Travaux dirigés 5, Introduction aux schémas affines.

Sources : Livre de Atiyah Mac Donald, le livre de D. Eisenbud, de Liu, de Lang (Algebra)

Produit tensoriel et limite inductive

1. Soient A un anneau commutatif, I un ensemble ordonnée filtrant, $(M_i)_{i\in I}$ un système inductif de A-modules. Pour $j \geq i$, on note $f_j^i : M_i \to M_j$. Soit

$$S = \bigoplus_{i\in I} M_i \subset P = \prod_{i\in I} M_i,$$

et α_i les applications injectives $\alpha_i : M_i \to S$ définies par $\alpha_i(x_i)$ est l'élément (y_l) de P tel que $y_i = x_i$ et si $l \neq i$, $y_l = 0$.
Soit N le sous-module de S engendré par les éléments, pour tout couple (i, k) tels que $i \leq k$, $z_{i,k} = \alpha_i(x_i) - \alpha_k(f_k^i(x_i))$.
   a) Vérifier que $M = S/N$ vérifie la propriété universelle de la limite inductive du système inductif (M_i). Décrire en particulier les morphismes $f_i : M_i \to M$.
   b) Montrer que $M = \bigcup f_i(M_i)$.
2. a) Montrer que le corps $\mathbb{Q}$ est limite inductive de ses sous $\mathbb{Z}$-modules libres de rang 1.
   b) Montrer que
$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}.$$
3. Soient A un anneau commutatif, B une A-algèbre, C une B-algèbre, et M un A-module.
   a) Montrer qu'on a un isomorphisme de A-algèbres
$$C \otimes_B B \otimes_A M \simeq C \otimes_A M,$$
   qui envoie $c \otimes b \otimes x$ sur $bc \otimes x$.
   b) Soit N un B-module, montrer plus généralement qu'on a un isomorphisme de A-modules
$$N \otimes_B B \otimes_A M \simeq N \otimes_A M,$$
   qui envoie $y \otimes b \otimes x$ sur $by \otimes x$.
   c) Soit P un idéal premier de A, A_P le localisé de A, N un A_P-module, montrer que $A_P \otimes_A N \simeq N$.
   d) Soit M un A-module plat, montrer que $B \otimes_A M$ est un B-module plat.

4. Soit E un $\mathbb{Z}$-module et

$$E_t = \{x \in E \,|\, \exists n \in \mathbb{Z} \,|\, nx = 0\},$$

le sous-module des éléments de torsion de E.

a) On suppose que E est de type fini sur $\mathbb{Z}$, montrer que E_t est de type fini et que E/E_t est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini. Pour cette dernière question, on utilisera la classification des modules sur les anneaux principaux.

b) Montrer qu'il existe des $\mathbb{Z}$-modules E tels que $E \otimes \mathbb{Q}$ soit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et tel que E ne soit pas de type fini.

c) Montrer qu'il existe des $\mathbb{Z}$-modules E tels que $E \otimes \mathbb{Q}$ soit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et tel que E_t ne soit pas de type fini. Pour traiter cette question, on pourra remarquer que

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0.$$

5. Soit A un anneau et M un A-module.

a) Montrer que l'ensemble des sous-modules d'un module M est ordonné et filtrant pour l'inclusion, puis montrer que M est limite inductive de ses sous-modules de type fini.

b) Soit P un A-module tel que pour tout sous-module N de type fini de M, on ait

$$P \otimes_A N = 0.$$

Montrer que

$$P \otimes_A M = 0.$$

6. Soit B une A-algèbre et $C = B \otimes_A B$.

a) Montrer que C est munie de deux structures de B-algèbre : l'une donnée par $b \mapsto b \otimes 1$ et l'autre par $b \mapsto 1 \otimes b$. On parlera de la structure gauche de B-module sur C, et de la structure droite de B-module de C.

b) Montrer qu'il existe un unique morphisme A-linéaire $\Delta : B \otimes_A B$, tel que $\Delta(a \otimes c) = ac$.

c) Soit $I = Ker(\Delta)$. Montrer que I est un idéal de C engendré par les éléments $1 \otimes b - b \otimes 1$. Indication : on pourra remarquer que $mod\ I$,

$$b \otimes c = (1 \otimes b)(1 \otimes c) = 1 \otimes bc.$$

d) Montrer que I/I^2 est un B-module et qu'il est de type fini comme B-module si B est une A-algèbre de type fini.

e) Soit $A = K$ un corps, $B = K[X, Y]$, montrer que I/I^2 est un $K[X, Y]$-module engendré par $dX = 1 \otimes X - X \otimes 1 \, mod \, I^2$ et $dY = 1 \otimes Y - Y \otimes 1 \, mod \, I^2$. Indication : soit df la classe de $1 \otimes f - f \otimes 1$ dans I/I^2. Soient $f, g \in B$, montrer que $d(fg) = f \cdot dg + g \cdot df$. En déduire que dX et dY engendrent I/I^2 comme $K[X, Y]$-module.