Travaux dirigés 4, Introduction aux schémas affines.

Sources : Livre de Atiyah Mac Donald, page web de collègues (D. Juteau).

1-Localisation

1. Dans ce qui suit, calculer les anneaux localisés obtenus. La notation A désigne un anneau, K un corps, P un idéal premier, et $f \in A$.
   a) A est un anneau intègre et $P = (0)$.
   b) $A = \mathbb{Z}$ et $f = p$.
   c) $A = \mathbb{Z}$ et $P = (p)$.
   d) $A = K[t]$ et $f = t$.
   e) $A = K[t]$, $P = (t)$ puis $P' = (t-1)$.
   f) $A = K[t]/(t \cdot (t-1))$ et $f = t$.
   g) $A = K[t]/(t \cdot (t-1))$ et $P = t$.
   h) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $f = 2$.
   i) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $P = (2)$.

2-Produit tensoriel

1. Un isomorphisme utile : soit A un anneau, I, J deux idéaux. Alors on a un isomorphisme
$$A/(I+J) \simeq A/I\,/(J \cdot A/I)\,.$$
Montrer que
$$A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J).$$
2. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$.
3. Soit n un entier non nul. Montrer que
$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0 \text{ et que } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0.$$
4. Calculer $\mathbb{Z}/(p^2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
5. Soit K un corps et $K \to L$ un morphisme d'algèbres.
   a) Montrer qu'on peut munir $L \otimes_K K[X]$ d'une structure de L-algèbre en posant pour $b, c \in L$, $P \in K[X]$ $b \cdot (c \otimes P) = bc \otimes P$, puis qu'on a un isomorphisme de L-algèbres
$$L \otimes_K K[X] \simeq L[X].$$
   b) Montrer que $A = \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$ est intègre mais que $B = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$ ne l'est pas. Décrire le morphisme $Spec\, B \to Spec\, A$.

c) Soient p, q deux nombres premiers. A chaque nombre premier q de $\mathbb{Z}$, on associe $A_q = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X]/(X^2 - p))$. Quelles sont les valeurs possibles de $card(Spec\, A_q)$? Ces valeurs sont-elles effectivement atteintes ?

6. Soit $A = B = \mathbb{R}[T]$. On considère le morphisme d'algèbres de A dans B, qui envoie t sur t^2. Montrer, suivant les valeurs du nombre réel a, que $C = A/(t-a) \otimes_A B$ est isomorphe à

   a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a > 0$,

   b) $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[t]/(t^2)$ si $a = 0$,

   c) $\mathbb{C}$ si $a < 0$.