calculer m_λ dans la base des (e_λ), on écrit : $m_\lambda = \sum x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots$. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$, on considère le produit $\sum x_1 \sum x_1^{\lambda_1 - 1} x_2^{\lambda_2} \ldots$ Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r > \lambda_{r+1}$, on considère le produit

$$\sum x_1 \ldots x_r \sum x_1^{\lambda_1 - 1} \ldots x_r^{\lambda_r - 1} x_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \ldots$$

et on fait apparaître les fonctions e_r.

Par exemple, pour calculer $m_{2,2,1}$, on écrit : $\sum x_1x_2 \sum x_1x_2x_3 = \sum x_1^2x_2^2x_3 + \binom{3}{1}\sum x_1^2x_2x_3x_4 + \binom{5}{2}\sum x_1x_2x_3x_4x_5$ et $\sum x_1 \sum x_1x_2x_3x_4 = \sum x_1^2x_2x_3x_4 + \binom{5}{1}\sum x_1x_2x_3x_4x_5$. D'où $m_{2111} = e_1e_4 - 5e_5$ et $m_{221} = e_2e_3 - 3m_{2111} - 10e_5$; d'où $m_{221} = e_2e_3 - 3e_1e_4 + 5e_5$.

Pour calculer m_λ dans la base (p_λ), on essaie de retrouver m_λ dans l'expression $\sum x_1^{\lambda_1} \ldots x_{r-1}^{\lambda_{r-1}} \sum x_r^{\lambda_r}$. Par exemple, pour m_{221}, on a : $\sum x_1^2x_2^2 \sum x_1 = \sum x_1^3x_2^2 + \sum x_1^2x_2^2x_3$; $\sum x_1^2 \sum x_1^2 = 2\sum x_1^2x_2^2 + \sum x_1^4$; $\sum x_1^3 \sum x_1^2 = \sum x_1^2x_2^2 + \sum x_1^5$. D'où $\sum x_1^3x_2^2 = p_3p_2 - p_5$; $\sum x_1^2x_2^2 = (1/2)(p_2^2 - p_4)$ et $m_{221} = (1/2)(p_2^2 - p_4)p_1 - p_3p_2 + p_5$.

Exprimer en termes des fonctions élémentaires e_r et aussi en termes des p_r les expressions suivantes :

(a) $m_{(2,2)}$; (b) $m_{(3,1)}$; (c) $m_{(2,1,1)}$; (d) $m_{(3,2)}$; (e) $m_{(2,2,2)}$; (f) $m_{(3,2,2)}$.

16. — Exprimer e_4 en termes des p_r. Substituer dans chaque p_r sa forme déterminantale en termes des e_r et vérifier le résultat.

17. — Exprimer h_4 en termes des p_r. Substituer dans chaque p_r sa forme déterminantale en termes des e_r et vérifier le résultat à l'aide des expressions de h_4 en termes des e_r.

18. — (a) En utilisant la définition combinatoire pour les fonctions de Schur, calculer $s_{21}(x_1, x_2, x_3)$.

(b) Montrer combinatoirement que toute fonction de Schur $s_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est symétrique.

(c) Soit n un entier positif. Un *mot* de longueur l est une suite $w = w_1 w_2 \cdots w_l$ tel que $1 \leq w_i \leq n$ pour tout i. Soit $w = w_1 w_2 \cdots w_l$ un tel mot. Le *nombre de descentes* $\operatorname{des} w$ est le cardinal de l'ensemble $\{i \mid 1 \leq i \leq l-1, w_i > w_{i+1}\}$ et l'*indice majeur* de w est défini comme la *somme* des entiers i du précédent ensemble. L'évaluation commutative de ce mot $\operatorname{Ev}(w)$ est le monôme donné par le produit $x^{w_1} \cdot x^{w_2} \cdots x^{w_l}$. Pour le mot $w = 24341322132$, calculer $\operatorname{des} w$, $\operatorname{maj} w$ et $\operatorname{Ev}(w)$.

(d) On pose : $F(n, l) = \sum\limits_{w = x_1 x_2 \cdots x_l} t^{\operatorname{des} w} q^{\operatorname{maj} w} \operatorname{Ev}(w)$. Calculer $F(2, 3)$.

(e) Montrer que le polynôme $F(n, l)$ est symétrique.

19. *Déterminant de Borchardt.* — On fixe n. Soient $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux alphabets. On note $\Delta(X) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ le déterminant de Vandermonde.

(a) On pose $m_{ij} = (x_i^2 - y_j^2)(a^2 x_i^2 - y_j^2)$. Montrer que la fonction de partition Z_n s'exprime aussi comme la formule suivante :

$$Z_n = \frac{\prod_i x_i^{2-n} y_i^{-n}}{(a^2 - 1)^{n(n-1)}} \frac{\prod_{i,j} m_{ij}}{\prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)(y_j^2 - y_i^2)} \det\left(\frac{1}{m_{ij}}\right)_{i,j}.$$

(b) Établir l'identité

$$\det\left(\frac{1}{x_i - y_j}\right)_{i,j} = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \Delta(X)\Delta(Y) \prod_{i,j} \frac{1}{x_i - y_j}.$$

(c) Montrer que

$$\det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right)_{i,j} = \Delta(X)\Delta(Y) \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}.$$

(d) Soit λ une partition. On note $s_\lambda(X)$ la fonction de Schur. Montrer que

$$\det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right)_{i,j} = \Delta(X)\Delta(Y) \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y).$$

En déduire

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y).$$

Cette dernière peut être démontrer directement à l'aide de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth.

(e) Etablir l'identité de Borchardt :

$$\det\left(\frac{1}{(x_i-y_j)^2}\right)_{i,j} = \det\left(\frac{1}{x_i-y_j}\right)_{i,j} \cdot \mathrm{Per}\left(\frac{1}{x_i-y_j}\right)_{i,j}.$$

20. — *Le calcul du déterminant de Vandermonde* (Jouanolou)—Considérons une suite de polynômes $(P_1(x),\ldots,P_n(x))$ tous de degré au plus égal à $n-1$. Pour $i=1,2,\ldots,n$ on pose $P_j(x)=a_{1,j}x^{n-1}+a_{2,j}x^{n-2}+\cdots+a_{n,j}$. On a l'identité matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(x_1) & P_2(x_1) & \ldots & P_n(x_1) \\ P_1(x_2) & P_2(x_2) & \ldots & P_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n) & P_2(x_n) & \ldots & P_n(x_n) \end{pmatrix}.$$

En prenant le déterminant des deux membres, on en déduit :

$$\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)\det((a_{i,j})) = \det((P_j(x_i))),$$

où $\Delta=\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est le déterminant de Vandermonde.

Prenons comme polynômes $P_1(x) = (x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$, $P_2(x)=(x-x_3)\cdots(x-x_n)$, … , $P_{n-1}=(x-x_n)$, $P_n=1$. La matrice $(a_{i,j})$ est alors *triangulaire inférieure* avec des 1 le long de la diagonale. La matrice $(P_j(x_i))$ est *triangulaire supérieure.* On a donc l'identité :

$$\Delta = P_1(x_1)\,P_2(x_2)\,\cdots\,P_n(x_n) = \prod_{i<j}(x_i-x_j).$$

21*. Les déterminants de Weyl.* — Les déterminants de Weyl associés aux systèmes de racines B_n, C_n, D_n se calculent suivant la méthode de Jouanolou (Exercice 20). Appelons B la matrice d'ordre n dont la i-ième ligne est

$$(1-x_i^{2n-1},\quad x_i-x_i^{2n-2},\quad \ldots\quad,\quad x_i^{n-2}-x_i^{n+1},\quad x_i^{n-1}-x_i^{n}).$$

Chacun des coefficients est divisible par $(1-x_i)$. Lorsque pour chaque $i=1,2,\ldots,n$ on divise les coefficients de la matrice B par $(1-x_i)$ on obtient une matrice dont la i-ième ligne est donnée par :

$$(x_i^{2n-2}+\cdots+1,\quad x_i^{2n-3}+\cdots+x_i,\quad \ldots\quad,\quad x_i^{n}+x_i^{n-1}+x_i^{n-2},\quad x_i^{n-1}).$$

Soustrayons le n-ième terme des $(n-1)$ premiers termes, puis le $(n-1)$-ième terme des $(n-2)$ précédents, ... , enfin le second terme du premier. En faisant ces opérations pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ on obtient une nouvelle matrice B'' dont la i-ième ligne est donnée par :

$$(x_i^{2n-2}+1, \quad x_i^{2n-3}+x_i, \quad \ldots \quad , \quad x_i^n + x_i^{n-2}, \quad x_i^{n-1}).$$

La dernière suite d'opérations ne modifie par le déterminant de la matrice, de sorte que l'on a :

$$\det B = \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \times \det B' = \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \times \det B''.$$

Soit $A = (a_{i,j})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ une matrice de coefficients. Comme dans le calcul précédent du déterminant de Vandermonde, le produit matriciel $B'' \cdot A$ peut se noter $\big(P_j(x_i)\big)$, où pour chaque j le terme $P_j(x)$ est un polynôme de la forme

$$\begin{aligned} P_j(x) = a_{1,j}(x^{2n-2}+1) + a_{2,j}(x^{2n-3}+x) \\ + \cdots + a_{n-1,j}(x^n + x^{n-2}) + a_{n,j}\, x^{n-1}. \end{aligned}$$

Un tel polynôme est caractérisé par l'équation :

$$x^{2n-2}\, P_j(1/x) = P_j(x).$$

Considérons les polynômes :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^0 \prod_{2\leq j\leq n}(x-x_j)(xx_j-1), \\ P_2(x) &= x^1 \prod_{3\leq j\leq n}(x-x_j)(xx_j-1), \\ \ldots \quad & \quad \ldots \\ P_{n-1}(x) &= x^{n-2}(x-x_n)(xx_n-1), \\ P_n(x) &= x^{n-1}. \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté qu'on a bien $x^{2n-2}\, P_j(1/x) = P_j(x)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Il existe donc une matrice de coefficients $A = \big(a_{ij}\big)$ telle que $B'' \times A = \big(P_j(x_i)\big)$, qui est *triangulaire inférieure* et dont la diagonale est donnée par

$$(x_n \ldots x_3 x_2, \ x_n \ldots x_3, \ \ldots, \ x_n, \ 1).$$

Par ailleurs, la matrice $\big(P_j(x_i)\big)$ est *triangulaire supérieure*. On a donc :

$$\begin{aligned}(\det B'')(\det A) &= P_1(x_1)\,P_2(x_2)\,\cdots\,P_n(x_n)\\ &= x_2^1 x_3^2 \ldots x_n^{n-1} \prod_{1\le i\le n}\ \prod_{i+1\le j\le n} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1),\end{aligned}$$

et donc

$$\det B'' = \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1),$$

et enfin

$$\det B = \prod_{1\le i\le n} (1 - x_i) \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1).$$

Pour le système de racines C_n on introduit la matrice C dont la i-ième ligne est donnée par

$$(1 - x_i^{2n},\ x_i - x_i^{2n-1},\ \ldots\ ,\ x_i^{n-3} - x_i^{n+3},\ x_i^{n-2} - x_i^{n},\ x_i^{n-1} - x_i^{n+1}).$$

En divisant par $(1 - x_i^2)$ cette i-ième ligne on obtient la ligne

$$\begin{aligned}&(x_i^{2n-2} + \cdots + x_i^2 + 1,\ x_i^{2n-3} + \cdots + x_i^3 + x_i,\ \ldots\ ,\\ &\qquad\qquad x_i^{n+1} + x_i^{n-1} + x_i^{n-3},\ x_i^{n} + x_i^{n-2},\ x_i^{n-1}).\end{aligned}$$

En soustrayant le dernier terme du terme de rang $(n-2)$, puis du terme de rang $(n-4)$, ... , on fait disparaître x_i^{n-1} de tous ces termes. En soustrayant l'avant dernier-terme $x_i^n + x_i^{n-2}$ des termes de rang $(n-3)$, $(n-5)$, ... , on fait disparaître cette expression dans tous ces termes. La ligne i se termine alors par $(\ \ldots\ ,\ x_i^{n+1} + x_i^{n-3},\ x_i^n + x_i^{n-2},\ x_i^{n-1})$. On soustrait alors le terme de rang $(n-2)$ des termes de rang $(n-4)$, $(n-6)$, ... On continue ainsi jusqu'au terme de rang 3 qu'on soustrait du premier terme. La ligne i se présente alors sous la forme :

$$(x_i^{2n-2} + 1,\ x_i^{2n-3} + x_i,\ \ldots\ ,\ x_i^{n+1} + x_i^{n-3},\ x_i^n + x_i^{n-2},\ x_i^{n-1}).$$

La matrice obtenue est exactement la matrice notée B'' précédemment. On peut donc conclure immédiatement :

$$\det C = \prod_{1\le i\le n} (1 - x_i^2) \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1).$$

Examinons enfin la matrice D dont la i-ième ligne est donnée par :

$$(1 + x_i^{2n-2},\ x_i + x_i^{2n-3},\ \ldots\ ,\ x_i^{n-3} + x_i^{n+1},\ x_i^{n-2} + x_i^{n},\ x_i^{n-1} + x_i^{n-1}).$$

Cette i-ième ligne est égale à la i-ième ligne de B'', à l'exclusion du terme de rang n qui est égal à deux fois le terme correspondant de B''. On a donc immédiatement :

$$\det D = 2 \times \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1).$$