# MPA S2, algèbre : devoir maison à rendre pour le 29 avril 2013.

C. Huyghe

Ce devoir interviendra dans la note de contrôle continu. Si vous ne parvenez pas à montrer les résultats pour un $n$ général, il sera tenu compte de vos tentatives pour de petites valeurs de $n$.

1.

2. Soient $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq 5$, et $F = \mathbb{R}_2[X]$, $A(X)$ un polynôme de degré 3 de $E$.

   1- Montrer que $(1, X, \ldots, X^5)$ est une base de $E$ et que $dim(E) = 6$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3.

   2- Pour $P \in E$, on pose $Q(X)$ et $R(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P$ par $A$. Les polynômes $Q$ et $R$ sont donc uniquement déterminés par $deg(R) < 3$ et

   $$P(X) = A(X)Q(X) + R(X).$$

   Soit $f$ l'application : $P \mapsto R$. Montrer que $f$ est linéaire et est un projecteur : $E \to F$. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. Vérifier que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans $E$.

   3- Donner une base de $E = \mathbb{R}_5[X]$, dans laquelle $f$ a pour matrice une matrice diagonale, ne comportant que des 1 et des 0.

3. Soient $E = K$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$, $f \in \mathcal{L}(E)$.

   1- Montrer que $H = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

   2- Supposons $f$ injectif, que peut-on dire de $H$ ?

   3- On suppose désormais que $f$ n'est pas injectif. Soit $F$ un supplémentaire de $Imf$ dans $E$. Montrer que $dimH = dimF.dim(Kerf) = dim(Kerf)^2$. (indication : on pourra montrer que $g \in H$ induit un endomorphisme : $F \to Kerf$).

4. 1- Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Montrer que les valeurs propres de $T$ sont les coefficients diagonaux de la matrice $T$.

   2- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, i.e. $A^n = 0$. On suppose que $A$ est la matrice de l'endomorphisme $u$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Montrer que 0 est l'unique valeur propre de $u$ et que $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 0 sur la diagonale.

3- Montrer que toute matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{C})$ n'ayant que des 0 sur la diagonale est nilpotente.

4- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice unipotente, i.e. $(A - Id)^n = 0$. Montrer que $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 1 sur la diagonale.

5- Montrer que toute matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{C})$ n'ayant que des 1 sur la diagonale est unipotente.