Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques et Informatique
Licence de Mathématiques, Janvier 2013

Analyse complexe
Responsable : Christine Huyghe
Examen du 7 janvier 2013, durée 3 heures.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...).

1. Quelles sont toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ dont la partie réelle est la fonction

$$z = x + iy \longmapsto 2xy?$$

2. Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$. On suppose qu'il existe des nombres réels a, b et c, non tous nuls, tels que, pour tout $z = x + iy$ dans U, on ait

$$aP(x, y) + bQ(x, y) = c.$$

Que peut-on dire de f ?

3. On définit les bandes B_n (pour $n \in \mathbf{Z}$) par

$$B_n = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid (2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi\}.$$

On appelle U_π le complémentaire des réels négatifs ou nuls dans $\mathbf{C}$ et on désigne par log une détermination du logarithme sur l'ouvert U_π (par exemple la détermination « principale »). Montrer que la fonction $\log \circ \exp$ est définie (et analytique) sur $B = \cup_{n \in \mathbf{Z}} B_n$. Calculer sa dérivée, puis déterminer cette fonction.

4. Soient γ_0 et γ_1 deux lacets paramétrés par $[0, 1]$ ne passant pas par 0 et soit γ le lacet produit (au sens produit des nombres complexes)

$$\gamma(t) = \gamma_0(t)\gamma_1(t).$$

Montrer que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0).$$

5. On pose $a = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$.

(1) Calculer a^2 et montrer que $g(z) - g(z+a) = e^{-z^2}$.

(2) Montrer que les pôles de g sont les $(2k+1)a/2$ (pour $k \in \mathbf{Z}$) et calculer son résidu en $a/2$.

(3) Pour $r > 0$ dessiner le parallélogramme de sommets $-r, r, r+a, -r+a$. On appelle C_r ce parallélogramme parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale

$$\int_{C_r} g(z)\, dz.$$

(4) En admettant provisoirement que, lorsque $r \to \infty$, l'intégrale de g sur les côtés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0, déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

(5) Montrer que, lorsque $r \to \infty$, l'intégrale de g sur les côtés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0.