Travaux dirigés 3, Introduction aux schémas affines.

1-Anneaux factoriels

Soit A un anneau noethérien intègre. Un élément x de A est irréductible si pour tout $a, b \in A$

$$x = ab \Longrightarrow a \text{ ou } b \text{ est inversible .}$$

On dit que A est factoriel si tout élément s'écrit d'une unique façon comme produit d'éléments irréductibles.

Soit A un anneau factoriel, on dit que $a|x$ s'il existe $b \in A$ tel que $x = ab$. Soient a, b, d dans A, on dit que d est le PGCD de a et de b, si $d|a$ et $d|b$ et si,

$$(x|a \text{ et } x|b) \Longrightarrow x|d.$$

1. a) Montrer que si A est factoriel alors tout élément irréductible engendre un idéal premier.

   b) Supposez que tout élément irréductible engendre un idéal premier. Montrer que tout élément $a \in A$ possède un diviseur irréductible. (Indication : Dans le cas contraire, construire une chaine croissante non-stationnaire d'idéaux de A.)

   c) Sous l'hypothèse de la question précédente, montrer que A est factoriel.

   d) Soit A un anneau intègre principal, $a, b \in A$, et $c \in A$ tel que $(c) = (a, b)$. Montrer que c est un PGCD de a et de b.

   e) Soit A un anneau intègre principal, montrer que A est factoriel.

2. Le but de cet exercice est de montrer que

   si A est un anneau factoriel, alors l'anneau de polynômes $A[X]$ est également factoriel.

   Dans tout l'exercice, A désigne un anneau factoriel et K le corps de fractions de A. Soit $p \in A$ irréductible. Pour $a \in A$, $a \neq 0$, on définit

   $$\mathrm{ord}_p(a) = \max\{r \in \mathbb{N} \mid p^r \text{ divise } a\}.$$

   Si $a \in K^*$, alors il existe $x, y \in A$ tels que $a = x/y$. On définit $\mathrm{ord}_p(a) = \mathrm{ord}_p(x) - \mathrm{ord}_p(y)$.

   a) Montrer que cette définition ne dépend pas des choix de x et de y et que l'on a $\mathrm{ord}_p(ab) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$ pour tous $a, b \in K^*$.

   b) Soit $F \in K[X]$, $F \neq 0$ et supposons que $F(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$. Alors on pose $\mathrm{ord}_p(F) = \min\{\mathrm{ord}_p(a_i) \mid i = 0, \ldots, d \text{ t.q. } a_i \neq 0\}$. Montrer que $\mathrm{ord}_p(F) = 0$ pour tous sauf pour un nombre fini de p.

c) Soit $R \subset A$ un sous-ensemble tel que, pour tout $p \in A$ irréductible, R contient exactement un élément de $pA^\times$. La partie précédente permet de définir

$$\mathrm{cont}(F) = \prod_{p \in R} p^{\mathrm{ord}_p(F)}.$$

On dit que $\mathrm{cont}(F)$ est le *contenu* de F. Montrer que si $\mathrm{cont}(F) \in A$, alors $F \in A[X]$. Montrer aussi que pour tout $F \in K[X]\backslash\{0\}$, il existe $c \in K$ et $F_1 \in K[X]$ tels que $F = c \cdot F_1$ et que $\mathrm{cont}(F_1) = 1$.

d) Soient $F, G \in K[X]\backslash\{0\}$ tels que $\mathrm{cont}(F) = \mathrm{cont}(G) = 1$. Montrer que $\mathrm{cont}(FG) = 1$. Utiliser ce résultat pour montrer que pour $F, G \in K[X]\backslash\{0\}$ quelconques, on a $\mathrm{cont}(FG) = \mathrm{cont}(F)\,\mathrm{cont}(G)$ (*Lemme de Gauß*).

e) Soit $F \in A[X]$ un polynôme non-constant. Montrer que F est irréductible dans $A[X]$ si et seulement si F est irréductible dans $K[X]$ et $\mathrm{cont}(F) = 1$.

f) Montrer que $A[X]$ est factoriel.

g) Conclure que les anneaux $k[X_1, \ldots, X_n]$ (k un corps) et $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ sont factoriels.

2-Modules

1. Soit k un corps, montrer que $Spec\, k[T]/T^n$ est réduit à un point ($n \geq 1$).
2. a) Soit A une K-algèbre de type fini, et M un A-module de longueur finie au sens où il admet une série de composition finie. Montrer que M est un K-espace vectoriel de dimension finie.

   b) Soit k un corps, montrer que $k[[X]]$ l'anneau des séries formelles en X est un anneau local noetherien, décrire son spectre. Montrer que les $k[[X]]$-modules $M_n = k[[X]]/X^{n+1}$ sont de longueur finie et calculer leur longueur.

   c) Soit K un corps, montrer que $M = K[X,Y]/(X^2, Y)$ est de longueur finie et donner une série de composition finie de ce $K[X,Y]$-module. Même question avec $M = K[X,Y]/(X^2, X^2 + Y^2 - 1)$.

   d) Montrer que $M = K[X,Y]/(X^3 - 1, Y^2)$ est de longueur finie et calculer sa longueur, si $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}[i]$, K est un corps fini de caractéristique 3.
3. Soit K un corps, $P \in K[X,Y]$ un polynôme irréductible, et

   $$A = K[X,Y]/P(X,Y)K[X,Y].$$

   a) Reprendre la démonstration du théorème de normalisation de Noether et montrer qu'il existe un automorphisme φ de $K[X,Y]$ tel que $\varphi(P)$ soit unitaire en X.

   b) Remarquer que φ induit un isomorphisme

   $$A \simeq B = K[X,Y]/Q(X,Y)K[X,Y]$$

   et montrer que A n'admet pas de série de composition de longueur finie.

   c) Expliciter $T \in K[X,Y]$ tel que A est une $K[T]$-algèbre finie dans le cas où $P = P_1 = XY - 1$ et $P = P_2 = XY^2 - X - 1$. On suppose que $K = \mathbb{C}$, on note $Y = Spec\, B$, $Y(\mathbb{C})$ l'ensemble des points fermés de Y. Décrire les fibres du morphisme $Y(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, déduit du morphisme : $K[T] \to A$. (On se rappellera que $\mathbb{C}$ est l'ensemble des points fermés de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$).