Analyse complexe
Responsable : Christine Huyghe
Examen de mai 2012, durée 3 heures.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...).

On rappelle la formule suivante : si f est une fonction holomorphe sur le disque $D(0,r)\backslash\{0\}$, avec $r>0$ et a un pôle d'ordre k en 0, on pose $h(z)=z^k f(z)$, alors

$$Res(0,f) = lim_{z\to 0}\frac{h^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

1. Cours :
   1- Rappeler le théorème de la singularité apparente pour une fonction holomorphe sur un disque épointé.
   2- Rappeler le théorème de l'application ouverte.

2. Soit f une application holomorphe d'un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. On écrit : $f(x,y)=P(x,y)+iQ(x,y)$. On suppose qu'il existe $a\in\mathbf{R}$ tel que

$$\forall z=x+iy\in U,\ Q^2(x,y)=2aP(x,y).$$

   Que peut-on dire de f ?

3. 1- Soit $P:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ définie par

$$P(x,y)=e^x sin(y)+x-y.$$

   Montrer qu'il existe une unique application $Q:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ telle que $Q(0,0)=0$ et $f((x+iy))=P((x,y))+iQ((x,y))$ définisse une application holomorphe : $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. On rappelle qu'alors, si $z=x+iy$,

$$f'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

   Calculer $f'(0)$.

T.S.V.P.

2- Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z}dz.$$

3- Calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z^2}dz.$$

4- Montrer que f est combinaison linéaire (que l'on précisera) des fonctions 1, z et e^z.

4. Soit a un nombre réel, $a > 0$.

1- Soit $\zeta \in \mathbf{C}$ tel que $\zeta^4 = -1$ et

$$f(z) = \frac{1}{(z^4 + a^4)^2}.$$

Calculer $Res(\zeta a, f(z))$.

2- Calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^4 + a^4)^2.}$$

5. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{C},\ |f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

1- Montrer que les seuls pôles éventuels de f sont 0 et ∞.

2- On pose $g(z) = zf(z)$. Montrer que g est holomorphe en 0.

3- Montrer que f est holomorphe en 0.

4- Montrer qu'il existe $C > 1$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| \geq C \Rightarrow\ |f(z)| \leq 2\sqrt{|z|},$$

puis qu'il existe $M > 0$ et $a_0 \in \mathbf{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{C},\ |f(z) - a_0| \leq M|z|.$$

5- Montrer que f est constante.