Analyse complexe
Responsable : Christine Huyghe
Examen de mai 2011, durée 3 heures.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...).

1. Cours :

   1- Rappeler le théorème de la singularité apparente pour une fonction holomorphe sur un disque épointé.

   2- Soit h une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, $D > 0$ un nombre réel, tels que
   $$\forall z \in \mathbf{C},\ |h(z)| \leq D|z|^2.$$
   Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que
   $$\forall z \in \mathbf{C},\ h(z) = az^2.$$

2. 1- Soit $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ définie par
   $$U(x, y) = e^x cos(y) + xy - 1.$$
   Montrer qu'il existe une unique application $V : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ telle que $V(0, 0) = 0$ et $f((x + iy)) = U((x, y)) + iV((x, y))$ définisse une application holomorphe : $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. On rappelle qu'alors, si $z = x + iy$,
   $$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}.$$
   Calculer $f'(0)$.

   2- Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer
   $$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} dz.$$

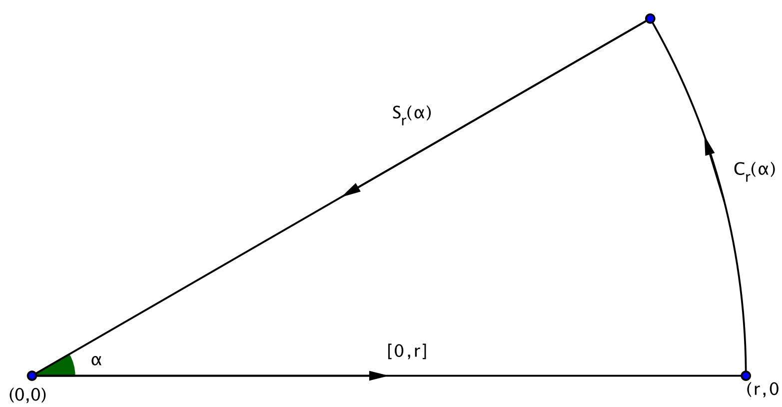
   3- Calculer
   $$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^2} dz.$$

3. 1- Déterminer les pôles, ainsi que leur ordre, de la fraction rationnelle

$$h(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^6 + 8}.$$

Calculer le résidu de h aux points $\sqrt{2}$ et $i\sqrt{2}$.

2- Soit $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. On note $\Gamma_r(\alpha)$ le contour ci-dessous, réunion du segment $[0, r]$, de l'arc $C_r(\alpha)$ constitué des points $re^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq \alpha$, et $S_r(\alpha)$ qui est le segment joignant $re^{i\alpha}$ à 0 et parcouru dans ce sens.



$\Gamma_r(\alpha)$

Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^6 + 8} dx.$$

3- Calculer
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^6 + 2} dx.$$

4. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \ |f(z)| \leq |z| + \frac{1}{|z|}.$$

1- Montrer que les seuls pôles éventuels de f sont 0 et ∞.

2- On pose $g(z) = zf(z)$. Montrer que g est holomorphe au voisinage de 0.

3- Montrer que

$$\forall z, \text{ tel que } |z| \geq 1, |g(z)| \leq 2|z|^2.$$

4- On suppose que $g(0) = g'(0) = 0$, montrer qu'il existe une constante réelle strictement positive $D > 0$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{C},\ h(z) \leq D|z|^2.$$

En déduire qu'il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C},\ g(z) = az^2.$$

5- En utilisant la question précédente, montrer que g est en fait un polynôme de degré ≤ 2 et f une fraction rationnelle avec au plus un pôle, au plus d'ordre 1 en 0.