CHAPITRE 1

SÉRIES ENTIÈRES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

. — Insérer ce qui suit après I.1.5 du polycopié.

Les remarques I.1.4 et I.1.5 du calcul du rayon de convergence sont des cas particuliers de la formule d'Hadamard. Pour introduire cette formule, nous avons besoin de la définition de limite supérieure.

Définition 1.0.1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, on pose

$$U_p = sup_{n\geq p}\{u_n\}.$$

(i) La suite des U_p converge vers une limite finie (ou infinie), qui est appelée la limite supérieure de la suite (u_n) et notée $limsup\, u_n$ ou encore $\overline{\lim}\, u_n$.

(ii) Si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors $\overline{\lim}\, u_n$ converge vers l.

Démonstration. On a

$$U_p = max\{u_p, U_{p+1}\},$$

si bien que la suite U_p est décroissante. Plusieurs cas sont possibles. D'abord, cette suite peut être constante et égale à $+\infty$. Dans ce cas, la limite de cette suite vaut $+\infty$. Sinon, U_p prend une valeur finie réelle pour p assez grand. Si cette suite est minorée, elle converge et sinon elle diverge vers $-\infty$.

La deuxième assertion est laissée en exercice.

Voici un moyen concret de trouver la valeur de la limite supérieure d'une suite de nombres réels, et qui nécessite une nouvelle définition.

Définition 1.0.2. — (1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. Soit φ une injection croissante : $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée suite extraite de (u_n).

(2) On appelle valeur d'adhérence de (u_n) la limite d'une suite extraite de (u_n).

Toute suite réelle possède une valeur d'adhérence, éventuellement infinie. Supposons en effet que $+\infty$ et $-\infty$ ne soient pas valeurs d'adhérence de (u_n), alors (u_n) est bornée et est donc à valeurs dans un intervalle $[-a, a]$ avec $a > 0$. Cet intervalle est compact, de sorte qu'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant dans cet intervalle vers une limite l qui est donc une valeur d'adhérence de (u_n).

On a alors :

Proposition 1.0.3. — *La limite supérieure d'une suite réelle (u_n) est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).*

Démonstration. D'abord, $S = \overline{\lim}\, u_n$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n). En effet, posons $\varphi(0) = 0$ et supposons construit $\varphi : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |u_{\varphi(n)} - S| \leq \frac{1}{n}$. Comme la suite (U_n) converge vers S, il existe $a_{n+1} \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$|U_{a_{n+1}} - S| \leq \frac{1}{2(n+1)}.$$

Et, par définition de la borne supérieure, il existe $u_{\varphi(n+1)}$, avec $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)$ tel que

$$|U_{a_{n+1}} - u_{\varphi(n+1)}| \leq \frac{1}{2(n+1)}$$

soit

$$|u_{\varphi(n+1)} - S| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ceci montre qu'on peut construire $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ par récurrence tel que $u_{\varphi(n)}$ converge vers S et que S est une valeur d'adhérence.

Considérons M la borne supérieure de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). Comme une limite de valeurs d'adhérence est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) (cette remarque est laissée en exercice), M est une valeur d'adhérence de (u_n) et c'est la plus grande valeur d'adhérence de cette suite. En particulier, $M \geq S$.

Montrons l'inégalité inverse. Soit φ une injection croissante telle que $u_{\varphi(n)} \to M$. Alors

$$\overline{\lim}\ u_n \geq \overline{\lim}\, u_{\varphi(n)},$$

donne $S \geq M$.

Exemples :

(1) La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ possède deux valeurs d'adhérence : 1 et -1, et $\overline{\lim}\, u_n = 1$.

(2) La suite de terme général $u_{2^k} = k$ et $u_n = 0$ pour les autres valeurs de n possède 0 et $+\infty$ comme valeurs d'adhérence, et $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$.

Ces considérations nous amènent à la formule d'Hadamard.

Proposition 1.0.4. — *Le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par*

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. Soient $r > 0$ tel que $r < \rho$, et ρ' tel que $r < \rho' < \rho$. Pour p assez grand, on a l'inégalité

$$\frac{1}{\rho} \leq Sup_{n\geq p}|a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{\rho'},$$

c'est-à-dire

$$|a_n| \leq \frac{1}{\rho'^n}$$

pour n assez grand, ce qui donne

$$|a_n| r^n \leq \left(\frac{r}{\rho'}\right)^n$$

pour n assez grand et la convergence normale de la série $\sum a_n z^n$ pour $r < \rho$.

Soit maintenant $r > \rho$. Il existe $\rho' > 0$ tel que $r > \rho' > \rho$. Soit $(a_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (a_n) telle que $|a_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)} \to 1/\rho$. Alors

$$|a_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)}| \geq \frac{1}{\rho'},$$

pour n assez grand, de sorte que

$$r^{\varphi(n)}|a_{\varphi(n)}| \geq \left(\frac{r}{\rho'}\right)^{\varphi(n)}$$

pour n assez grand. Ce qui montre que la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour $|z| > \rho$ et la proposition.

Les séries entières, dont beaucoup de termes sont nuls, sont appelées lacunaires.

Exercices.

(1) Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Montrer que si

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l,$$

alors

$$\overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = l,$$

et donc que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est égal à $\frac{1}{l}$.

(2) 1- Donner le rayon de convergence de la série

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$$

puis le rayon de convergence de la série

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2^n}}{n},$$

enfin le rayon de convergence de

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2^n}}{3^n}.$$

2- (i) Montrer que f diverge en 1, en -1 et en toute racine 2^k-ième de l'unité pour tout entier k.

(ii) Soient ξ une racine 2^k-ième de l'unité, $z = r\xi$ pour $r \in [0, 1[$, et

$$\forall r \in [0, 1[,\ g(r) = \sum_{n \geq 0} r^{2^n}.$$

(iii) Montrer que $\forall r \in [0, 1[,\ f(r\xi) - g(r)$ est un polynôme en r.

(iv) Montrer que g est croissante et tend vers $+\infty$ si $r \to 1$. Montrer que f n'est pas bornée au voisinage de ξ.

(v) Soient $\alpha > 0$, $\zeta \in \mathbf{C}$ tel que $|\zeta| = 1$, $D_\alpha = D(\zeta, \alpha)$. Montrer que f n'est pas la restriction à $D_\alpha \bigcap D(0, 1)$ d'une fonction analytique sur D_α (indication : on pourra utiliser les fait que l'ensemble des racines 2^k-ièmes de l'unité est dense dans le cercle unité).