**Travaux dirigés 8, Introduction aux schémas affines.**

Sources : Livre de Atiyah Mac Donald, le livre de D. Eisenbud, de Liu, de Lang (Algebra)

## Différentielles

1. Soit $K$ un corps, et $K[[T]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $K$. Calculer $\Omega_{(K[[T]]/T^i)/K}$. En déduire que
$$\varprojlim_i \Omega_{K[[T]]/K}/T^i \simeq K[[T]]dT.$$
2. Soient $R$ un anneau, $A$, $B$ deux $R$-algèbres. Montrer que
$$\Omega_{B \otimes_R A/B} \simeq B \otimes_R \Omega_{A/R}.$$
3. Soit $R$ un anneau, $A$, $B$ deux $R$-algèbres, $C = A \otimes_R B$. Montrer que
$$\Omega_{C/R} \simeq C \otimes_B \Omega_{B/R} \bigoplus C \otimes_A \Omega_{A/R}.$$
4. Soient $p$ un nombre premier, $S = Spec\,\mathbb{Z}_{(p)}$, $A = \mathbb{Z}_{(p)}[x,y]/(xy^2+p)$, $X = Spec\,A$, $\Omega_{X/S} = \Omega_{A/\mathbb{Z}_{(p)}}$. On considère le morphisme canonique $f : X \to S$, donné par $P \mapsto P \bigcap \mathbb{Z}_{(p)}$.
   a) Décrire les composantes irréductibles et les points génériques de $S$ et $X$, ainsi que les fibres de $f$.
   b) Décrire les composantes irréductibles et les points génériques de $X \bigcap V(Y)$.
   c) Etudier la lissité de $X$ en tout point $P$ de $X$.
5. Soit $p$ un nombre premier, $k$ un corps de caractéristique $p > 0$, $a \in k$, $k' = k[X]/X^p - a$, $x$ la classe de $X$ dans $k'$. Donner une base du $k'$-espace vectoriel $\Omega_{k'/k}$. Montrer qu'il existe une dérivation $D : k' \to k'$ telle que $D(x) = 1$. L'extension $k \to k'$ est-elle séparable ?
6. Soit $A$ un anneau, $X = \mathrm{Spec\,A}$, $x$ un point de $X$, $k(x)$ son corps résiduel. Pour $f \in A$, on note $f(x)$ l'image de $f$ par l'application canonique $A \to k(x)$.
   a) Montrer que $x \in V(f)$ si et seulement si $f(x) = 0$.
   b) Montrer que $x \in D(f)$ si et seulement si $f(x) \neq 0$.
7. Soit $A$ un anneau noetherien, et $B = A[T]/T^r - a$, avec $a \in A$, $r \in \mathbb{N}$. Montrer que le morphisme $\mathrm{Spec\ B} \to \mathrm{Spec\,A}$ est étale si et seulement si $ra$ est inversible dans $A$.
8. Soient $A = \mathbb{Z}[T]/T^2 - 2$, $S = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, $X = \mathrm{Spec\,A}$, $f$ le morphisme canonique $X \to S$.
   a) Décrire les points $s$ de $S$ et $x$ de $X$ ainsi que leur corps résiduel. Pour $s = f(x)$, décrire l'extension de corps correspondante $k(s) \to k(x)$.

b) Soit $U$ l'ouvert $U = D(2) \subset S$. On rappelle que $U$ est homémorphe à $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/2]$. Soit $x \in f^{-1}(U)$, montrer que $f$ est étale en $x$.

c) Soit $x \in f^{-1}(V(2))$, montrer que $f$ n'est pas étale en $x$.

9. Soient $K = \mathbb{C}$, $f(X) = X(X^2 - 1)(X - \lambda) \in K[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - f(X))$, $C = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$.

   a) Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles la courbe $C$ est lisse.

   b) On suppose dans la suite que $C$ est lisse.

      i. Soit $u$ un point de $D(y)$. Montrer que $k(u) \otimes_A \Omega_X$ est un $k(u)$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $dx$.

      ii. Soit $u$ un point de $D(f')$. Montrer que $k(u) \otimes_A \Omega_X$ est un $k(u)$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $dy$.

10. Soit $K$ un corps, $g(x, y, z) = (y+z)^2 - xz \in K[x, y, z]$, $A = K[x, y, z]/g(x, y, z)$, $S = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$.

    a) Quelle est la dimension de $S$ ? Quelle est le nombre de composantes irréductibles de $S$ ?

    b) Déterminer l'ensemble des points où $S$ est lisse. Vérifier que ces points forment un ouvert de $S$.

## Complétés $M$-adiques

11. Soient $k$ un corps de caractéristique différente de 2, $A = k[x, y]/(y^2 - x^2(x+1))$, $M$ l'idéal $(x, y)$ de $A$, $\widehat{A}$ la complétion $M$-adique de $A$.

    a) Montrer que $\widehat{A} \simeq k[[x, y]]/(y^2 - x^2(x + 1))$.

    b) Montrer que l'élément $1 + x$ est un carré dans $k[[x]]$. Soit $g$ un élément inversible de $k[[x]]$. Remarquer que $X = xg(x)$ est un paramètre local de $k[[x]]$ et donc $k[[X]] \simeq k[[x]]$.

    c) Montrer que $\widehat{A} \simeq k[[u, v]]/uv$ et que $\widehat{A}$ est local.

12. Soient $k$ un corps de caractéristique différente de 2, $A = k[x, y]/(y^2 - x(x+1))$, $C = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$, $Z = V(x, y)$. Montrer que $C$ est lisse sur $\operatorname{Spec} \mathrm{k}$. Soit $\mathcal{O}_{C,z}$ l'anneau local de la courbe $C$ en $z$, d'idéal maximal $M$. On rappelle que le complété $M$-adique $\widehat{O}_z$ de $\mathcal{O}_{C,z}$ est isomorphe à $k[[t]]$ car la courbe $C$ est lisse en $z$. Donner l'image de $x$ et de $y$ par le morphisme canonique $\varphi : \widehat{\mathcal{O}}_z \to k[[t]]$.

13. Soit $n$ un entier $\geq 2$, $D = \mathbb{Z}[1/n]$.

    a) Soit $S = (1 + T)^n - 1 \in D[T]$, montrer que $D[[S]] = D[[T]]$ et qu'il existe $f(S) \in SD[[S]]$ tel que $1 + S = (1 + f(S))^n$. On pourra s'inspirer de la démonstration du lemme de Hensel.

    b) Soit $A$ un anneau complet pour la topologie $I$-adique avec $I$ un idéal de $A$, et tel que $n$ est inversible dans $A$. Soit $x \in I$, montrer qu'il existe un unique homomorphisme continu : $\Phi : D[[S]] \to A$ tel que $\Phi(S) = x$. Conclure qu'il existe $y \in I$, tel que $1 + x = (1 + y)^n$.

    c) Montrer que l'énoncé précédent n'est plus vrai si $n$ n'est pas inversible dans $A$.