Travaux dirigés 7, Introduction aux schémas affines.

Sources : Livre de Atiyah Mac Donald, le livre de D. Eisenbud, de Liu, de Lang (Algebra)

Dimension, composantes irréductibles

1. Soit A un anneau intègre principal, montrer que A est de dimension de Krull égal à 1.
2. Soit A un produit fini de corps $k_1, \dots, k_n$. Montrer que A est artinien et décrire $Spec\, A$.
3. Soit K un corps et $B = K[t^2, t^3]$. Montrer que B est intègre, de dimension de Krull égale à 1. Montrer que $X = Spec\, B$ est homéomorphe à $Spec\, K[x, y]/y^2 - x^3$ et donc que $Spec\, B$ est homéomorphe à une courbe affine fermée du plan affine. Montrer qu'il existe des morphismes finis $\mathbf{A}^1_K \to X \to \mathbf{A}^1_K$.
4. Soit A un anneau noetherien. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   a) A est artinien,
   b) $Spec\, A$ est discret et fini,
   c) $Spec\, A$ est discret.
5. Soit A un anneau noetherien. On suppose que A est artinien, montrer qu'il est de longueur finie. (On pourra construire une suite décroissante d'idéaux M_i de A de sorte que M_{i+1}/M_i soit simple.)
6. Soit k un corps et A une k-algèbre de type fini.
   a) Soit A un anneau artinien, alors A est semi-local. On admet que A est un produit fini d'anneaux locaux artiniens $A \simeq A_1 \times \cdots \times A_n$. Montrer, en utilisant le Nullstellensatz, que chaque A_i est une k-algèbre finie, puis que A est une k-algèbre finie. On pourra aussi utiliser le fait que chaque A_i est de longueur finie.
   b) Réciproquement, on suppose que A est une k-algèbre finie, montrer que A est artinien.
7. Est-ce que l'intersection de deux fermés irréductibles d'un espace topologique X est irréductible ?
8. a) Soit Z un sous-ensemble fermé d'un espace topologique X. Montrer que $codim(Z, X) = 0$ si et seulement si Z contient une composante irréductible de X. Donner un exemple avec X non irréductible, $dim\, Z < dim\, X$ et $codim(Z, X) = 0$.
   b) Soit V un anneau de valuation discrète, d'uniformisante t, $A = V[T]$, $X = Spec\, A$, $f = tT - 1$.

i. Montrer que l'idéal (f) est maximal. Soient x le point de X correspondant à (f) et $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local $A_{(f)}$.

   Montrer que X est irréductible et que $dim\mathcal{O}_{X,x} = 1$. On pourra montrer pour cela que $fK[T] \bigcap V[T] = fV[T]$ par exemple en utilisant la valuation t-adique.

   Montrer que
$$codim(\{x\}, X) + dim\{x\} < dimX.$$

ii. Soit $K = Frac(V)$, $k = V/tV$, le corps résiduel de V, $B = K \times k$ et $\varphi : V \to B$ défini par $\varphi(x) = (x, s(x))$ où s est la surjection canonique $V \to k$. Montrer que B est une V-algèbre de type fini, que l'application f déduite de $\varphi : Spec\, B \to Spec\, V$ est surjective et que $dim(Spec\, V) > dim(Spec\, B)$.