

APPROXIMATION DES SYSTÈMES DE LOIS DE CONSERVATIONS HYPERBOLIQUES

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Équation de transport, courbe caractéristique. Le Système de Lois de Conservation (SLC) le plus simple à étudier est l'équation de transport scalaire 1D qui s'écrit

$$(1) \quad c_t + uc_x = 0.$$

La vitesse u est une constante et l'inconnue est une fonction $c(t, x)$ qui dépend du temps t et de l'espace x . On ajoute à cette équation une condition initiale

$$c(0, x) = c_0(x).$$

Pour résoudre, on utilise la méthode des caractéristiques. Une caractéristique est une courbe $(t, x(t))$ le long de laquelle la solution de (1) est constante. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c(t, x(t)) &= 0, \\ c_t + x'(t)c_x &= 0. \end{aligned}$$

Ceci nous dit que $x'(t) = u$. La caractéristique a donc pour paramétrage $(t, x_0 + ut)$. Il s'ensuit que

$$(2) \quad c(t, x) = c_0(x - ut).$$

Si on s'intéresse à la solution de (1) dans un intervalle $]0, L[$, on constate alors que l'on ne peut pas imposer des CL des deux côtés (si $u > 0$, il faut imposer $c(t, 0) = c_g$ et si $u < 0$, il faut imposer $c(t, L) = c_d$.)

Exercice 1. Résoudre, pour une vitesse donnée $u > 0$, le problème

$$\begin{aligned} c_t + uc_x &= 0, & t > 0, & \quad x \in]0, L[, \\ c(0, x) &= c_0(x), & & \quad x \in]0, L[, \\ c(t, 0) &= g(t). \end{aligned}$$

1.2. Système de Friedrichs. On peut alors s'intéresser au cas du système linéaire 1D du premier ordre (où système de Friedrichs). Le problème se pose

$$(3) \quad c_t + Ac_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in R,$$

$$(4) \quad c(0, x) = c_0(x).$$

Où A est une matrice $m \times m$, le vecteur $c(t, x)$ de taille m est l'inconnue.

Si la matrice A du système de Friedrichs (3) est diagonalisable avec des valeurs propres réelles, le système est dit (strictement) hyperbolique.

On notera $(r_k)_{k=1\dots m}$ les m vecteurs propres (à droite) de cette matrice et $(\lambda_k)_{k=1\dots m}$ les valeurs propres correspondantes.

Exercice 2. Montrer que le problème (3), (4) admet une solution et une seule dans $C^0([0, T], L^2(R))$ quand la condition initiale c_0 est dans L^2 . Utiliser une transformée de Fourier. Que se passe-t-il si A est réelle mais pas ses valeurs propres ?

Exercice 3. Calculer la solution du problème (3), (4) dans le cas où la condition initiale s'écrit

$$c_0(x) = \begin{cases} c_g & \text{si } x < 0, \\ c_d & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Trouver une formule simple pour $Ac(t, 0)$, utilisant les notations $v^+ = \max(v, 0)$, et $v^- = \min(v, 0)$.

1.3. Équation de Burgers. Les choses se compliquent quand les équations deviennent non-linéaires. L'exemple le plus simple pour voir se qui se passe est donné par l'équation de Burgers

$$(5) \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$

$$(6) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Exercice 4. Montrer que même si la condition initiale est régulière, il n'existe pas toujours de solution régulière. Pour cela, considérer une condition initiale de classe C^∞ qui vérifie $u(x) = 1$ si $x < 0$ et $u(x) = 0$ si $x > 1$. Utiliser la méthode des caractéristiques.

Cet exercice montre qu'il est nécessaire d'étendre la notion de solution (ici forte). Pour cela, il est tentant de multiplier l'équation (5) par une fonction test et d'intégrer par parties. On choisit la fonction test φ dans $C_0^\infty(R^+ \times R)$. Attention cet espace est différent de $C_0^\infty(R^{+*} \times R)$, car la fonction test a le droit d'être non nulle en $t = 0$, ce qui nous permettra d'imposer de manière faible la condition initiale. Il vient

$$(7) \quad \int_{t \geq 0} \int_{x \in R} \varphi u_t + \varphi \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$

$$(8) \quad \int_{t \geq 0} \int_{x \in R} -\varphi_t u - \varphi_x \left(\frac{u^2}{2}\right) - \int_{x \in R} \varphi(t, \cdot) u_0 = 0.$$

L'intérêt de cette dernière écriture est qu'il n'y a plus de dérivée sur u et qu'elle a donc encore un sens quand u appartient (par exemple) à $C([0, T], L^\infty)$. D'où la

Définition 1. La fonction u de $C([0, T], L^\infty)$ est une solution faible du problème (5), (6) ssi la relation (8) est vraie pour toute fonction test φ de $C_0^\infty(R^+ \times R)$.

Exercice 5. Le calcul précédent montre que si $u \in C^1([0, T] \times R)$ est une solution forte de (5), (6) alors u est forcément une solution faible. Montrer que la réciproque est vraie.

Si une solution faible présente une discontinuité, nous allons voir que nous pouvons tirer de la définition 1 une relation appelée relation de saut ou de Rankine-Hugoniot. On suppose donc que u est de classe C^1 sauf sur une ligne de discontinuité paramétrée par $(t, x(t))$. On note $\sigma = x'(t)$ la vitesse de la discontinuité. On note u_g et u_d les valeurs de u de part et d'autre de la discontinuité et $[u] = u_d - u_g$ le saut de u à travers la discontinuité.

Proposition 1. Si u est solution faible de l'équation de Burgers, alors u satisfait la relation de saut

$$\left[\frac{u^2}{2}\right] = \sigma[u],$$

soit encore

$$(9) \quad \frac{u_g + u_d}{2} = \sigma.$$

Cette relation de saut peut se généraliser pour les solutions faibles d'une équation du type $G(u)_t + F(u)_x = 0$. La relation de saut est alors $\sigma [G(u)] = [F(u)]$. Attention, certains calculs formels ne sont plus valables avec les solutions faibles comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 6. Vérifier qu'une solution faible de $u_t + (u^2/2)_x = 0$ n'est pas forcément solution faible de $(u^2/2)_t + (u^3/3)_x = 0$. Pour cela, considérer la fonction

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La proposition 1 va nous permettre de vérifier que, malheureusement, il peut y avoir plusieurs solutions faibles à l'équation de Burgers. L'espace de départ de recherche de la solution forte a été trop "agrandi".

Exercice 7. On pose

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soient alors les deux fonctions $u_1(t, x)$ et $u_2(t, x)$ définies par

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x/t < 1/2, \\ 1 & \text{si } x/t > 1/2. \end{cases}$$

et

$$u_2(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x/t < 0, \\ x/t & \text{si } 0 < x/t < 1, \\ 1 & \text{si } x/t > 1. \end{cases}$$

Montrer qu'elles sont toutes les deux solutions de (5), (6).

En raisonnant sur les caractéristiques, Lax a proposé une condition assez simple pour éliminer les solutions supplémentaires. Pour que le problème d'évolution soit bien posé en présence d'un choc (c'est un autre nom pour "discontinuité"), il faut pouvoir déterminer les propriétés du choc : sa vitesse σ et les valeurs de u_g et u_d sur le choc, soit trois inconnues. La relation de saut de Rankine-Hugoniot (9) fournit une équation. Si la courbe caractéristique venant de la gauche va plus vite que le choc, i.e. $u_g > \sigma$ et si le choc rattrape la caractéristique venant de la droite i.e. $\sigma > u_d$, alors, on dispose de deux équations supplémentaires. Mais comme $\sigma = 1/2(u_g + u_d)$ est compris entre u_g et u_d , la condition de Lax s'écrit

$$(10) \quad u_g > u_d.$$

Définition 2. Une solution de Lax est une solution faible qui vérifie en plus (10) sur les chocs.

On admet que cette solution est cette fois unique.

Exercice 8. Calculer la solution de Lax du problème

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \\ u(0, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Exercice 9. Calculer la solution de Lax du problème (dit problème de Riemann)

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \\ u(0, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Calculer, en particulier, $u(t, 0^+)^2/2$ et $u(t, 0^-)^2/2$. Vérifier que ces deux quantités sont égales. Retrouver ce résultat à partir de la condition de saut.

1.4. Schéma de Godunov. Le schéma de Godunov est un schéma très simple pour approcher la solution de Lax de (5), (6). On se donne un pas de temps τ , un pas d'espace h . La discrétisation est définie par $x_i = ih$ et $t^n = n\tau$. Les cellules sont des intervalles centrés sur les points de discrétisation

$$C_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[.$$

L'approximation u_i^n est définie par

$$u_i^n \simeq u(t^n, x_i).$$

Pour initialiser l'algorithme, u_i^0 peut être défini par exemple par la valeur moyenne sur la cellule C_i de la condition initiale

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(0, x) dx.$$

Le schéma de Godunov est basé sur la résolution exacte du problème de Riemann (introduit à l'exercice 9)

$$\begin{aligned} v_t + (v^2/2)_x &= 0, \\ v(0, x) &= \begin{cases} v_g & \text{si } x < 0, \\ v_d & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La solution de ce problème ne dépend que du rapport x/t (elle est dite auto-similaire.) La solution de ce problème peut donc être notée

$$v(t, x) = R(x/t, v_g, v_d).$$

Pour passer de l'instant n à l'instant $n + 1$, l'idée est de résoudre exactement le problème d'évolution suivant pendant un pas de temps τ

$$\begin{aligned} v_t + (v^2/2)_x &= 0, \\ v(0, x) &= u_i^n \text{ pour } x \in C_i. \end{aligned}$$

Si le pas de temps est assez petit, il suffit pour cela de résoudre un problème de Riemann pour chaque point $x_{i+1/2}$ (aux interfaces des cellules C_i .) Les solutions des problèmes de Riemann n'interagissent pas entre elles sous la condition de type CFL

$$\tau < \frac{h}{\sup_i |u_i^n|}.$$

La solution à l'étape $n + 1$ est alors la moyenne sur chaque cellule de la solution v à l'instant τ .

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(\tau, x) dx.$$

Exercice 10. En intégrant la loi de conservation (5) sur $]t_n, t_{n+1}[\times C_i$, montrer que le schéma de Godunov peut s'écrire

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{h} = 0,$$

avec

$$F_{i+1/2}^n = R(0^+ \text{ ou } -, u_i^n, u_{i-1}^n)^2/2.$$

Exercice 11. Programmer le schéma de Godunov et vérifier numériquement qu'il converge dans le cas de la solution de l'exercice 8.

2. LE PROBLÈME DE RIEMANN

Résoudre le problème de Riemann, c'est trouver la solution de Lax de

$$(11) \quad w_t + f(w)_x = 0,$$

$$(12) \quad w(0, x) = \begin{cases} w_g & \text{si } x < 0, \\ w_d & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ici, le système de lois de conservation considéré est de taille m . Le vecteur des variables conservées w est donc dans R^m et le flux f est une application, en général non-linéaire, de R^m dans R^m . On note $A(w)$ la jacobienne du flux

$$A(w) = f'(w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial w^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial w^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial w^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial w^m} \end{bmatrix}.$$

Le système est supposé hyperbolique. La jacobienne $A(w)$ est donc diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Les valeurs propres sont notées $\lambda_i(w)$ et les vecteurs propres correspondants sont $r_i(w)$ pour $1 \leq i \leq m$. Dans un premier temps, nous supposons que les champs sont tous vraiment non linéaires, c'est à dire que pour tout i , et pour tout état w ,

$$(13) \quad \nabla \lambda_i(w) \cdot r_i(w) \neq 0.$$

Nous supposons aussi que les valeurs propres peuvent être ordonnées

$$\lambda_1(w) < \lambda_2(w) < \dots < \lambda_m(w).$$

Dans cette section, nous introduisons les notions nécessaires à la résolution du problème de Riemann (11), (12) : ondes simples, invariants de Riemann, chocs. Nous illustrerons ces notions sur l'exemple des équations de Saint Venant pour modéliser les écoulements en eau peu profonde.

2.1. Équations de Saint Venant. Les équations de Saint-Venant s'écrivent :

$$h_t + (hu)_x = 0,$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right)_x + gha_x = 0.$$

Les inconnues sont la hauteur d'eau $h(t, x)$ et la vitesse horizontale $u(t, x)$ de la colonne d'eau. $a(x)$ est la hauteur du fond. La surface libre se trouve donc à la hauteur $h + a$.

Dans le cas de solutions régulières, les équations de Saint-Venant impliquent la conservation de l'énergie

$$E = h\frac{u^2}{2} + g\frac{h^2}{2} + gha,$$

qui s'écrit

$$E_t + \left(\left(E + g\frac{h^2}{2}\right)u\right)_x = 0.$$

Dans le cas de solutions discontinues la dernière égalité devient une inégalité.

$$E_t + \left(\left(E + g\frac{h^2}{2}\right)u\right)_x \leq 0.$$

Supposons que le fond est plat, i.e. que $a_x = 0$. En posant

$$(14) \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix},$$

et

$$(15) \quad f(w) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + \frac{g}{2}w_1^2 \end{bmatrix}.$$

Les équations de Saint Venant prennent la forme d'un système non-linéaire du premier ordre

$$w_t + f(w)_x = 0.$$

Exercice 12. Vérifier que ce système est hyperbolique, calculer les vecteurs propres et les valeurs propres. Vérifier que tous les champs sont vraiment non-linéaires.

2.2. Ondes simples, invariants de Riemann. Dans ce paragraphe, la solution $w(t, x)$ de (11) est supposée régulière. Dans ce cas, w vérifie au sens fort

$$w_t + A(w)w_x = 0,$$

et il est possible d'envisager un changement de variables $w = w(y)$. La nouvelle variable y satisfait

$$w'(y)y_t + A(w)w'(y)y_x = 0,$$

soit

$$(16) \quad y_t + B(y)y_x = 0,$$

où

$$B(y) = w'(y)^{-1}A(w(y))w'(y).$$

La matrice B est semblable à A . Il s'ensuit qu'elle est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres (moyennant un changement de base) que A . Si on note $\mu_i(y)$ les valeurs propres et $q_i(y)$ les vecteurs propres, on a

$$\begin{aligned} \mu_i(y) &= \lambda_i(w(y)), \\ q_i(y) &= w'(y)^{-1}r_i(w(y)). \end{aligned}$$

Il est important de noter que, en général, il n'existe pas de loi de conservation pour le vecteur y . Parfois, il est possible de trouver un flux $g(y)$ tel que (16) est équivalent, pour des solutions régulières, à

$$y_t + g(y)_x.$$

Même si dans ce paragraphe nous ne considérons que des solutions régulières, il ne faut pas oublier que ce système de lois de conservation n'est en général pas équivalent, au sens faible, à (11). Voir à ce sujet l'exercice 6.

Une onde simple est une solution régulière et auto-similaire de (11). On pose donc $w(t, x) = v(x/t)$. La variable $\xi = x/t$ est homogène à une vitesse (comme les valeurs propres de A .) La fonction vectorielle v doit donc vérifier (la matrice I est la matrice identité de taille m)

$$(17) \quad (A(v) - \xi I)v'(\xi) = 0.$$

Lorsque la fonction v n'est pas constante, sa dérivée $v'(\xi)$ doit donc être pour tout ξ un vecteur propre de $A(v(\xi))$ associé à la valeur propre ξ . Comme il existe m vecteurs propres linéairement indépendants, il va exister pour chaque mode propre une solution particulière. Ceci nous conduit donc à la définition suivante :

Définition 3. Une i -onde simple est une solution non constante $v(\xi)$ de (17) dont la dérivée $v'(\xi)$ est colinéaire au $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de $A(v(\xi))$, soit

$$(18) \quad v'(\xi) = \alpha(v)r_i(v).$$

Cette définition implique que

$$(19) \quad \xi = \lambda_i(v(\xi)).$$

Et cela nous permet de calculer la fonction inconnue $\alpha(v)$. En effet, en dérivant, on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= \nabla \lambda_i(v(\xi)) \cdot v'(\xi) \\ &= \alpha(v) \nabla \lambda_i(v(\xi)) \cdot r_i(v(\xi)), \end{aligned}$$

donc

$$(20) \quad \alpha(v) = \frac{1}{\nabla \lambda_i(v) \cdot r_i(v)}.$$

Le dénominateur ne s'annule jamais car les champs sont supposés vraiment non-linéaires (voir (13).) Si les vecteurs propres sont choisis de façon que $\nabla \lambda_i(v) \cdot r_i(v) = 1$, alors une i -onde simple est solution de

$$v' = r_i(v).$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution $v(\xi)$, pour $\xi > \xi_0$, qui vérifie la condition de Cauchy

$$(21) \quad v(\xi_0) = v_0.$$

Résumons les propriétés d'une i -onde simple :

Proposition 2. Soit v une i -onde simple solution de (18), (20), (21) pour $\xi > \xi_0 = \lambda_i(v_0)$. Alors le vecteur $w(t, x)$ défini par

$$w(t, x) = \begin{cases} v_0 & \text{si } x/t < \xi_0, \\ v(x/t) & \text{si } \xi_0 < x/t < \xi_1, \\ v(\xi_1) & \text{si } \xi_1 < x/t. \end{cases}$$

est solution forte de (11) (et ceci pour tout $\xi_1 > \xi_0$.)

A la notion d'onde simple est associée la notion très importante en pratique d'invariant de Riemann.

Définition 4. Un i -invariant de Riemann pour le système (11) est une fonction $R(w)$ telle que

$$(22) \quad \nabla R(w) \cdot r_i(w) = 0.$$

Exercice 13. Montrer que pour chaque mode propre, il existe $m - 1$ invariants de Riemann dont les gradients sont linéairement indépendants (utiliser le théorème des fonctions implicites.)

Exercice 14. Montrer que la propriété d'invariant de Riemann ne dépend pas du choix de variables : vérifier que si $R(w)$ est un invariant de Riemann pour (11) alors $Q(y) = R(w(y))$ est un invariant de Riemann pour le système (16).

Comme leur nom l'indique, les invariants de Riemann ont la propriété d'être constants dans les ondes simples.

Proposition 3. Soit R un i -invariant de Riemann et soit $w(t, x)$ une i -onde simple définie à la proposition 2. Alors la quantité $R(w(t, x))$ est constante

Démonstration. La démonstration découle de ce que $R(w(t, x)) = R(v(\xi))$, et

$$\frac{d}{d\xi} R(v(\xi)) = \nabla R(v) \cdot v'(\xi) = \nabla R(v) \cdot r_i(v(\xi)) = 0.$$

□

Exercice 15. Calculer les invariants de Riemann pour les équations de Saint Venant. Vérifier le calcul en le refaisant dans les variables $y = (h, u)$ au lieu de $w = (h, hu)$.

2.3. Chocs. Un choc de vitesse σ est une solution de la forme

$$(23) \quad w(t, x) = \begin{cases} w_0 & \text{si } x/t < \sigma, \\ w_1 & \text{si } x/t > \sigma. \end{cases}$$

Les relations de saut de Rankine-Hugoniot donnent

$$f(w_1) - f(w_0) = \sigma(w_1 - w_0).$$

Généralement, il est possible de trouver une matrice $A(w_0, w_1)$ telle que

$$\begin{aligned} f(w_1) - f(w_0) &= A(w_0, w_1)(w_1 - w_0), \\ A(w, w) &= A(w), \end{aligned}$$

et telle que $A(w_0, w_1)$ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles. On note $\lambda_i(w_0, w_1)$ et $r_i(w_0, w_1)$ les valeurs propres (ordonnées) et les vecteurs propres correspondant. De façon analogue aux ondes simples, on peut alors définir un i -choc.

Définition 5. Un choc de la forme (23) est un i -choc ssi $\sigma = \lambda_i(w_0, w_1)$.

Il est important, comme nous l'avons fait en (10) de s'assurer qu'un choc est bien soluble de façon unique. Les inconnues sont l'état gauche w_0 , l'état droit w_1 et la vitesse du choc σ soit $2m + 1$ inconnues. Supposons que σ soit compris entre les valeurs propres $\lambda_k(w_0)$ et $\lambda_{k+1}(w_0)$ de l'état gauche pour un certain indice k compris entre 0 et m (on pose $\lambda_0 = -\infty$ et $\lambda_{m+1} = +\infty$).

$$(24) \quad \lambda_k(w_0) < \sigma < \lambda_{k+1}(w_0).$$

Le choc est donc rattrapé par $m - k$ caractéristiques venant de la gauche. De même, supposons que σ soit compris entre les valeurs propres $\lambda_{k'}(w_1)$ et $\lambda_{k'+1}(w_1)$ de l'état droit pour un certain indice k' compris entre 0 et m (on pose $\lambda_0 = -\infty$ et $\lambda_{m+1} = +\infty$).

$$(25) \quad \lambda_{k'}(w_1) < \sigma < \lambda_{k'+1}(w_1).$$

Le choc rattrape donc k' caractéristiques venant de la droite. On obtient ainsi $m - k + k'$ relations. D'autre part les relations de Rankine-Hugoniot fournissent m relations. Il faut que $m - k + k' + m = 2m + 1$, ce qui impose $k' = k + 1$. Les inégalités (24) et (25) deviennent

$$\begin{aligned} \lambda_k(w_0) &< \sigma < \lambda_{k+1}(w_0), \\ \lambda_{k+1}(w_1) &< \sigma < \lambda_{k+2}(w_1). \end{aligned}$$

Mais par ailleurs, lorsque w_1 tend vers w_0 , les inégalités deviennent

$$\begin{aligned} \lambda_k(w_0) &\leq \lambda_i(w_0) \leq \lambda_{k+1}(w_0), \\ \lambda_{k+1}(w_0) &\leq \lambda_i(w_0) \leq \lambda_{k+2}(w_0). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que nécessairement $i = k + 1$.

Définition 6. Un i -choc est admissible au sens de Lax ssi

$$(26) \quad \lambda_i(w_1) < \sigma < \lambda_i(w_0).$$

Intuitivement, cette condition exprime que le i -choc doit être rattrapé par la $i^{\text{ème}}$ caractéristique venant de la gauche et rattraper la $i^{\text{ème}}$ caractéristique venant de la droite. D'autre part ces inégalités doivent être comparées au cas de la i -onde simple. Pour une telle onde (définie dans la proposition 2), on sait que $\xi_0 < \xi = x/t < \xi_1$. D'autre part, la relation (19) donne

$$(27) \quad \lambda_i(w_0) < \xi < \lambda_i(w_1).$$

2.4. Calculs dans le cas des équations de Saint Venant. On revient sur les équations (14), (15). Le vecteur w est appelé vecteur des variables conservatives. Le couple (h, u) est appelé vecteur des variables primitives. Il faut s'habituer à passer sans cesse d'un jeu de variables à l'autre.

La jacobienne du flux

$$A(w) = f'(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{bmatrix}$$

est diagonalisable avec des valeurs propres $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2 = u + \sqrt{gh}$ qui sont réelles. Le système est donc hyperbolique. En posant $c = \sqrt{gh}$, les vecteurs propres associés se trouvent être :

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}.$$

Quand les deux valeurs propres sont de même signe on parle de régime torrentiel (analogie avec le régime supersonique en méca flu), sinon on parle de régime fluvial. Quand une des valeurs propres est nulle, le régime est dit critique.

Dans le but d'écrire un schéma de volumes finis pour résoudre numériquement le système de Saint-Venant, on s'intéresse maintenant au problème de Riemann, qui consiste à résoudre les équations pour une condition initiale constante à gauche et à droite de $x = 0$:

$$\begin{aligned} w_t + f(w)_x &= 0, \quad t > 0, \\ w(0, x) &= \begin{cases} w_g & \text{si } x < 0, \\ w_d & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La solution ne dépend que du rapport x/t et est notée :

$$W\left(\frac{x}{t}, w_g, w_d\right) = w(t, x).$$

En fait, il suffit de trouver un état central constant $w^* = (h^*, h^*u^*)$ que l'on peut relier à w_g par une onde simple ou un choc de la première famille et à w_d par une onde simple ou un choc de la seconde famille.

Détaillons le cas de la première famille. A cette fin, il est commode d'introduire un état de Roe, qui facilite la description des chocs. Considérons deux états w_1 et w_2 séparés par un choc de vitesse s :

$$s(w_1 - w_2) = f(w_1) - f(w_2).$$

L'état de Roe $\hat{w} = \hat{w}(w_1, w_2)$ associés à ces états satisfera :

$$f(w_1) - f(w_2) = A(\hat{w})(w_1 - w_2).$$

Plusieurs choix sont possibles. On peut prendre

$$\hat{h} = \frac{h_1 + h_2}{2},$$

$$\hat{u} = \alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2,$$

avec

$$\alpha = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}.$$

Pour un choc de la première famille, on exprime alors que $w_1 - w_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1(\hat{w})$ qui se trouve aussi être la vitesse s du choc. Il suffit, par exemple, d'écrire la première relation de Rankine hugoniot. Après calculs, ces remarques conduisent à la relation

$$u^* = u_g - (h^* - h_g)Z(h^*, h_g),$$

avec

$$(28) \quad Z(h^*, h_g) = \sqrt{g \frac{h^* + h_g}{2h^*h_g}} \text{ si } h^* > h_g.$$

Pour un choc de la seconde famille, il suffit de changer de signe toutes les vitesses et d'échanger les rôles de la droite et de la gauche. On obtient :

$$(29) \quad u^* = u_d + (h^* - h_d)Z(h^*, h_d).$$

Les détente, ou ondes simples, sont des solutions régulières des équations de Saint-Venant. On peut résoudre l'équation (22) (exercice!), résoudre l'équation différentielle (18) (autre exercice!) ou supposer à t fixé que u et h sont localement monotones en x et exprimer u en fonction de h . On obtient le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & u + hu' \\ u' & uu' + g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_t \\ h_x \end{pmatrix} = 0,$$

qui conduit à

$$u = 2s\sqrt{gh} + \text{Cste}$$

avec $s = -1$ pour une détente de la première famille et $s = +1$ pour la seconde famille (pour trouver le signe, on peut revenir à l'équation (22)). On obtient ainsi

$$(30) \quad u^* = u_g - (h^* - h_g)Z(h^*, h_g),$$

avec

$$(31) \quad Z(h^*, h_g) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h^*} + \sqrt{h_g}} \text{ si } h^* < h_g.$$

Pour obtenir h^* puis u^* il suffit alors de résoudre

$$(32) \quad u_d + (h^* - h_d)Z(h^*, h_d) = u_g - (h^* - h_g)Z(h^*, h_g).$$

On peut le faire par la méthode de Newton car Z est de classe C^1 même en $h^* = h_g$. Cette régularité de Z est un résultat général que nous allons établir plus loin.

Exercice 16. Vérifier que le 1-choc est admissible (critère caractéristique de Lax) ssi $h^* > h_g$. De même, vérifier que la 1-détente est admissible ssi $h^* < h_g$.

3. ENTROPIE

3.1. Solution entropique. Partant du SLC (11), on a vu qu'il était indispensable d'ajouter une inégalité dans les chocs (27) afin d'être assuré de l'unicité de la solution. Nous allons voir ici une autre façon d'assurer l'unicité.

Définition 7. Une fonction $w \rightarrow U(w)$ est une entropie de Lax associée au flux d'entropie $w \rightarrow G(w)$ ssi U est convexe par rapport à w et si lorsque $w(t, x)$ est une fonction régulière satisfaisant (11) alors, la loi de conservation supplémentaire

$$(33) \quad U(w)_t + G(w)_x = 0$$

est satisfaite.

La formule (33) implique que

$$(34) \quad G'(w) = U'(w)f'(w).$$

Exercice 17. Montrer que toute fonction convexe de u est une entropie pour l'équation de Burgers (5).

Exercice 18. On considère un gaz de densité $\rho(t, x)$, de vitesse $u(t, x)$ et de pression $p(t, x)$ vérifiant les équations

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0. \end{aligned}$$

La pression du gaz est donnée par $p = p_0 + c^2(\rho - \rho_0)$. c est un nombre réel > 0 .

a) Ecrire le système sous la forme d'un système de lois de conservation $w_t + f(w)_x = 0$. Montrer qu'il est hyperbolique (on suppose que $\rho > 0$). Retrouver ce résultat en se plaçant dans les variables (ρ, u) .

b) Calculer les invariants de Riemann du système.

c) Trouver les entropies du système qui sont de la forme $S = \rho \frac{u^2}{2} + g(\rho)$. Pour cela, on posera $v = (\rho, u)^T$. On écrira le système (pour v régulier) sous la forme $v_t + Cv_x = 0$. L'équation d'entropie s'écrit alors $S(v)_t + F(v)_x = 0$ ou $\nabla_v S \cdot v_t + \nabla_v F \cdot v_x = 0$. On doit donc résoudre $\nabla_v F = \nabla_v S \cdot C$.

d) Trouver $\hat{w}(w_a, w_b)$ tel que $f(w_a) - f(w_b) = f'(\hat{w})(w_a - w_b)$.

Exercice 19. On considère un gaz parfait de masse volumique $\rho(t, x)$, d'énergie interne massique $\varepsilon(t, x)$, de pression $p(t, x)$ et de vitesse 1D $u(t, x)$ solution des équations d'Euler

$$w_t + f(w)_x = 0,$$

avec

$$(35) \quad w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(\varepsilon + u^2/2) \end{bmatrix}, \quad f(w) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho(\varepsilon + u^2/2) + p)u \end{bmatrix}.$$

La loi de pression est de la forme

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

En posant $\tau = 1/\rho$, une entropie physique $s(\tau, \varepsilon)$ du gaz est donnée par la résolution de

$$Tds = d\varepsilon + pd\tau,$$

où T est l'échelle de température associée à l'entropie physique.

a) Montrer que s est solution de l'EDP du premier ordre

$$s_\tau - ps_\varepsilon = 0.$$

Montrer alors que s est une fonction arbitraire de $\varepsilon\tau^{(\gamma-1)}$.

b) Montrer que si $w(t, x)$ est une fonction régulière alors s vérifie

$$s_t + us_x = 0.$$

c) On admet que si $s(\tau\varepsilon)$ est une fonction concave de τ et ε alors $w \rightarrow -\rho s$ est une fonction convexe de w . On décide de choisir $s = \log(\varepsilon\tau^{(\gamma-1)})$ (donc $T = \varepsilon$). Montrer alors que $U(w) = -\rho s$ est une entropie de Lax pour les équations d'Euler.

On sait que l'entropie physique du gaz doit croître au cours du temps (second principe de la thermodynamique). Donc l'entropie de Lax doit décroître (car $U = -\rho s$). On va généraliser ce principe de sélection des solutions à tout système hyperbolique.

Définition 8. Une solution faible de (11) $w(t, x)$ est dite entropique ssi, pour toute entropie de Lax du système,

$$(36) \quad U(w)_t + G(w)_x \leq 0.$$

Cette inégalité doit être prise au sens des distributions. En dehors des discontinuités de w l'inégalité (36) redevient une égalité. Nous allons donc regarder plus précisément ce qui se passe à la traversée d'une discontinuité.

3.2. Inégalité d'entropie dans les chocs. Soit w une solution faible entropique de (11). Soit Σ une discontinuité de w paramétrée par $(x(t), t)$ dans le plan (x, t) . La vitesse de la discontinuité est donnée par $\sigma = x'(t)$. Le vecteur normal à la discontinuité est

$$n = \frac{1}{1 + \sigma^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_t \end{bmatrix}.$$

On note w_g la valeur de w sur la discontinuité, du côté opposé à la normale et w_d la valeur de w sur la discontinuité, du côté de la normale

$$(t_0, x_0) \in \Sigma, \quad w_g = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} w(t_0 - \eta n_t, x_0 - \eta n_x), \quad w_d = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} w(t_0 + \eta n_t, x_0 + \eta n_x).$$

Et

$$[w]_\Sigma = w_d - w_g.$$

Alors, au sens des distributions

$$U(w)_t + G(w)_x = [U(w)]_\Sigma n_t + [G(w)]_\Sigma n_x.$$

Il s'ensuit, qu'à travers une discontinuité, on doit avoir

$$(37) \quad G(w_d) - G(w_g) \leq \sigma(U(w_d) - U(w_g)).$$

Exercice 20. Montrer, dans le cas de l'équation de Burgers, que la condition de choc (37) est équivalente à la condition (10).

On admettra que ce résultat reste vrai pour tout système hyperbolique admettant une entropie (au moins pour des chocs de faible amplitude) : il y a équivalence entre la condition d'entropie (37) et la condition caractéristique de Lax (26).

3.3. Viscosité évanescence. La solution entropique peut aussi être vue comme la solution limite d'un SLC avec un terme de viscosité lorsque ce terme tend vers 0. Considérons en effet la solution $w^\varepsilon(t, x)$ du système d'équations suivant

$$w_t^\varepsilon + f(w^\varepsilon)_x - \varepsilon \Delta w^\varepsilon = 0,$$

et supposons que cette fonction est très régulière et que

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{L^\infty(R^+ \times R)} &\leq C, \\ w^\varepsilon &\rightarrow w \text{ dans } L^1_{loc}(R^+ \times R). \end{aligned}$$

Alors, w est une solution entropique faible du système limite ($\varepsilon = 0$).

Exercice 21. Faire la démonstration.

4. MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN DIMENSION 1

4.1. Notations, propriétés élémentaires. Dans cette partie, on se donne une suite d'instants $t_n = n\tau$, $n \geq 0$, et une suite de points $x_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$. L'intervalle $C_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ centré sur x_i est appelé cellule ou volume fini.

4.1.1. Inégalité d'entropie sur un rectangle. Soit $w(t, x)$ une solution faible entropique de

$$(38) \quad w_t + f(w)_x = 0,$$

$$(39) \quad U(w)_t + G(w)_x \leq 0.$$

En intégrant les lois de conservation sur le rectangle $]t_n, t_{n+1}[\times]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ on trouve que

$$(40) \quad \begin{aligned} &\int_{x=x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(t_{n+1}, x) - w(t_n, x) \\ &+ \int_{t=t_n}^{t_{n+1}} f(w(t, x_{i+1/2})) - f(w(t, x_{i-1/2})) = 0 \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité d'entropie sur le rectangle $]t_n, t_{n+1}[\times]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ on trouve que

$$(41) \quad \begin{aligned} &\int_{x=x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(w(t_{n+1}, x)) - U(w(t_n, x)) \\ &+ \int_{t=t_n}^{t_{n+1}} G(w(t, x_{i+1/2})) - G(w(t, x_{i-1/2})) \leq 0. \end{aligned}$$

4.1.2. *Flux numérique, flux numérique d'entropie.* Un schéma général de volume fini sert à approcher la solution faible entropique w au moyen d'une suite w_i^n

$$w_i^n \simeq w(t_n, x_i) \simeq \frac{1}{h} \int_{C_i} w(t_n, x) dx.$$

Compte tenu de (40), il est naturel de chercher cette approximation sous la forme

$$(42) \quad hw_i^{n+1} - hw_i^n + \tau(f(w_i^n, w_{i+1}^n) - f(w_{i-1}^n, w_i^n)) = 0,$$

où $f(u, v)$ est une fonction flux numérique. Cette fonction doit vérifier $f(u, u) = f(u)$ afin que le schéma soit consistant avec le SLC de départ. Classiquement, le flux numérique dépend aussi de la normale n_{ij} sur ∂C_i orientée de la cellule i vers la cellule j . Ce flux doit vérifier

- (1) $f(w_L, w_R, n) = -f(w_R, w_L, -n)$,
- (2) $f(w, w, n) = f(w) \cdot n$,
- (3) $f(w_L, w_R) \rightarrow f(w_L, w_R, n)$ est lipschitzien.

En dimension 1 d'espace, la normale vaut $+1$ ou -1 . Le schéma de volumes finis devrait donc s'écrire

$$(43) \quad hw_i^{n+1} - hw_i^n + \tau(f(w_i^n, w_{i+1}^n, +1) - f(w_i^n, w_{i-1}^n, -1)) = 0.$$

En posant $f(w_L, w_R) = f(w_L, w_R, 1)$ on retrouve l'écriture (42).

De même, compte tenu de (41), il est naturel de chercher des schémas vérifiant de plus

$$(44) \quad hU(w_i^{n+1}) - hU(w_i^n) + \tau(G(w_i^n, w_{i+1}^n) - G(w_{i-1}^n, w_i^n)) \leq 0,$$

où $G(u, v)$ est un flux numérique d'entropie vérifiant $G(u, u) = G(u)$. Un schéma de volumes finis défini par (42) et vérifiant (44) est dit entropique. Si un schéma est entropique, c'est toujours sous une condition de type CFL

$$\lambda = \frac{\tau}{h} < K.$$

4.1.3. *Théorème de Lax-Wendroff.* Le théorème suivant (dû à Lax et Wendroff) montre l'importance des conditions 1-3 sur le flux numérique.

Théorème 1. *Soit w_i^n la solution d'un schéma de volumes finis entropique. Posons $w_h(t, x) = w_i^n$ si $(t, x) \in [t_n, t_{n+1}[\times]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ et supposons que w_h soit à variation totale bornée indépendamment de h et tende vers une fonction $u(t, x)$ dans L^1_{loc} lorsque h tend vers 0. Alors u est une solution entropique faible de (38).*

Ce théorème n'est pas très difficile à établir. En revanche, prouver la convergence de w_h vers une limite est encore à ce jour un problème mathématique ouvert pour un système de lois de conservation général. On ne sait prouver ce résultat que pour des lois de conservation scalaires, les systèmes linéaires ou les systèmes non-linéaires 2x2 (comme le système de Saint-Venant).

Démonstration. Le schéma peut encore s'écrire

$$(45) \quad \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\tau} + \frac{f(w_i^n, w_{i+1}^n) - f(w_{i-1}^n, w_i^n)}{h} = 0.$$

On définit alors

$$(46) \quad \begin{aligned} \varphi_i^n &= \frac{1}{h} \int_{C_i} \varphi(x, t_n), \\ \tilde{\varphi}(x, t) &= \varphi_i^n, \quad x \in C_i, \quad t \in [t_n, t_{n+1}[. \end{aligned}$$

Multiplications (45) par $h\varphi_i^n$ et sommons sur i et n . Notons

$$(47) \quad \begin{aligned} (T_s g)(x, t) &= g(x, t - s), \\ (S_y g)(x, t) &= g(x - y, t). \end{aligned}$$

On obtient

$$(48) \quad \int_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}} \tilde{\varphi} \frac{T_{-\tau} w_h - w_h}{\tau} + \tilde{\varphi} \frac{f(w_h, S_{-h} w_h) - f(S_h w_h, w_h)}{h} = 0,$$

$$(49) \quad \int_{t \geq \tau, x \in \mathbb{R}} -\frac{\tilde{\varphi} - T_{\tau} \tilde{\varphi}}{\tau} w_h - \int_{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}} \frac{\tilde{\varphi} w_h}{\tau} - \int_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}} f(S_h w_h, w_h) \frac{\tilde{\varphi} - S_h \tilde{\varphi}}{h} = 0.$$

□

4.1.4. *Inégalité d'entropie discrète.* L'inégalité d'entropie (44) permet de montrer des estimations a priori sur le schéma. Ces estimations donnent une indication sur la stabilité du schéma.

Supposons par exemple que la condition initiale est constante en dehors d'un ensemble borné

$$w_i^0 = w^* \text{ si } |i| > M.$$

Alors

$$w_i^n = w^* \text{ si } |i| > M + n.$$

Quitte à ajouter une fonction linéaire à l'entropie U , on peut toujours supposer que

$$U(w^*) = 0, \quad U_w(w^*) = 0.$$

On sait alors que

$$U(w) \geq c |w - w^*|^2,$$

si U est strictement convexe. On somme alors l'inégalité (44) sur tous les i pour obtenir

$$\sum_i U(w_i^{n+1}) \leq \sum_i U(w_i^n).$$

C'est une propriété de stabilité du schéma.

4.2. Schémas décentrés.

4.2.1. *Cas linéaire.* Pour approcher l'équation de convection scalaire

$$w_t + a w_x = 0,$$

où a est une vitesse constante, il est bien connu que le schéma centré explicite

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\tau}{h} a \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2},$$

est inconditionnellement instable. Avec les notations

$$a^+ = \max(a, 0), \quad a^- = \min(a, 0), \quad |a| = a^+ - a^-,$$

il vaut mieux utiliser le schéma décentré

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\tau}{h} (a^+ (w_i^n - w_{i-1}^n) + a^- (w_{i+1}^n - w_i^n)).$$

Dans ce cas, le flux numérique s'écrit

$$f(u, v) = a^+ v + a^- u,$$

ou encore

$$f(u, v) = \frac{au + av}{2} - \frac{|a|}{2} (v - u).$$

Dans le cas d'un système d'équations linéaires

$$w_t + A w_x = 0,$$

le schéma se généralise par

$$f(u, v) = \frac{Au + Av}{2} - \frac{|A|}{2} (v - u).$$

Le terme $|A|(v - u)$ est un terme de viscosité numérique. En effet, le schéma est consistant à l'ordre deux avec l'équation

$$w_t + Aw_x - h|A|w_{xx} = 0.$$

4.2.2. *Cas non-linéaire.* Si le système de lois de conservation est non-linéaire, avec $A(w) = f'(w)$, la généralisation est effectuée en cherchant un flux numérique sous la forme

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{|A|}{2}(v - u) + o(|v - u|) \\ &= \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{1}{2}d(u, v). \end{aligned}$$

Le terme $d(u, v)$ est un terme de viscosité numérique (ou de décentrage) qui doit vérifier $d(u, u) = 0$. Lorsque toutes les valeurs propres de A sont non nulles, il y a en général suffisamment de viscosité numérique pour sélectionner les bonnes discontinuités et tous les schémas se valent à peu près. En revanche, si A a des valeurs propres nulles, certains schémas pourtant couramment employés conduisent à des solutions non physiques. Un cas intéressant est celui du schéma de Roe.

4.2.3. *Schéma de Roe.* Pour construire son schéma, Roe recherche d'abord un état $\hat{w}(u, v)$ tel que

$$f(u) - f(v) = A(\hat{w}(u, v))(v - u).$$

Le flux numérique est alors donné par

$$f(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{1}{2}|A(\hat{w})|(v - u).$$

Remarque 1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de A et soit P le polynôme de degré $\leq m$ tel que pour tout i , $P(\lambda_i) = |\lambda_i|$. Alors le calcul pratique de $|A|$ est donné par

$$P(A) = |A|.$$

Le schéma de Roe n'est pas toujours entropique comme on peut le constater grâce à l'exercice suivant.

Exercice 22. Soit le système des équations d'Euler

$$\begin{aligned} w_t + f(w)_x &= 0, \\ U(w)_t + G(w)_x &\leq 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho\varepsilon + \rho u^2/2 \end{bmatrix}, & f(w) &= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho\varepsilon + \rho u^2/2 + p)u \end{bmatrix}, \\ p &= (\gamma - 1)\rho\varepsilon, & U &= -\rho \log(p/\rho^\gamma), & G &= uU. \end{aligned}$$

a) Soient w_g et w_d deux états et soit $\hat{w}(w_g, w_d)$ un état intermédiaire défini par

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sqrt{\rho_g \rho_d}, \\ \hat{u} &= \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}, \\ \hat{H} &= \frac{\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}. \end{aligned}$$

L'enthalpie totale H est définie par $H = \varepsilon + p/\rho + u^2/2$. Calculer w et $f'(w) = A(w)$ en fonction de ρ , u et H et montrer que

$$f(w_d) - f(w_g) = A(\hat{w})(w_d - w_g).$$

b) Programmer le schéma de Godunov et vérifier numériquement que ce schéma est entropique, i.e. que la production d'entropie (44) a le bon signe. Dans ce cas, le flux numérique d'entropie est donné par

$$G(u, v) = G(R(0, u, v)),$$

où, comme d'habitude, $R(0, u, v)$ désigne la solution du problème de Riemann entre les états u et v en $x/t = 0$.

c) Programmer le schéma de Roe. Le tester sur des cas simples avec des vitesses d'onde suffisantes pour que la viscosité numérique soit suffisante. On tiendra compte de la remarque 1 et du fait que les valeurs propres de $A(w)$ sont $u - c$, u , $u + c$. La vitesse du son c est donnée par $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$.

d) Soit un choc stationnaire, défini par w_g et w_d tels que $f(w_g) = f(w_d)$. Montrer que pour que ce choc soit entropique, il faut que $G(w_g) > G(w_d)$. Montrer que le schéma de Roe résout exactement les chocs stationnaires qu'ils soient entropiques ou non.

e) Calculer numériquement la production d'entropie du schéma de Roe. Vérifier sur plusieurs exemples que cette production d'entropie n'a pas toujours le bon signe. Le flux d'entropie du schéma de Roe étant délicat à calculer (il s'agit de $\tilde{G}(u, v) = G(\tilde{R}(0, u, v))$, voir ci-dessous), on utilisera là aussi le flux d'entropie de Godunov

$$G(u, v) = G(R(0, u, v)).$$

On vérifiera que pour certaines cellules, l'inégalité

$$(50) \quad hU(w_i^{n+1}) - hU(w_i^n) + \tau(G(w_i^n, w_{i+1}^n) - G(w_{i-1}^n, w_i^n)) \leq 0,$$

n'est pas vérifiée.

4.3. Schémas de type Godunov. L'inconvénient principal du schéma de Godunov est qu'il nécessite la résolution exacte du problème de Riemann. Ce calcul ne peut souvent pas se faire analytiquement et il faut alors mettre en oeuvre une méthode itérative. Pour des SLC complexes, le problème de Riemann peut être très difficile à résoudre, même numériquement. Certains auteurs ont donc proposé de remplacer le solveur exact par un solveur approché.

4.3.1. Solveurs de Riemann approchés. La solution du problème de Riemann (12), (11) est notée $R(x/t, w_g, w_d)$. On cherche une solution approchée notée

$$\tilde{R}(x/t, w_g, w_d).$$

Cette approximation doit vérifier deux propriétés. La première est la consistance avec les lois de conservation

$$(51) \quad \int_{-h/2}^{+h/2} \tilde{R}(x/\tau, w_g, w_d) = \frac{h}{2}(w_g + w_d) - \tau(f(w_d) - f(w_g)).$$

La seconde est la consistance avec l'inégalité d'entropie

$$(52) \quad \int_{-h/2}^{+h/2} U(\tilde{R})(x/\tau, w_g, w_d) \leq \frac{h}{2}(U(w_g) + U(w_d)) - \tau(G(w_d) - G(w_g)).$$

Dans (51) et (52), h est un paramètre tel que

$$h/2 \geq \tau a_d \text{ et } -h/2 \leq \tau a_g,$$

où a_g est la plus petite vitesse d'onde dans le solveur approché et a_d la plus grande vitesse d'onde. Si on intègre maintenant le solveur **exact** sur le demi-intervalle $]0, h/2[$, il vient

$$\int_0^{+h/2} R(x/\tau, w_g, w_d) = \frac{h}{2}w_d - \tau(f(w_d) - f(R(0, w_g, w_d))).$$

Il s'ensuit que le flux numérique dans le solveur de Godunov s'écrit

$$(53) \quad f(w_g, w_d) = f(w_d) - \frac{h}{2\tau} w_d + \frac{1}{\tau} \int_0^{h/2} R(x/\tau, w_g, w_d).$$

Pour un solveur approché, on conservera la même écriture en remplaçant R par \tilde{R} . Grâce à (51), il est équivalent d'intégrer sur $] -h/2, 0[$, le flux numérique peut donc aussi s'écrire

$$(54) \quad f(w_g, w_d) = f(w_g) - \frac{h}{2\tau} w_g - \frac{1}{\tau} \int_{-h/2}^0 R(x/\tau, w_g, w_d).$$

Si le solveur est entropique, on peut montrer que le schéma obtenu est entropique.

4.3.2. *Exemple : le schéma d'Harten, Lax, van Leer (HLL), schéma de Rusanov.* Dans le schéma HLL, on cherche un solveur de Riemann approché sous la forme

$$\tilde{R}(x/t, w_g, w_d) = \begin{cases} w_g & \text{si } x/t < a_g, \\ w^* & \text{si } a_g < x/t < a_d, \\ w_d & \text{si } a_d < x/t. \end{cases}$$

Il existe d'innombrables façons de choisir les vitesses a_g et a_d . Citons en deux (dans le cas des équations d'Euler)

– Davis a proposé

$$a_g = \min(u_g - c_g, u_d - c_d), \quad a_d = \max(u_g + c_g, u_d + c_d).$$

– Le choix de Rusanov consiste à prendre

$$S^+ = \max(|u_g - c_g|, |u_d - c_d|, |u_g + c_g|, |u_d + c_d|),$$

puis

$$a_g = -S^+ \text{ et } a_d = S^+.$$

En appliquant (51), il est très facile de trouver l'état intermédiaire w^* . Ensuite, la formule (53) ou (54) nous donne le flux numérique pour le schéma HLL

$$f(w_g, w_d) = \begin{cases} f(w_g) & \text{si } 0 \leq a_g, \\ \frac{a_d f(w_g) - a_g f(w_d) + a_d a_g (w_d - w_g)}{a_d - a_g} & \text{si } a_g \leq 0 \leq a_d, \\ f(w_d) & \text{si } a_d \leq 0. \end{cases}$$

Le schéma HLL n'est pas très précis mais il est robuste, simple et général. De plus, w^* est par construction la moyenne de la solution exacte sur l'intervalle $] -a_g, a_d[$. Le schéma est donc entropique par application de l'inégalité de Jensen (Exercice).

D'autre part, le schéma de HLL admet une forme très simple dans le cas où les vitesses sont celles de Rusanov

$$f(w_g, w_d) = \frac{f(w_g) + f(w_d)}{2} - \frac{S^+}{2} (w_d - w_g).$$

Exercice 23. Montrer que le schéma de Roe peut se mettre sous la forme d'un schéma de type Godunov. Expliciter le solveur de Riemann approché correspondant (Indication : la relation $f(u) - f(v) = A(\hat{u})(u - v)$ est fondamentale. Il faut alors résoudre un problème de Riemann linéarisé de la forme $w_t + A(\hat{w})w_x = 0$).

4.3.3. *Une variante : le schéma VFRoe.* Gallouët a proposé une variante aux schémas de type Godunov : le schéma VFRoe. Pour cela, on considère le SLC

$$w_t + f(w)_x = 0.$$

On considère un changement de variables $y \rightarrow w(y)$. Le SLC est équivalent, pour des solutions régulières à

$$y_t + B(y)y_x = 0.$$

Le schéma de VF est du type (55). Le flux numérique est de la forme

$$F_{i+1/2}^n = f(w(y^*(y_i^n, y_{i+1}^n))).$$

Dans cette expression, y^* est la solution d'un problème de Riemann linéarisé

$$\begin{aligned} y_t + B(\widehat{y})y_x &= 0, \\ y(x, 0) &= \begin{cases} y_g, & x < 0, \\ y_d, & x > 0. \end{cases} \\ y^*(y_g, y_d) &= y(0, t). \end{aligned}$$

Dans ce problème de Riemann, \widehat{y} désigne une moyenne quelconque entre y_g et y_d .

Exercice 24. Écrire le schéma VFRoe pour les équations d'Euler (35). Pour cela, on considérera le changement de variables $y = (\rho, u, p) \rightarrow w = (\rho, \rho u, \rho E)$ et l'opérateur de moyenne $\widehat{y} = 1/2(y_g + y_d)$. Programmer le schéma VFRoe. Vérifier sur un exemple bien choisi qu'il n'est pas forcément entropique.

4.3.4. *Montée en ordre : méthode MUSCL.* Sans amélioration, les schémas de volumes finis habituels sont d'une précision décevante (typiquement d'ordre \sqrt{h} en norme L^1). Il existe une méthode très simple pour améliorer la précision : la méthode MUSCL (pour Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws) de van Leer.

Au premier pas de temps, le schéma de Godunov

$$\begin{aligned} (55) \quad w_i^{n+1} &= w_i^n - \frac{\tau}{h}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \\ (56) \quad F_{i+1/2}^n &= f(R(0, w_i^n, w_{i+1}^n)), \end{aligned}$$

calcule de façon exacte la valeur moyenne de la solution sur chaque cellule. L'erreur est donc d'ordre 2 au centre de chaque cellule. Mais dès le second pas de temps, l'extrapolation de ces valeurs aux centres vers les bords des cellules pour calculer le flux conduit à une erreur de consistance d'ordre h . La méthode MUSCL consiste donc à approcher la solution exacte par une fonction affine dans chaque cellule

$$w(t^n, x_i) \simeq w_i^n + s_i^n(x - x_i) \text{ si } x \in C_i.$$

Les valeurs moyennes w_i^n sont calculées par le schéma habituel (55) mais en utilisant les pentes pour calculer les valeurs aux interfaces

$$F_{i+1/2}^n = f(R(0, w_i^n + s_i^n \frac{h}{2}, w_{i+1}^n - s_{i+1}^n \frac{h}{2})).$$

Les pentes peuvent être évaluées de la façon suivante. Soit à calculer s_i^n . On commence par évaluer les trois quantités

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{h} \text{ (pente décentrée à gauche),} \\ \beta &= \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2h} \text{ (pente centrée),} \\ \gamma &= \frac{w_{i+1}^n - w_i^n}{h} \text{ (pente décentrée à droite).} \end{aligned}$$

Le "minmod" d'un ensemble de réels E est alors

$$\text{minmod}(E) = \begin{cases} \inf E & \text{si } E \subset \mathbb{R}^+, \\ \sup E & \text{si } E \subset \mathbb{R}^-, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose alors

$$s_i^n = \text{minmod}(\{\alpha \beta \gamma\}).$$

Sans une telle procédure de limitation des pentes, le schéma serait instable. D'autre part, le schéma obtenu est d'ordre 2 en espace et reste d'ordre 1 en temps. Pour obtenir un schéma plus précis et plus stable, on peut utiliser une méthode de type Runge-Kutta (Heuhn ou Euler amélioré par exemple) pour l'intégration en temps.

Il existe une méthode plus simple, attribuée à Hancock, pour obtenir l'ordre 2 en temps. Elle consiste à estimer une dérivée en temps, en utilisant la dérivée en espace s_i^n . En effet, on a, pour une solution régulière

$$(57) \quad w_t = -f'(w)w_x.$$

Posons donc

$$(58) \quad d_i^n = -f'(w_i^n)s_i^n.$$

Cette dérivée en temps est utilisée pour calculer le flux numérique à l'étape $n + 1/2$

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = f\left(R(0, w_i^n + s_i^n \frac{h}{2} + d_i^n \frac{\tau}{2}, w_{i+1}^n - s_{i+1}^n \frac{h}{2} + d_{i+1}^n \frac{\tau}{2})\right).$$

Le schéma de volumes finis est alors

$$(59) \quad w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\tau}{h} \left(F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2} \right).$$

Exercice 25. Programmer la méthode MUSCL pour l'équation de Burgers (d'ordre 2 en espace et 1 en temps). Quel est numériquement le taux de convergence en norme L^1 ? Vérifier numériquement que la condition CFL est légèrement plus contraignante que pour le schéma d'ordre 1 en temps et en espace. Vérifier que le choix $s_i^n = \beta$ conduirait à un schéma inconditionnellement instable. Vérifier que la précision et la stabilité sont améliorées grâce à la méthode d'ordre 2 en espace et en temps de Hancock.

4.4. Introduction à la méthode des volumes finis en dimensions supérieures.

Voir l'article (en anglais) "practical computation of axisymmetrical multiphase flows".

Exercice 26. On considère le SLC d'Euler

$$\begin{aligned} w_t + f(w)_x &= 0, \\ w &= (\rho, \rho u, \rho E), \quad f(w) = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u), \\ E &= \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon. \end{aligned}$$

La condition initiale est

$$\begin{aligned} \rho_L &= 1, \quad u_L = 0.75, \quad p_L = 1, \\ \rho_R &= 0.125, \quad u_R = 0, \quad p_R = 0.1. \end{aligned}$$

Tous les fichiers utiles à cet exercice se trouvent sur <http://helluy.univ-tln.fr>.

1) Au moyen du solveur de Riemann fourni, calculer la solution exacte du problème. Commenter cette solution (nature des ondes, interprétation physique).

2) Montrer (par un calcul) que dans le choc, les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites, ainsi que la condition de Lax et la condition d'entropie (Remarque : l'entropie est ici $U = -\rho s$ avec $s = \ln \varepsilon + (\gamma - 1) \ln(1/\rho)$. Le flux d'entropie est $G = -\rho u s$.)

3) Programmer le schéma de Godunov et le schéma HLL. Vérifier la programmation grâce au solveur de Riemann exact. Expliquer la structure du programme. Comparer la précision des deux schémas.

4) Programmer la méthode MUSCL-Hancock. Vérifier que la précision est effectivement meilleure. Commenter la programmation.

5) Vérifier que les schémas HLL et Godunov deviennent progressivement instables si la condition de CFL n'est pas satisfaite.

Exercice 27. Calcul du déferlement d'une vague. Les fichiers sont à

<http://helluy/soliton.htm>

- 1) Décrire rapidement le cas-test proposé.
- 2) Faire fonctionner le programme "balot.f" (explications sur la page web). Vérifier qu'en 0.5s le soliton se déplace d'environ 1m. On commencera par un maillage grossier, puis de plus en plus fin. Commenter.
- 3) Modifier "balot.f" pour que la vitesse du son numérique soit de l'ordre de 10 m/s. Quelle est l'intérêt de cette manipulation?
- 4) Essayer de calculer le déferlement avec le plus de précision possible.