TD no 2, Introduction aux schémas affines
Master 2 Strasbourg 2017-2018

1- Spectres.

Ex. 1-On considère le morphisme de schémas f: Spec $\mathbb{C}[T] \longrightarrow$ Spec $\mathbb{R}[T]$

. donné par l'inclusion : $\mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$. Montrer que les fibres de f sont finies et donner leur cardinal.

Ex. 2-On considère X=Spec $\mathbb{Z}$. Pour p un nombre premier, on note α_p le point fermé correspondant de X.
(i) Montrer que toute réunion finie des α_p est un fermé de X.
(ii) Soit Y une réunion infinie des α_p. Quelle est l'adhérence de Y dans X ?

Ex. 3-Soient f et g $\in \mathbb{C}[X,Y]$ et $I = (f,g) \subset \mathbb{C}[X,Y]$.
Soit T=Spec ($\mathbb{C}[X,Y]/I$). On note (T($\mathbb{C}$)) l'ensemble des points fermés de T. Montrer que T($\mathbb{C}$) est un ensemble algébrique de $\mathbb{C}^2$. Comment généraliser cet énoncé pour r polynômes $f_1, \dots, f_n$ de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$?
Décrire les ensembles obtenus pour f(X,Y)= X^2+Y^2-1 et $g(X,Y)=0$ puis pour $f(X,Y) = X^2+Y^2-1$ et $g(X,Y) = 2X^2-Y^2-5$.

Ex. 4-Soit K le corps $\mathbb{Q}[i]$. Soit A= $K[X,Y]/(X^2+Y^2-1)K[X,Y]$

Montrer que A est intégre.

Indication: on remarquera que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre

B= $K[U,V]/(UV-1)$. Montrer que le morphisme canonique $\operatorname{Spec} B \to \mathbb{A}^1_K$

donné par le morphisme $K[U] \longrightarrow B$ qui envoie U sur U est un homéomorphisme de $\operatorname{Spec} B$ sur un ouvert de la droite affine.

Ex. 5-Soit K un corps, montrer que le morphisme $\operatorname{Spec} K[X,Y] \to \operatorname{Spec} K[X]$ est surjectif.

Ex. 6-Décrire le spectre de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Indication: considérer les deux projections $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

2-Sur les anneaux.

Ex.1-Soit K un corps et E un K-espace vectoriel. Montrer que E est un K-espace vectoriel noetherien ssi E est dimension finie.

Ex. 2- Soit A le produit A= $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/a^i\mathbb{Z}$ avec a $\in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que A n'est pas noetherien.

Montrer que pour tout n il existe $x \in A$ tel que $x^n = 0$ et $x^{n-1} \neq 0$.

Ex. 3-Soit K un corps et A=K[$X_1, \ldots, X_n, \ldots$] l'algèbre de polynômes sur K en un nombre infini de variables. Montrer que A n'est pas noetherien.

Ex. 4-(Scholze) Cet exemple nécessite de connaître le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques.

Soit A= $\bigcup_n \mathbb{Q}_p [T^{\frac{1}{p^n}}]$ noté $\mathbb{Q}_p [T^{\frac{1}{p^\infty}}]$

Est-ce que A est une algèbre noetherienne ?

Ex. 5- (i) Soit Q un polynôme de $\mathbb{Q}[T]$. Montrer qu'il existe un unique nombre rationnel r>0 tel que rQ soit un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[T]$ (Q est suposé non nul).
On note r le contenu de Q, c(Q). Montrer que si
Q est un polynôme de $\mathbb{Z}[T]$, c(Q) est le PGCD des coefficients non nuls de Q.

(ii) Soient Q et Q' deux polynômes de $\mathbb{Q}[T]$. Montrer que c(Q Q')=c(Q)c(Q').

(iii) Soient R, $Q \in \mathbb{Z}[T]$ tel que c(Q)=1. On suppose que R est divisible par Q dans l'anneau $\mathbb{Q}[T]$.
Montrer que R est divisible par Q dans l'anneau .

(iv) Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de $\mathbb{Z}[T]$, tel que $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme primitif S de $\mathbb{Z}[T]$ tel que $\mathcal{P} \cdot \mathbb{Q}[T] = S\mathbb{Q}[T]$. .Montrer qu'alors $S \in \mathcal{P}$ puis que $\mathcal{P} = \mathbb{Z}[T] \cdot S$.

Ex. 6- Soit A un anneau et M un A-module. Une chaîne de sous-modules de M est la donnée d'une suite de sous-modules $M_n = 0 \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$.

Une série de composition de M est une chaîne maximale de M, c'est-à-dire une chaîne de sous-modules de M dans laquelle les quotients M_{i+1}/M_i sont simples.

On se propose de montrer que si M admet une série de composition de longueur n, alors toute chaîne de M peut être raffinée en une série de composition de longueur n. En particulier, toute série de composition de M est de longueur n, et on note l(M)=n. Soit M un module muni d'une série de composition $M_n = 0 \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$.

Soit l(M) le minimum des longueur des séries de composition de M.

(i) Soit N un sous-module de M et $N_i = M_i$. Montrer que $N_i/N_{i-1} = 0$ ou $N_i/N_{i-1} = M_i/M_{i-1}$.

En déduire que l(M) $\leqslant$ l(N) et qu'il y a égalité si et seulement si M=N.

(ii) Déduire de (i) que toute chaîne de M est de longueur $\leq \ell(M)$.

(iii) Déduire de (ii) que toute série de décomposition est de longueur l(M).

Ex. 7. On considère une suite exacte de A-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$.

Montrer que M est de longeur finie si et seulement si M' et M'' sont de longueur finie, et que dans ce cas l(M)=l(M')+l(M'').